第 41 卷 第 4 期 力 学 进 展 Vol. 41 No. 4
2011 年 7 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS July 25, 2011

含时滞的快–慢耦合系统的动力学研究进展*

郑远广 [1] 王在华 [1,2,†]

[1] 南京航空航天大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 南京 210016
[2] 解放军理工大学理学院应用数理系, 南京 211101

摘 要 现代机械系统越来越多地采用轻质柔性材料, 使得系统具有不同时间尺度的状态变量, 如果同时考虑控制环节中不可避免的时滞, 则这种系统是带有时滞的快–慢耦合系统. 本文首先概述了快–慢耦合系统的基础理论及其发展概况; 然后介绍了含有时滞的快–慢耦合系统的若干非线性动力学问题及研究进展; 最后对进一步的研究提出了自己的看法.

关键词 快–慢系统, 时滞, 奇异摄动, 慢变流形, 分岔

1 前 言

现代航天器、工业机器人、大型运输车辆、先进兵器等越来越多地采用轻质柔性材料. 这使得其中一些元件刚性很强, 固有频率很高; 而另一些元件刚性很弱, 表现更多的柔性运动, 其固有频率相对较低. 在这些系统的动力学模型中, 既包含动力学时间尺度较快的状态变量, 又包含时间尺度较慢的状态变量. 若引入适当的无量纲参数来表示不同动力学时间尺度的比值, 则这些系统可表示成由快变量和慢变量相耦合的系统 (简称快–慢系统). 例如, 在柔性弹簧和轮胎组成的悬挂系统中, 由于弹簧和轮胎的振动频率存在量级差, 系统中含有动力学时间尺度不同的状态变量, 系统是快–慢系统 [1]; 在绳系卫星系统中, 由于子星的高频振动和系绳的低频摆动相互耦合, 系统中存在快变量和慢变量的耦合, 系统是快–慢系统 [2]; 在宏–微机器人中, 大机械手和小机械手具有不同的动力学时间尺度, 系统是快–慢系统 [3]; 在架空输电线系统中也含有动力学时间尺度不同的状态变量, 系统也是快–慢系统 [4]. 此外, 快–慢系统还广泛应用于描述化学系统 [5]、生态系统 [6]、生物神经系统 [7-9] 和光电系统中 [10].

下面用一个简单的模型来说明机械系统中快–慢系统的典型形式. 考察如图 1 所示的二自由度系统.

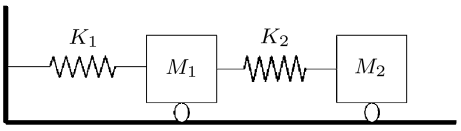


图 1 二阶快–慢系统模型

图 1 中的 M_1 和 M_2 为小车质量, K_1 和 K_2 分别为两弹簧的弹性系数, 且 $K_1 \gg K_2$, 假设 M_1 的左端固定, 用 y 和 x 分别表示两小车的位移, 则得到下列微分系统

$$\begin{cases} M_2\,\ddot{x} + K_2\,x - K_2\,y = 0 \\ M_1\,\ddot{y} + (K_1 + K_2)\,y - K_2\,x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

记 $\omega_1 = \sqrt{K_1/M_1}$, $\omega_2 = \sqrt{K_2/M_2}$, $\varepsilon = \omega_2/\omega_1$, $p = M_2/M_1$ 和 $r = p\varepsilon^2$, 并作时间变换 $\tau = \omega_2\,t$,

收稿日期 : 2009-02-26, 修回日期 : 2011-06-08
* 全国优秀博士学位论文作者专项基金项目 (200430)、国家杰出青年科学基金项目 (10852070) 和国家自然科学基金重点项目 (10532050,11032009) 资助
† E-mail: zhwang@nuaa.edu.cn

那么系统方程 (1) 可写成

$$\begin{cases} \ddot{x}+x-y=0 \\ \varepsilon^2\,\ddot{y}+y+r\,(y-x)=0 \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{X}=(x,\dot{x})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{Y}=(y,\varepsilon\dot{y})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$, 那么系统方程可写成如下矩阵方程的形式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}=B_{11}\boldsymbol{Y}+B_{12}\boldsymbol{X} \\ \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{Y}}=A_{11}\boldsymbol{Y}+A_{12}\boldsymbol{X} \end{cases}$$

考虑到其中的非线性力, 方程组有如下更一般的形式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}=F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\varepsilon) \\ \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{Y}}=G(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\varepsilon) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^2$ 变化速度相对 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^2$ 的变化速度要快得多, 因而称为快变量, 而 $\boldsymbol{X}$ 称为慢变量.

其实, 很多含有小参数和快–慢过程的系统方程都可以表示为系统 (2) 的形式. 例如, 数学摆的运动方程为

$$\ddot{x}+\mu\,\dot{x}+\sin x=0 \tag{3}$$

如果 $\mu\gg 1$, 令 $\varepsilon=1/\mu$, 那么上述方程可化为

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \varepsilon\,\dot{y}=-y-\varepsilon\,\sin x \end{cases}$$

因此, 具有快–慢变量的自治系统的一般形式方程为

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x,y,\varepsilon) \\ \varepsilon\,\dot{y}=g(x,y,\varepsilon) \end{cases} \tag{4}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$ 为慢变量, $y\in\mathbb{R}^m$ 称为快变量.

另一方面, 时滞是自然界中普遍存在的现象[11], 特别是受到主动控制的机械系统, 其中控制器、滤波器和作动器产生的时间滞后效应是难以避免的 [12-13], 且具有重要影响 [14-16]. 考虑到时滞效应后, 具有快–慢变量的耦合系统为

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x,y,x_\tau,y_\tau,\varepsilon) \\ \varepsilon\,\dot{y}=g(x,y,x_\tau,y_\tau,\varepsilon) \end{cases} \tag{5}$$

其中 $x_\tau=x(t-\tau)$, $y_\tau=y(t-\tau)$, 而 $\tau\geqslant 0$ 表示系统中的时滞. 这类系统为含有时滞的快–慢耦合系统, 简称时滞快–慢系统.

时滞系统与常微分系统不同, 其演变不仅依赖于当前状态, 还依赖于过去某一时间段状态, 它的初始空间和解空间都是无穷维空间. 研究表明, 含有时滞后, 系统会表现出新的动力学特性和更复杂的动力学现象 [17-18]; 时滞对神经系统的同步动力学行为具有重要的影响 [19], 能诱导出复杂的同步转迁模式 [20]; 时滞对随机动力系统的动力学特性也具有重要的影响 [21-22]. 由此可见, 含有时滞后, 快–慢系统的动力学分析比无时滞系统要困难得多, 但必然会表现出新的非线性特性和更复杂的动力学现象. 忽略时滞的作用往往会导致错误的控制设计. 为了提高现代航天器、工业机器人、大型运输车辆、先进兵器等系统的安全性能和系统性能, 应该充分考虑时滞对快–慢系统动力学与控制的影响.

在本文第 2 节, 我们首先叙述快–慢系统的基础理论和发展概况; 然后在第 3 节, 分别介绍了含有时滞的快–慢系统的若干动力学现象和研究现状; 最后在第 4 节, 对全文进行了总结并对进一步的研究工作提出了自己的看法.

2　快–慢系统的基础理论和发展概况

2.1　快–慢耦合系统发展概况

对常微快–慢系统 (无时滞) 已有大量的研究工作, 并取得了丰富的研究成果. 在某些区域上, 快–慢系统的快变量会产生激变, 这导致边界层和内部层等奇异现象的出现, 因此该系统是典型的奇异摄动系统. 在计算外部层、边界层和内部层的近似相轨线时, 各种经典的奇异摄动法是基本的工具. 例如, 重新标度法 [23]、多尺度法 [24]、匹配合成展开法 [25] 等. 众多国内和华裔学者对奇异摄动法的发展作出了杰出的贡献, 如钱伟长关于解的合成展开法和弹性板壳统一的内禀理论等都得到了国内外的高度评价, 郭永怀对变形坐标法的推广被钱学森称为 PLK 法, 林家翘的解析特征线法也获得广泛关注.

快–慢系统中快变量和慢变量相互作用, 使得系统中存在多种分岔和复杂的动力学现象. 一方面, 慢变量的变化能引起快子系统发生多种分岔, 其中基本的分岔有 saddle node 分岔、pitchfork 分岔、Hopf 分岔等, 这些分岔与通常意义下的分岔是有区别的, 若把慢变量看成快子系统中缓慢变化的分岔参数, 则这些分岔就是国内学者所指的时变分岔 [26]. 另一方面, 快变量的变化也会影响慢变量的运动, 特别是, 快子系统中的多种分岔之间的相互影响可导致快–慢系统中出现更复

杂的动力学现象. 如 saddle node 分岔与 saddle node 分岔连接在一起 (简称 “saddle node/ saddle node” 现象), 这时系统通常会出现张弛振荡, van der Pol 系统中的张弛振荡已得到广泛的关注. 类似的有 “saddle node/Hopf” 现象、“Hopf/Hopf” 现象、“Hopf/homoclinic” 现象等 [7].

近年来, 快–慢系统中复杂的动力学现象得到广泛的关注. 在生态系统中, 由于各种物种的生理周期存在较大的差异, 或者因为生态环境的缓慢变化过程, 系统中快变量和慢变量相互作用导致复杂的动力学现象, 如生态环境的恶化、物种的爆发和消亡等, 这些动力学现象产生的机制已得到深入的研究 [6]. 在生物神经系统中, 存在各种快–慢过程, 这些快–慢过程相互耦合使得系统存在各种形式的分岔和丰富的放电模式 [7-9], 典型的运动形式是峰放电和簇放电, 通过考察其中各种复杂的动力学现象是怎样由基本分岔的相互作用力产生的, 文献 [7-9] 对系统产生各种放电形式的机制进行了研究, 并进一步在文献 [7] 中对各种放电形式进行了系统的归纳和分类. 基于数值方法, 文献 [27-28] 研究了时滞对含快–慢变量耦合的 Morris-Lecar(ML) 神经系统同步的影响, 发现适当大小的时滞可以加强系统的同步. 另外, 文献 [29] 考察了含有时滞的 Hindmarsh-Rose(HR) 神经元系统中的族放电模式, 结果表明时滞对族放电的频率和数量都具有重要影响.

由于快–慢系统广泛存在于许多工程技术领域, 这类系统的控制问题也得到了广泛的关注. 在对快–慢系统的控制设计中, 早期对其处理的方法是简单地忽略快变模态, 从而降低系统的阶数. 然而, 大量事实证明, 基于这样的简化模型设计的控制效果往往与设计要求相距甚远 [30]. 为了提高控制效果, 发展了奇异摄动控制方法对快–慢系统进行控制设计. 其中的基本思想是文献 [31] 提出的 “快–慢分解的思想”, 文献中指出: 如果慢、快子系统均是稳定的, 则摄动参数必存在一个稳定上界, 在此范围之内, 整个系统是稳定的. 在对快–慢系统进行控制设计中, 首先忽略快变量以降低系统阶数, 然后通过引入边界层校正来提高近似程度. 这两个降阶系统可以近似刻画原系统的动力学行为, 这实际上是分别对快子系统和慢子系统进行控制设计, 从而对整个系统进行控制 [30,32].

2.2 快–慢耦合系统的几何奇异摄动理论

考察自治快–慢系统

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), y(s), \varepsilon) \\ \varepsilon\dot{y}(s) = g(x(s), y(s), \varepsilon) \end{cases} \tag{6}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, $s \in [0, L]$, $x \in \mathbb{R}^n$ 称为慢变量, $y \in \mathbb{R}^m$ 称为快变量, $f \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^m$ 为足够光滑的函数. 通过关系 $s = \varepsilon t$ 引入新的无量纲时间变量 t, 并将 $x(\varepsilon t)$ 和 $y(\varepsilon t)$ 分别简记为 $x(t)$ 和 $y(t)$, 那么系统 (6) 可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon f(x(t), y(t), \varepsilon) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), \varepsilon) \end{cases} \tag{7}$$

其中 s 和 t 分别称为慢时间尺度和快时间尺度, 系统 (6) 和 (7) 分别称为慢系统和快系统.

在系统 (6) 和 (7) 中, 令 $\varepsilon \to 0$, 得到两个简化系统, 这两个简化的系统的维数通常比原来系统的维数要小得多, 所以更容易求解. 但是这两个简化系统能正确地反映原来系统的动力学行为吗? 为此我们考察两个极限系统.

令 $\varepsilon \to 0$, 得慢系统 (6) 的极限系统

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), y(s), 0) \\ 0 = g(x(s), y(s), 0) \end{cases} \tag{8}$$

这是一个代数微分系统 (复合系统). 从方程 $g(x(s), y(s), 0) = 0$ 中可得奇点集合

$$M_0 = \{(x, y) : g(x, y, 0) = 0\}$$

我们从方程 $g(x, y, 0) = 0$ 解出 y, 得 $y = h_0(x)$, 这时奇点集合可表示成 $M_0 = \{(x, y) : y = h_0(x)\}$, 在集合 M_0 上系统的行为由系统 (8) 的第一个方程确定, 这时很自然人们会把 $y = h_0(x)$ 代入系统 (8) 的第一个方程得到关于慢变量的系统

$$\dot{x}(s) = f(x(s), h_0(x(s)), 0)$$

令 $\varepsilon \to 0$, 则得快系统 (7) 的极限系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), 0) \end{cases} \tag{9}$$

在极限系统 (9) 中, 变量 $x(t)$ 是一个不变的量, 这时可得到一个仅关于快变量的系统

$$\dot{y}(t) = g(x, y(t), 0)$$

在这个系统中 x 看作系统参数, 从这个系统中可以考察快变量 $y(t)$ 的变化趋势.

然而, 系统 (8) 和 (9) 都不能完全反映原系统的动力学行为. 例如, 系统 (8) 仅在集合 M_0 上有效; 而在系统 (7) 中, 当 $g(x, y, 0) = O(\varepsilon)$ 时, 变量 $y(t)$

的变化速度与 $x(t)$ 的变化速度是同阶的, 这时它显然不能简化成系统 (9). 因此要研究快–慢系统中复杂的动力学现象, 必须把系统 (8) 和 (9) 结合起来进行研究, 正确地处理快变量和慢变量的关系. 几何奇异摄动法通过引入慢变流形 (不变流形的近似), 恰当地处理了快变量与慢变量的耦合关系, 具有严格的数学理论基础. 慢变流形从整体上刻画了快–慢系统的解轨线的形状, 从而可以比较直观地分析系统的各种分岔和复杂的动力学行为, 这避免了经典的奇异摄动法要进行复杂的相轨线计算. 近年来, 几何奇异摄动理论在对快–慢系统的分析中得到广泛的应用 [6-7]. 几何奇异摄动理论体系主要包括 Tikhonov 定理 [33]、Fenichel 的一系列关于不变流形的定理 [34-36] 和建立在 Fenichel 规范型之上的一系列的交换引理 [37].

Tikhonov 定理叙述如下:

定理 1 (Tikhonov): 假设非线性奇异摄动系统具有如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f_0(x(s), y(s), s) + \varepsilon f_1(x(s), y(s), s) + \cdots \\ \varepsilon\dot{y}(s) = g_0(x(s), y(s), s) + \varepsilon g_1(x(s), y(s), s) + \cdots \end{cases} \tag{10}$$

其中 $(x, y) \in D \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, D 和 G 为连通开域, 初始条件为 $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. 又设极限系统

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f_0(x(s), y(s), s) \\ 0 = g_0(x(s), y(s), s) \end{cases} \tag{11}$$

有解 $\bar{x}(s)$ 和 $\bar{y}(s)$, 奇点集为

$$M_0 = \{(x, y) : y(x) = h_0(x, s)\}$$

又设 $y(x) = h_0(x, s)$ 是如下系统

$$\dot{y}(t) = g(x, y(t), s) \tag{12}$$

对任意 $x \in D$, $s \in \mathbb{R}^+$ 一致有效地渐近稳定的平衡点, 且 y_0 包含在奇点 $(x_0, h_0(x_0, s))$ 的吸引域内. 那么

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(s) = \bar{x}(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant L$$

和

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(s) = \bar{y}(s), \qquad 0 < d \leqslant s \leqslant L$$

Tikhonov 定理指出当系统的奇点集具有吸引性时, 从奇点集附近出发的相轨线很快被吸引到奇点集上.

Fenichel 系列定理主要讨论了不变流形的存在性及其性质, 并用不变流形来描述系统的轨线结构. 下面我们仅叙述 Fenichel 系列定理的基本内容. 考察自治系统 (6) 和 (7), 这时定义系统的慢变流形为系统的奇点集合 $M_0 = \{(x, y) : g(x, y, 0) = 0\}$. 为此先给出下列假设

(**H1**) $f(x, y, s)$, $g(x, y, s)$ 是对 (x, y, s) 足够光滑的函数, 其中

$$(x, y) \in U = D \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \ s \in I$$

且 U 和 I 是连通开域, $0 \in I$;

(**H2**) 慢变流形 M_0 是一紧集, 相关系统

$$\dot{y}(t) = g(x, y(t), 0) \tag{13}$$

是双曲的;

(**H3**) 函数 $h_0(x)$ 对 $x \in K$ 是足够光滑的函数, 其中 $K \subset D$ 是连通紧集, 且 K 的边界为 $n-1$ 维足够光滑的曲线.

定理 2 (Fenichel 1): 在条件 (H1) 和 (H2) 假设下, 若 $\varepsilon > 0$ 足够小, 那么存在流形 M_ε, 流形 M_ε 与慢变流型 M_0 为 $O(\varepsilon)$ 阶接近且与 M_0 是拓扑同构的, 同时 M_ε 为系统 (6) 的局部不变流形.

在假设 (H1) ∼(H3) 下, 定理 2 也可表述为如下定理.

定理 3: 若 $\varepsilon > 0$ 足够小, 那么存在足够光滑的函数 $y = h_\varepsilon(x)$ 其中 $x \in K$, 使得流形

$$M_\varepsilon = \{(x, y) : y = h_\varepsilon(x)\}$$

为系统 (6) 的局部不变流形.

定理 4 (Fenichel 2): 在 (H1) ∼(H3) 假设下, 设 $\varepsilon > 0$ 足够小, 那么存在流形 $W^s(M_\varepsilon)$ 和 $W^u(M_\varepsilon)$, 它们与 $W^s(M_0)$ 和 $W^u(M_0)$ 为 $O(\varepsilon)$ 阶接近且拓扑同构的, 另外, 它们是 $C^r(r < +\infty)$, 在系统 (6) 下为局部不变流形.

定理 2 指出在慢变流形 M_0 附近存在一不变流形 M_ε, 也可以把 M_ε 看成是对慢变流形 M_0 的一个小扰动. 定理 4 则更细致地描绘了在慢变流形 M_0 附近的轨线结构.

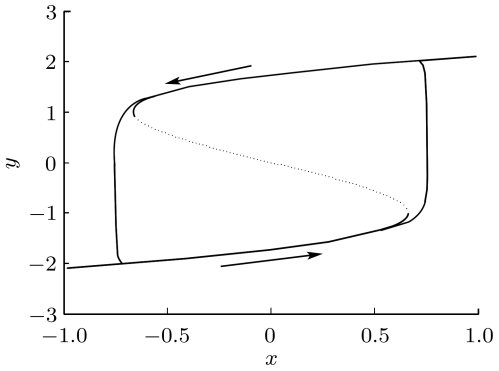
下面用几何奇异摄动理论来分析 van der Pol 系统中由 saddl enode 分岔引起的张弛周期振荡现象. 采用 Lienard 变量, van der Pol 系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \varepsilon\dot{y}(t) = x(t) + y(t) - y^3(t)/3 \end{cases} \tag{14}$$

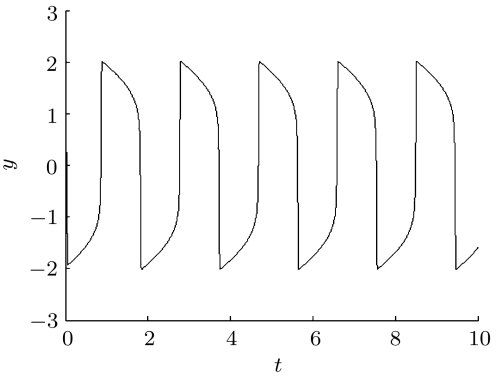
该系统的慢变流形为

$$M_0 = \left\{(x, y) : x + y - y^3/3 = 0\right\}$$

系统的慢变流形由 3 部分组成, 见图 2(a). 上下粗线为具吸引性的慢变流形部分, 中间的虚线部分为不稳定的慢变流形. 在内部层, $y(t)$ 变化很快, 相轨线很快被吸引到相应的慢变流形上, 这时 $y(t)$ 也是缓慢变化的, 由于 $\dot{x}(t)=-y(t)$, 所以当轨线被吸引到上部分的慢变流形上时, 轨线自右向左运动, 当其到达鞍结分岔点 $(-2/3,1)$ 时, 轨线被吸引到下部分的慢变流形上, 这时轨线自左向右运动, 当其到达鞍结分岔点 $(2/3,-1)$ 时, 轨线又被吸引到上部分的慢变流形上. 由此系统发生张弛振动 (relaxation oscillation), 见图 2(b).



(a) 慢变流形结构图和系统相图, 粗线为具吸引性的慢变流形部分, 虚线为不稳定的慢变流形部分, 细线为相轨线



(b) 时间历程图, 系统发生张弛周期振荡

图 2 系统 (14) 的慢变流形和相轨线图 ($\varepsilon=0.01$)

快–慢系统中多种分岔相互作用可导致更复杂的动力学现象. 下面用几何奇异摄动理论分析被广泛关注的神经元 Hindmarsh-Rose 模型 [9,38] 中复杂的放电现象, 系统方程为

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x}=y+ax^2-x^3-z+I \\ \varepsilon\dot{y}=1-dx^2-y \\ \dot{z}=b(x-x_{\rm c})-z \end{cases} \tag{15}$$

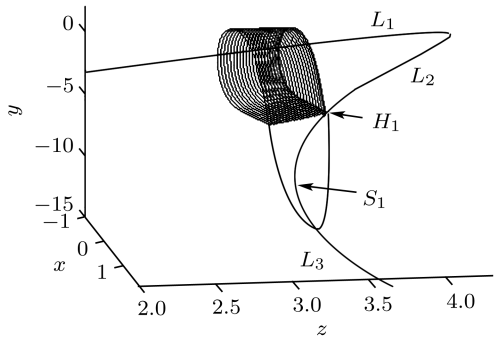
其中参数值为

$$a=3,b=4,d=5,x_{\rm c}=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),I=3.25$$

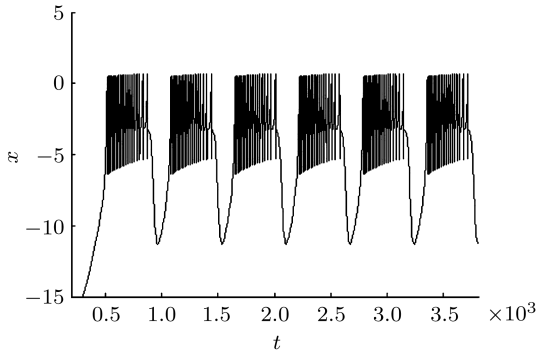
ε 为小参数, 因此 z 为慢变量. 系统的慢变流形为

$$M_0=\left\{(z,x,y):y+ax^2-x^3-z+I=0,\ 1-dx^2-y=0\right\}$$

慢变流形的结构见图 3(a), 其中 L_1 和 L_2 是具有排斥性的慢变流形部分, L_3 是稳定的慢变流形部分. S_1 是 saddle node 分岔点, 在 L_1 上, 系统通过 Hopf 分岔产生具有吸引性的周期轨道, 在点 H_1, 周期轨道与不稳定的 L_2 相交形成同宿轨线而消失, 这时轨线被吸引到 L_3 上并通过 saddle node 分岔又回到周期轨道上, 这样就形成了具有固定周期的族放电现象, 见图 3(b).



(a) 慢变流形结构图和系统相图, 粗线为具吸引性的慢变流形部分, 细线为不稳定的慢变流形部分



(b) 时间历程图

图 3 系统 (15) 的慢变流形和相轨线图 ($\varepsilon=0.001$)

当快–慢系统的快子系统是高维系统时, 慢变流形往往具有复杂的结构, 多种分岔通过慢变流形相互连接和融合在一起, 从而系统具有非常复杂的动力学行为. 在这种情况下, 可以先用数值的方法求得慢变流形的形状、确定其稳定性, 并找到

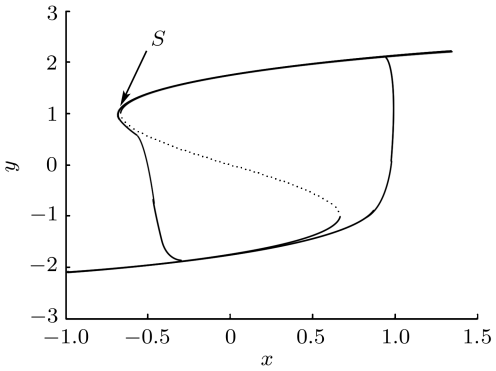
各个分岔点的位置, 再利用几何奇异摄动法分析相轨线的形状.

2.3 快–慢系统中的分岔延时现象

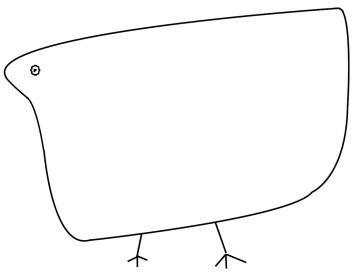
当快–慢系统的慢变流形上存在转折点时, 系统会发生分岔延时、慢通过效应等独特的动力学现象 [39-41], 这时慢变量作为快子系统中缓慢变化的分岔参数, 引起快子系统的分岔并不是在常规分岔点上发生, 而是在之后某点上发生真实的分岔的一种现象, 这也是时变分岔中特有的动力学现象. 例如, 下列 van der Pol 系统中著名的 canard(鸭子) 现象

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + \alpha \\ \varepsilon\dot{y}(t) = x(t) + y(t) - y^3(t)/3 \end{cases} \tag{16}$$

其中 $1-\alpha = O(\varepsilon)$, 当相轨线到达 saddle-node 分岔点 S 时, 并不立即离开不稳定的慢变流形, 而是沿着不稳定的慢变流形运动一段时间后才离开, 从而形成鸭子形状的相轨线, 见图 (4).



(a) 慢变流形结构图和系统相图, 粗线为具吸引性的慢变流形部分, 虚线为不稳定的慢变流形部分, 细线为相轨线



(b) 鸭子形状的相轨线

图 4　系统 (16) 的慢变流形和鸭子形状的相轨线图 ($\varepsilon = 0.03$)

分岔延时现象不会改变相轨线的拓扑结构, 但可以改变相轨线的形状, 从而影响系统的动力学行为, 如影响分岔发生的时间和位置. 在快–慢系统的动力学分析中, 若忽略分岔延时效应, 将会得到错误的结果, 因此, 必须考虑这些独特的动力学现象 [42].

3　含时滞的快–慢系统的动力学问题

含单个时滞 τ 的快–慢系统方程的一般形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x, y, x_\tau, y_\tau, \varepsilon) \\ \varepsilon\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t, x, y, x_\tau, y_\tau, \varepsilon) \end{cases} \tag{17}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为慢变量, $y \in \mathbb{R}^m$ 为快变量, $f \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^m$. 若重新定义时间尺度, 令 $t' = t/\varepsilon$, 系统可写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} = \varepsilon\, f(t', x, y, x_{\frac{\tau}{\varepsilon}}, y_{\frac{\tau}{\varepsilon}}, \varepsilon) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'} = g(t', x, y, x_{\frac{\tau}{\varepsilon}}, y_{\frac{\tau}{\varepsilon}}, \varepsilon) \end{cases} \tag{18}$$

若在慢系统 (17) 中有 $\tau = O(1)$, 则称系统含慢时滞 (长时滞); 若在快系统 (18) 中有 $\tau/\varepsilon = O(1)$, 则称系统含快时滞 (短时滞). 文献 [43] 中讨论了高维非线性时滞快–慢系统的约化问题, 基于中心流形约化, 提出一种方法, 把时滞快–慢系统约化成慢变流形上的仅含慢变量的常微分系统, 从而得到系统稳定性的结果.

3.1 线性时滞快–慢系统解的收敛性

文献 [44] 对线性时滞快–慢系统进行了研究, 首先讨论了其对应的极限系统解的存在性和唯一性, 进一步讨论了原系统的解收敛到极限系统解的条件. 文献 [45] 研究了下列含多时滞线性系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\boldsymbol{E}(\varepsilon)x(t)\} = \sum_{k=0}^{h} \boldsymbol{B}_k\, x(t-\omega_k) + \boldsymbol{f}(t) \tag{19}$$

这里 $0 < \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_h$ 和

$$\boldsymbol{B}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{k11} & \boldsymbol{B}_{k12} \\ \boldsymbol{B}_{k21} & \boldsymbol{B}_{k22} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & \varepsilon\mathbf{I}_m \end{pmatrix}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\boldsymbol{B}_{k11}$ 和 $\boldsymbol{B}_{k22}$ 分别为 n 阶方阵和 m 阶方阵, $\boldsymbol{B}_{k12}$ 和 $\boldsymbol{B}_{k21}$ 分别为 $n\times m$ 阶和 $m\times n$ 阶矩阵, $\mathbf{I}_n$ 和 $\mathbf{I}_m$ 分别为 n 阶和 m 阶单位阵. 文中指出若 $\det\boldsymbol{B}_{k22} \neq 0$, 那么系统 (19) 对应的极限系统的解存在且唯一. 当 $f(t)$ 为指数级有界时, 基于 Laplace 变换给出了系统 (19) 解的表达式, 并给出解的收敛定理. 有关这方面的研究还可参考 Magalhães 的工作 [46].

3.2 非线性时滞快–慢系统解的收敛性

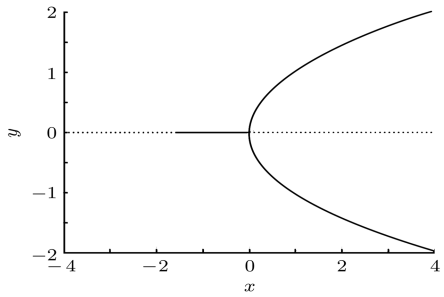
文献 [47] 考察了含有小时滞的非线性快–慢系统解的收敛情况, 给出了相应的收敛定理, 但系统的解并不收敛到对应的极限系统的解. 这说明用经典的奇异摄动法, 通常得不到时滞快–慢系统解的渐近展开式. 如考察系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \varepsilon\,\dot{y}(t) = x(t)\,y(t-\varepsilon\,\tau) - y^3(t) \end{cases} \tag{20}$$

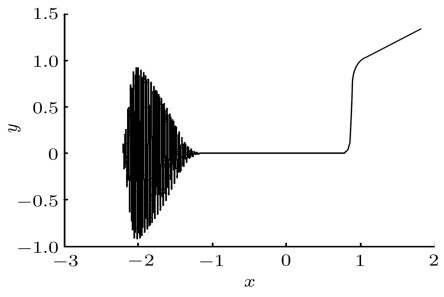
令 $\varepsilon = 0$, 得慢变流形

$$M_0 = \{(x,y) : y = 0 \ \text{ 或 } \ y = \pm\sqrt{x}\}$$

令 $\tau = 1$, 在 $x < -\pi/2$ 时, 系统的慢变流形 $y = 0$ 不稳定, 见图 5(a), 这时由于非线性项的作用, 系统发生周期运动; 在 $x \in (-\pi/2, 0)$ 时系统的慢变流形 $y = 0$ 稳定, 这时相轨线被吸引到慢变流形 $y = 0$ 上; 当 $x > 0$ 时, 慢变流形 $y = 0$ 不稳定, 而慢变流形 $y = \sqrt{x}(y = -\sqrt{x})$ 稳定, 所以相轨线被吸引到慢变流形 $y = \sqrt{x}(y = -\sqrt{x})$ 上去. 从轨线图 5(b) 可以看到, 以极限系统作为零次近似系统是不能得到原系统解轨线的渐近展开式的.



(a) 其中实线表示具吸引性的慢变流形部分, 虚线表示不稳定的慢变流形部分



(b) 相轨线

图 5 系统 (20) 的慢变流形和相轨线 ($\varepsilon = 0.01$, $\tau = 1$)

3.3 时滞引起内部层等现象

在对二阶线性时滞系统的边界值问题的讨论中, 人们发现当二阶导数项含有小参数时, 时滞与奇异摄动相互作用可导致内部层、多相运动及共振等现象的出现 [48-51]. 在文献 [48] 中考察了下列系统的边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon^2\ddot{x}(t) - x(t) + \alpha\dot{x}(t-\tau) + \beta x(t-\tau) = 0 \\ x(t_0) = a, \quad t_0 \in (-\tau, 0), \quad x(t_d) = b \end{cases} \tag{21}$$

若令 $\dot{x}(t) = y(t)$, 则系统可表示成时滞快–慢系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \varepsilon^2\dot{y}(t) = x(t) - \alpha y(t-\tau) - \beta x(t-\tau) \\ x(t_0) = a, \quad t_0 \in (-\tau, 0), \quad x(t_d) = b \end{cases}$$

运用分步法, 文献 [48] 求得系统具有如图 6 的边界层和内部层结构, 其中内部层是由时滞引起的.

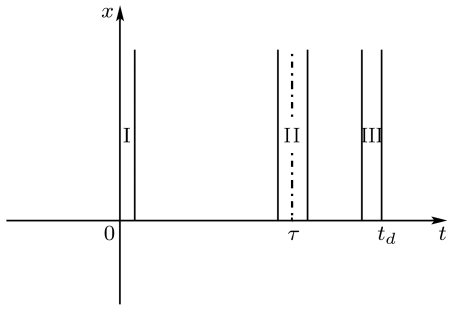


图 6 系统 (21) 的边界层和内部层结构, 其中区域 I 和 III是边界层, 区域 II 是由时滞引起的内部层

文献 [49] 研究了具有高频率快速振荡的系统, 指出时滞会导致多相运动 (multiphase behavior). 文献 [50] 中对具有转折点的系统进行了研究, 指出时滞在某些区域上会引起共振现象. 文献 [51] 中对具有小时滞的系统进行了讨论, 指出当小时滞与小参数 ε 同阶, 时滞会对系统的解产生本质的影响, 时滞在内部层会导致振荡解, 这个振荡解可延续到整个区间.

3.4 长时滞导致的复杂动力学现象

含有长时滞的一阶非线性奇异摄动系统有着复杂的动力学行为, 如含有长时滞的 Logistic 方程和光电系统中提出的 Ikeda 方程可以产生方波形式的振荡解、脉冲形式的振荡解以及混沌解. 考察下列被广泛讨论的一阶时滞系统

$$\varepsilon\,\dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-1), \lambda) \tag{22}$$

以该方程为模型的有生物系统 [52]、生理系统 [53] 和光电系统 [54] 等. 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 得到一个离散映射

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda) \tag{23}$$

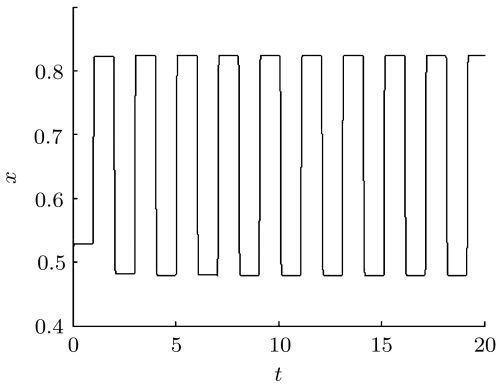
若令

$$f(x(t),\lambda)=\lambda\,x(t)\,(1-x(t))$$

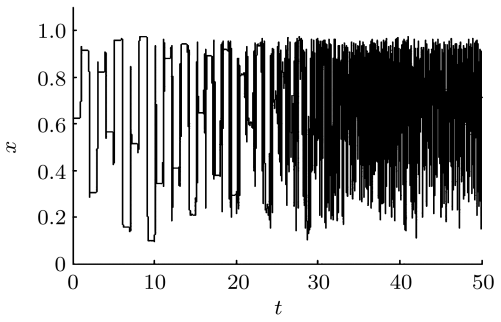
则 (23) 就是 Logistic 映射

$$x_{n+1}=\lambda\,x_n\,(1-x_n) \tag{24}$$

当 λ 变大, Logistic 映射会通过倍周期分岔通向混沌; 这对应原系统的解由 square-wave 振荡变成混沌运动, 见图 7. 在这种情况下, Chow 和 Hale 等 [55]



(a) 逻辑斯谛映射存在二倍周期点时, 对应的原系统出现 square-wave 振荡解 ($\lambda=3.3$)



(b) 逻辑斯谛映射出现混沌时, 对应的原系统的解由 square-wave 振荡解转变成混沌 ($\lambda=3.9$)

图 7　系统 (22) 的时间历程图 ($\varepsilon=0.01$)

对系统 (22) 解的性质进行了细致的分析, 在一定的条件下给出了 Hopf 分岔图, 并且指出这些 Hopf 分岔周期解可以转变成 square-wave 振荡解. Hale 和 Huang[56] 对系统 (22) 带有如下非线性项进行了研究

$$f(x,\lambda)=-(1+\lambda)\,x+a\,x^2+b\,x^3+o(x^3) \tag{25}$$

文中指出当 $\beta=a^2+b\neq 0$ 时, 映射 (23) 出现超临界 ($\beta>0$) 或亚临界 ($\beta<0$) 周期–2 分岔, 这分别对应于原系统出现 square-wave 振荡解和 pulse-wave 振荡解的情况, 这时在内部层系统分别出现异同宿轨道. 文献 [57] 求得该系统只带有平方非线性项时的振荡解的解析表达式. Chow 和 Huang[58] 对如下混合系统进行了研究

$$\begin{cases}\varepsilon\,\dot{x}(t)=-x(t)+g(y(t),\lambda)\\ y(t)=f(x(t-1),y(t-1),\lambda)\end{cases} \tag{26}$$

指出当映射 $F(y,\lambda)=f(g(y,\lambda),y,\lambda)$ 存在周期–2 解时, 原系统出现 square-wave 振荡解, 且在内部层系统存在异宿轨线.

文献 [59] 研究了含有长时滞的二阶非线性奇异摄动系统, 系统方程如下

$$\ddot{x}(t)+x(t)+\varepsilon\,\alpha_1\,\dot{x}(t)-\varepsilon\,x^3(t)+\varepsilon\,\alpha_2\,\dot{x}(t-\frac{\tau}{\varepsilon})=0 \tag{27}$$

令 $s=\varepsilon t$, 得对应的慢系统为

$$\varepsilon^2\,\ddot{x}(s)+x(s)+\varepsilon^2\,\alpha_1\,\dot{x}(s)-\varepsilon\,x^3(s)+\varepsilon^2\,\alpha_2\,\dot{x}(s-\tau)=0$$

若时滞项不存在, 系统为一高频系统. 带上时滞项后, 系统产生拟周期振动 (见图 8). 系统的振幅在慢变流形上缓慢变化. 文献 [59] 用多尺度法得到慢变流形上的系统仍为一时滞系统, 原系统可发生 Hopf-Hopf 分岔.

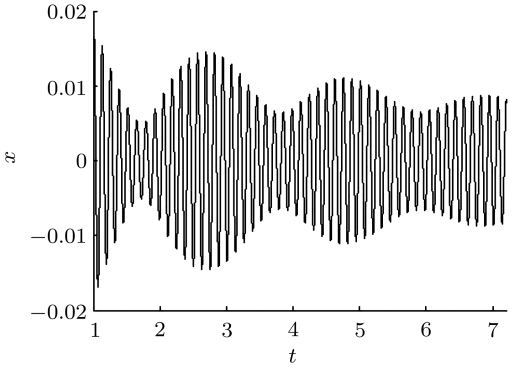


图 8　系统 (27) 拟周期振动解时间历程图, 其中周期振动解的振幅在慢变流形上缓慢变化 ($\varepsilon=0.02$, $\tau=1$, $\alpha_1=0.16$, $\alpha_2=2.5$)

文献 [60] 讨论了光电系统中的二阶时滞快–慢系统模型, 利用能量函数分析的方法, 从理论上证明了系统存在脉冲形振荡解. 文献 [61] 考察了时滞对脉冲振荡解的影响, 发现时滞不仅可以影响脉冲周期解的形态, 还可以改变脉冲振荡的稳定性, 可以使系统出现更复杂的运动, 甚至产生混沌运动.

3.5 时滞快–慢系统的分岔延时现象

与由常微分方程描述的快–慢系统一样, 时滞快–慢系统也存在分岔延时、慢通过效应等独特的动力学现象 [62]. 文献 [63] 考察了时滞反馈对分岔延时的影响, 结果表明, 加上适当的时滞反馈项后, 系统仍然存在分岔延时现象. 文献 [61] 的研究表明时滞会影响分岔发生的时间, 在一定条件下会推迟分岔的发生. 在文献 [64] 中, 通过中心流形约化, 把文献 [41] 的结果推广到时滞快–慢系统中, 给出了系统发生 Hopf 分岔延时的充分条件, 并给出了计算进入–逃逸函数的方法. 如时滞快–慢系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y^2(t) + 1 \\ \varepsilon\,\dot{y}(t) = -x(t)\,y(t-\varepsilon) - y^3(t) \end{cases} \tag{28}$$

系统的慢变流形为

$$M_0 = \left\{(x,y) : y = \pm\sqrt{-x} \ \text{ 或 } \ y = 0\right\}$$

令 $t' = t/\varepsilon$, 得对应的快子系统为

$$\dot{y}(t') = -x\,y(t'-1) - y^3(t')$$

通过对快子系统进行稳定性分析, 可知在慢变流形 $\{(x,y) : y = 0, x > 0\}$ 上存在转折点 $P_{\rm c} = (\pi/2,\ 0)$, 慢变流形 $\{(x,y) : y = 0, 0 < x < \pi/2\}$ 稳定, 而慢变流形 $\{(x,y) : y = 0, x > \pi/2\}$ 不稳定. 当相轨线从左边通过转折点 $P_{\rm c}$ 时, 相轨线并不立即离开不稳定的慢变流形 $\{(x,y) : y = 0, x > \pi/2\}$, 即没有发生真实的分岔, 而是过一段时间之后, 在某点 $\bar{P}_{\rm c}$ 处发生真实的分岔, 相轨线离开不稳定的慢变流形, 见图 9.

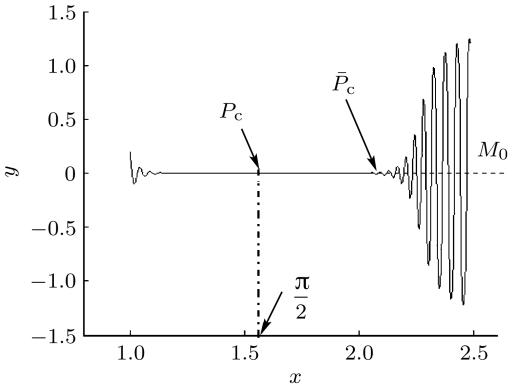


图 9 系统 (28) 的慢变流形和相图, $P_{\rm c}$ 为转折点, 分岔延时到 $\bar{P}_{\rm c}$ 发生 ($\varepsilon = 0.01$)

文献 [65] 研究了一类含时滞的快–慢耦合系统的分岔延时现象, 发现慢变时滞可以改善系统的稳定性. 文献 [66] 受此工作启发利用慢变时滞来改善小世界网络系统的稳定性.

4 展望

快–慢耦合系统的典型特征是含有不同动力学时间尺度的状态变量. 要正确地揭示其动力学行为, 就必须采用适当的方法处理好具有不同动力学时间尺度的状态变量之间的关系, 在这方面已有很多成功的范例, 如经典的奇异摄动法、平均法、多尺度法、匹配合成展开法等. 然而, 要分析快–慢系统中复杂的动力学行为, 几何奇异摄动法是有效的工具. 对时滞快–慢耦合系统来说, 由于初始空间和解空间均为无穷维的空间, 目前主要还是在维数是有限的物理状态空间来理解 Tikhonov 定理和 Fenichel 关于不变流形的理论. 如何从状态空间来研究时滞快–慢耦合系统的不变流形以及系统动力学特征仍然是一个有待解决的基本问题.

极限系统常常比原系统要简单很多, 人们总是希望能够用极限系统来近似原快–慢系统, 但是如果时滞出现在快变量中, 即使是时滞量非常小, 原系统的解也并不一定收敛到极限系统的解. 因此, 需要研究在什么条件下, 时滞快–慢耦合系统的动力学可以通过其极限系统的动力学得到. 含有长时滞的系统是实际应用中一种常见的快–慢系统, 长时滞常常会导致非线性系统的复杂动力学行为, 典型的如 square-wave 振荡解, 当参数变化时, square-wave 振荡解会演化成混沌运动. 一阶非线性系统中的这种方波形式的解已得到充分的研究, 但对高价系统的研究并不多见. 从应用的角度看, 有必要发展更有针对性的解析或半解析方法求解这类特殊形式的高阶微分方程.

时滞对快–慢系统的非线性动力学具有重要的影响, 它可以改变解的形态, 也可以改变解的稳定性等, 但目前有关动力学的很多结论都是在时滞为常数的情况下得到的, 对随时间变化的时滞, 由于理论分析上的固有困难, 这方面的结果还很少. 值得注意的是, 尽管在很多情况下, 时滞对系统稳定性是不利因素, 但是也可以成为有利因素. 深入挖掘时滞快–慢耦合系统的独有动力学特性是一个很有意义的课题

在无时滞情形, 快–慢系统有各种各样的范式系统, 它们的形式比较简单, 但可以刻画原系统的定性性质, 因而对系统的动力学分析和控制设计

具有重要的意义. 但对含有时滞的快–慢系统尚未见到类似的结果, 值得进一步研究. 这里的主要问题是将原系统约化到范式系统, 各步骤采用的变换要足够简单, 否则所得结果过于复杂而失去其实用价值.

参 考 文 献

1 Georgiou I T, Bajaj A K, Corless M. Slow and fast invariant manifolds, and normal modes in a two degree-of-freedom structural dynamical systems with multiple equilibrium states. *Int J Nonlinear Mech*, 1998, 33(2): 275-300

2 王晓宇, 金栋平. 计入姿态的绳系卫星概周期振动. 振动工程学报, 2010, 23(4): 261-265

3 陈启军, 王月娟, 陈辉堂. 基于奇异摄动的宏 – 微机器人控制方法, 同济大学学报, 2001, 29(7): 805-810

4 蒋扇英, 徐鉴. 奇异摄动系统在输电线非线性振动问题中的应用. 力学季刊, 2009, 30(1): 33-38

5 Petrov V, Scott S K, Showalter K. Mixed-mode oscillations in chemical systems. *J Chem Phys*, 1992, 97(9): 6191-6198

6 Rinaldi S, Scheffer M. Geometric analysis of ecological models with slow and fast processes. *Ecosystems*, 2000, 3(6): 507-521

7 Izhikevich E M. Neural excitability, spiking and bursting. *Int J of Bifurcat Chaos*, 2000, 10(6): 1171-1266

8 Yang Z Q, Lu Q S. Different types of bursting in Chay neuronal model. *Sci China Ser G*, 2008, 51(6): 687-698

9 陆启韶, 刘深泉, 刘锋, 等. 生物神经网络系统动力学与功能研究. 力学进展, 2008, 38(6): 766-793

10 Ségard B, Glorieux P, Erneux T. Delayed pulse dynamics in single mode class B lasers. *Appl Phys B*, 2005, 81(7): 989-992

11 徐鉴, 裴利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望. 力学进展, 2006, 36(1): 17-30

12 Hu H Y, Wang Z H. Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback. Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag, 2002

13 Cai G P, Yang S X. Active control of a flexible structure with time delay. *Struct Eng and Mech*, 2005, 20(2): 191-207

14 胡海岩, 王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展. 力学进展, 1999, 19(4): 501-512

15 赵艳影, 徐鉴, 严志刚. 时滞对非线性饱和控制减振频带漂移的影响. 力学学报, 2010, 42(4): 747-757

16 王在华, 李俊余. 时滞状态正反馈在振动控制中的新特征. 力学学报, 2010, 42(5): 933-942

17 Xu J, Chung K W. Dynamics for a class of nonlinear systems with time delay. *Chaos Soliton Fract*, 2009, 40(1): 28-49

18 Xu X. Complicated dynamics of a ring neural network with time delays. *J Phys A-Math Gen*, 2008, 41(3): 035102

19 Zhou J, Chen T. Synchronization in general complex delayed dynamical networks. *IEEE T Circuits-I*, 2006, 53(3): 733-744

20 Wang Q Y, Perc M, Duan Z S, et al. Synchronization transitions on scale-free neuronal networks due to finite information transmission delays. *Phys Rev E*, 2009, 80(2): 026206

21 Ying Z G, Zhu W Q. A stochastic optimal time-delay control for nonlinear structural systems. *Struct Eng and Mech*, 2009, 31(5): 621-624

22 董小娟, 徐伟. 含时滞项的双稳系统中平均首次穿越时间的研究. 动力学与控制学报, 2007, 5(4): 298-301

23 Johnson R S. Singular Perturbation Theory: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. New York: Springer-Verlag, 2004

24 Kervokian J, Cole J D. Perturbation Methods in Applied Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1981

25 钱伟长. 奇异摄动理论. 北京: 清华大学, 1980

26 化存才, 陆启韶. 一类时变分岔问题与 Duffing -van der Pol 振子. 力学与实践, 2001, 23(1): 24-26

27 Wang Q Y, Lu Q S. Time delay-enhanced synchronization and regularization in two coupled chaotic neurons. *Chinese Phys Lett*, 2005, 22(3): 543-546

28 Wang Q Y, Lu Q S, Chen G. Synchronization transition induced by synaptic delay in coupled fast-spiking neurons. *Int J Bifurcat Chaos*, 2008, 18(4): 1189-1198

29 Buric N, Rankovic D. Bursting neurons with coupling delays. *Phys Lett A*, 2007, 363(4): 282-289

30 刘华平, 孙富春, 何克忠, 等. 奇异摄动控制系统: 理论与应用. 控制理论与应用, 2003, 20(1): 1-7

31 Klimushev A I, Krasovskii N K. Uncertain asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter in the derivative terms. *J Appl Math Mec*, 1962, 25(9): 1011-1025

32 钟宁帆, 孙敏慧, 邹云. 奇异摄动系统的 H∞ 控制: 基于奇异系统的方法. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 701-706

33 Tikhonov A N. Systems of differential equations containing a small parameter multiplying the derivative. *Mat Sb*, 1952, 31(73): 575-586

34 Fenichel N. Asymptotic stability with rate conditions. *Indiana Univ Math J*, 1974, 23: 1109-1137

35 Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *J Diff Eqs*, 1979, 31(1): 53-98

36 Jones C K R T. Geometric Singular Perturbation Theory in Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1994

37 Schecter S. Exchange lemmas 1: Deng's lemma. *J Diff Eqs*, 2008, 245(2): 392-410

38 Danca M F, Wang Q Y. Synthesizing attractors of Hindmarsh-Rose neuronal systems. *Nonlinear Dynam*, 2010(62): 437-446

39 Diener F, Diener M. Sept formules relatives aux canards. *Comptes Rendus Acad Sci Paris*, 1983, 267: 577-580

40 Maesschalck P D, Dumortier F. Time analysis and entry-exit relation near planar turning points. *J Diff Eqs*, 2005, 215(2): 225-267

41 Neishtadt A I. On stability loss delay for dynamical bifurcations I. *J Diff Eqs*, 1987, 23(12): 2060-2067

42 Boudjellaba H, Sari T. Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow-fast predator-prey models. *J Diff Eqs*, 2009, 246(6): 2205-2225

43 Wang Z H, Hu H Y. Dimensional reduction for nonlinear time-delayed systems composed of stiff and soft substructures. *Nonlinear Dynam*, 2001, 25(4): 317-331

44 Cooke K L. The condition of regular degeneration for singularly perturbed linear differential-difference equations. *J Diff Eqs*, 1965, 1(1): 39-94

45 Coole K L, Meyer K R. The condition of regular degeneration for singularly perturbed systems of linear differential-difference equations. *J Math Anal Appl*, 1966, 14(1): 83-106

46 Magalhães L T. Convergence and boundary layers in singularly perturbed linear functional differential equations. *J Diff Eqs*, 1984, 54(3): 295-309
47 Artstein Z, Slemrod M. On singularly perturbed retarded functional differential equations. *J Diff Eqs*, 2001, 171(1): 88-109
48 Lange C, Miura R M. Singular perturbation analysis of boundary value problems for differential-difference equations. *SIAM J Appl Math*, 1982, 42(3): 502-531
49 Lange C, Miura R M. Singular perturbation analysis of boundary value problems for differential-difference equations II, rapid oscillations and resonances. *SIAM J Appl Math*, 1985, 45(5): 687-707
50 Lange C, Miura R M. Singular perturbation analysis of boundary value problems for differential-difference equations III, turning point problems. *SIAM J Appl Math*, 1985, 45(5): 708-734
51 Lange C, Miura R M. Singular perturbation analysis of boundary value problems for differential-difference equations V, small shifts with layer behavior. *SIAM J Appl Math*, 1994, 54(1): 249-272
52 Wazewska-Czyzewska M, Lasota A. Mathematical models of the red cell system. *Mat Stos*, 1976, 6(1): 25-40
53 Mackey M C, Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 1977, 197: 287-288
54 Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity. *Optics Commun*, 1979, 30(2): 257-261
55 Chow S N, Hale J L, Huang W. From sine waves to square waves in the singularly perturbed delay differential equations. *Proc Roy Soc Edinburgh*, 1992, 120A: 223-229
56 Hale J K, Huang W Z. Period doubling in singularly perturbed delay equations. *J Diff Eqs*, 1994, 114(1): 1-23
57 Adhikari M H, Coutsias E A, Mclver J K. Periodic solutions of a singularly perturbed delay differential equation. *Physica D*, 2008, 237(24): 3307-3321.
58 Chow S N, Huang W Z. Singular perturbation problems for a system of differential-difference equations I. *J Diff Eqs*, 1994, 112(2): 257-307
59 Das S L, Chatterjee A. Second order multiple scales for oscillators with large delay. *Nonlinear Dynam*, 2005, 39(4): 375-394
60 Pieroux D, Erneux T. Strongly pulsating lasers with delay. *Phys Rev A*, 1996, 53(4): 2765-2771
61 Zheng Y G, Wang Z H, The impact of delayed feedback on the dynamics of class-B lasers. *Int J Nonlinear Mech*, 2010, 45: 727-733
62 Lani-Wayda B, Schneider K R. Delayed loss of stability in nonautonomous differential equations with retarded argument. *SIAM JMath Anal*, 2005, 36(5): 1522-1539
63 Miyazaki R, Tchizawa K. Bifurcation delay in a delay differential equation. *Nonlinear Anal*, 2005(5-7), 63: 2189-2195
64 Zheng Y G, Wang Z H. Delayed Hopf bifurcation in time-delayed slow-fast systems. *Sci China Tech Scis*, 2010, 53(3): 656-663
65 郑远广. 含时滞的奇异摄动系统的非线性动力学: [博士学位论文]. 南京: 南京航空航天大学, 2009.69-86
66 Zhao H Y, Xie W. Hopf bifurcation for a small-world network model with parameters delay feedback control. *Nonlinear Dynam*, 2011, 63(3): 345-357

CNKI 优先出版编码: lxjz2009-019

ADVANCES IN DYNAMICS OF SLOW-FAST SYSTEMS WITH TIME DELAY*

ZHENG Yuanguang[1] WANG Zaihua[1,2,†]

[1] State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China
[2] Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China

Abstract Modern mechanical systems tend to adopt light flexible materials, and thus involve state variables with different time scales. Taking the unavoidable delay in control path into consideration, such kind of systems can be modeled as slow-fast system with time delay. In this paper, some basic facts of slow-fast systems are given firstly. Then, advances in the nonlinear dynamics of slow-fast systems with time delay are presented. And finally, several problems for future investigation are suggested.

Keywords slow-fast system, time delay, singular perturbation, slow manifold, bifurcation

* The project supported by the Foundation for the Author of National Excellent Doctoral Dissertation of China (200430), National Science Foundation for Distinguished Young Scholars (10825207), and Key Program of National Natural Science Foundation of China (10532050, 11032009)
† E-mail: zhwang@nuaa.edu.cn