



# 弹性大变形问题中的应力状态描述、 奇异性问题和余能原理\*

高玉臣 金明<sup>†</sup> 兑关锁

北京交通大学土建学院力学所, 北京 100044

**摘要** 对弹性大变形理论中的 3 方面问题进行了综述. 首先, 对各种应变度量的共轭应力进行综述. 大变形问题引起的应力状态描述的复杂性引起了许多学者的兴趣, 对这个问题的研究也促进了大变形弹性理论的发展. 在各种特定问题中, 人们提出了不同的应力张量来描述应力状态, 如 Cauchy 应力张量、第一类和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量以及 Jaumann 应力张量等. 最近, 第一作者提出了“基面力”的概念, 可以描述不同应力张量的一些共同本质特征; 和其它应力张量相比, 用“基面力”描述应力状态更清晰、更容易理解. 以“基面力”为出发点, 对应力状态的各种描述进行了讨论和比较, 给出了在各种边界条件下, 用“基面力”表示的控制方程.

其次, 综述了大变形弹性力学中一些奇异性问题, 包括橡胶类材料的裂纹和缺口尖端的应力奇异性、集中力作用点处的应力奇异性以及楔体接触的奇异性问题. 介绍用“基面力”的概念求解应力奇异性指数的方法, 并和已有的研究结果进行比较.

最后, 回顾大变形弹性问题中余能原理的研究进展. 此问题已经困扰着人们近百年. 介绍了用“基面力”所描述的一种余能原理.

**关键词** 大变形弹性理论, 基面力, 奇异性问题, 余能原理

## 1 引言

### 1.1 共轭应力

连续介质力学中的基本概念——应力张量是由 Cauchy 在 180 多年前提出的. 此后, 对于不考虑变形变化历史的力学问题, 如固体力学中的小变形问题和流体力学问题等, 应力状态的描述就已是十分清楚的概念了. 但是, 对于固体力学中的弹性大变形问题, 由于物质微元的变形较大, 必须考虑初始构形和当前构形的差别, 这就导致应力状态描述的复杂性. 目前, 人们经常使用 3 种应力张量, 即 Cauchy 应力张量, 第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量. 在初始构形或当前构形上, 采用不同的物质单元、不同的基矢量来计算力的分量, 可获得以上 3 种应力

张量的直观定义. 除了这 3 种应力张量的直观定义外, 还可通过弹性应变能对不同种类应变张量求导, 给出许多应力张量的解析定义, 如 Biot 应力张量. 下面简要介绍这些应力张量.

在连续介质力学中, 变形梯度  $\mathbf{F}$  是确定变形状态的一个基本的张量. 由极分解定理, 存在唯一的对称正定张量  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$ , 和正交张量  $\mathbf{R}$ , 满足

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  分别称为右伸长张量和左伸长张量,  $\mathbf{R}$  称为转动张量. 由于  $\mathbf{U}$  是对称正定的, 所以有  $\mathbf{U} = \lambda_{(i)} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i$ , 式中  $\lambda_{(i)}$  和  $\mathbf{g}_i$  分别为  $\mathbf{U}$  的主伸长和与之对应的一组正交的单位特征向量. Hill<sup>[1]</sup> 曾

收稿日期: 2011-01-10, 修回日期: 2010-01-15

\* Applied Mechanics Review 惠允版权翻译此文 (Published with kind permission from Applied Mechanics Review Volume 61 © 2008). 国家自然科学基金 (90205007)、教育部博士点基金 (20030004003)、国家 973 项目 (2010CB7321004)、中国科学院非线性力学国家重点实验室开放课题 (LNM201003) 和“北京市固体力学重点学科建设”项目资助

<sup>†</sup> E-mail: jinmingjinming@hotmail.com

引入了一类应变度量, 现在被人们称为 Hill 应变

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = f(\lambda_{(i)})\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i \quad (2)$$

其中  $f()$  为光滑的、单调递增的标量函数, 且满足  $f(1) = 0$  和  $f'(1) = 1$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{U})$  是一种 Lagrangean 型应变. Seth<sup>[2]</sup> 引入了一类应变度量  $\mathbf{E}_m$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m &= \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \mathbf{E}_0 &= \ln \mathbf{U}, \quad m = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{I}$  为二阶单位张量. 当 Hill 应变 (2) 中的

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda^m - 1), & m = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \ln \lambda, & m = 0 \end{cases} \quad (4)$$

时, Hill 应变就化为式 (3). 所以,  $\mathbf{E}_m$  为 Hill 应变中的一类. 式 (3) 中  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_{-2}$  和  $\mathbf{E}_0$  分别称为名义应变或 Biot 应变、Green 应变、Almansi 应变和对数应变. 郭仲衡等<sup>[3]</sup> 称  $\mathbf{E}_m$  为 Seth-Hill 应变或 Seth 应变.

下面的应变度量称为 Doyle-Ericksen 应变

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m &= \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{I}), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \mathbf{G}_0 &= \ln \mathbf{V}, \quad m = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{G}_{-2}$  和  $\mathbf{G}_0$  分别称为 Eulerian 应变和 Hencky 对数应变或 Hencky 应变.

根据 Hill<sup>[1]</sup> 提出的定义, 一个应力张量  $\mathbf{T}^{(m)}$  称为与一个应变张量  $\mathbf{E}_m$  共轭, 若  $\mathbf{T}^{(m)} : \dot{\mathbf{E}}_m$  表示外力对当前构型上单位体积物质上所作的功对时间的导数, 即

$$\dot{w} = \mathbf{T}^{(m)} : \dot{\mathbf{E}}_m \quad (6)$$

式中  $(\cdot)$  代表  $(\ )$  对时间的导数,  $w$  为外力对当前构型上单位体积物质上所作的功. 特别地,  $\mathbf{T}^{(1)}$  称为 Biot 应力张量、名义应力张量或 Jaumann 应力张量;  $\mathbf{T}^{(2)}$  和  $\mathbf{T}^{(-2)}$  分别称为第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量和加权对流应力张量.

一些 Seth-Hill 应变的共轭应力的张量表示是众所周知的, 如:

(1) 应变  $\mathbf{E}_2$  的共轭应力, 即第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量可表示为

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (7)$$

式中  $\boldsymbol{\sigma}$  为 Cauchy 应力张量,  $J$  为变形后与变形前的体积比,  $\mathbf{F}^{-1}$  为变形梯度  $\mathbf{F}$  的逆.

(2) 名义应变或 Biot 应变  $\mathbf{E}_1$  的共轭应力, 即 Jaumann 应力张量或 Biot 应力张量可表示为

$$\mathbf{T}^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}^{(2)}) \quad (8)$$

(3) Almansi 应变  $\mathbf{E}_{-2}$  的共轭应力, 即加权对流应力张量可表示为

$$\mathbf{T}^{(-2)} = J\mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \quad (9)$$

(4) 应变  $\mathbf{E}_{-1}$  的共轭应力, 由郭仲衡等<sup>[3]</sup> 引入, 可表示为

$$\mathbf{T}^{(-1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}^{(-2)} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{(-2)}) \quad (10)$$

(5) 对数应变  $\mathbf{E}_0$ , 即  $\ln \mathbf{U}$  的共轭应力, 由 Hoger 引入, 表达式见文献 [4].

另外, 由关系

$$\mathbf{T}^{(-m)} = \mathbf{U}^m \cdot \mathbf{T}^{(m)} \cdot \mathbf{U}^m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

可知, 无须分别对正负  $m$  都给出  $\mathbf{T}^{(m)}$  的抽象表示.

当  $m \geq 3$  时, 已有许多学者对任意 Seth-Hill 应变  $\mathbf{E}_m$  所对应的共轭应力  $\mathbf{T}^{(m)}$  的不变性表示进行了研究. 郭仲衡等<sup>[3,5]</sup> 利用张量方程推导了其显式张量公式; 对具有任意特征根的右伸长张量  $\mathbf{U}$ , Xiao<sup>[6]</sup> 给出了共轭应力  $\mathbf{T}^{(m)}$  的统一不变性表示公式. 兑关锁等<sup>[7,8]</sup> 提出了另一类应力  $\mathbf{T}^{(m)}$  的显式表示公式, 其表示仅含有  $\mathbf{U}^m$  标准表示的系数; 利用 Hill 主轴法, Farahani 等<sup>[9]</sup> 给出了与 Seth-Hill 应变  $\mathbf{E}_m$  相关的两个共轭应力分量间的关系.

关于对数应变  $\ln \mathbf{U}$  的共轭应力  $\mathbf{T}^{(0)}$ , 除 Hill<sup>[10,11]</sup> 和 Hoger<sup>[4]</sup> 的研究工作外, 近些年还有一些研究工作. 把  $\mathbf{T}^{(0)}$  作为  $\mathbf{T}^{(m)}$  的一种特殊情况, 对具有任意特征根的右伸长张量  $\mathbf{U}$ , Xiao<sup>[6]</sup> 给出共轭应力  $\mathbf{T}^{(m)}$  的统一不变性表示; Farahani 等<sup>[12]</sup> 也得到了关于  $\mathbf{T}^{(0)}$  的一些关系; 最近, 兑关锁<sup>[13]</sup> 基于 6 种不同的方法系统地研究了  $\mathbf{T}^{(0)}$  的不变表示形式.

对式 (2) 的一般应变度量, Hill<sup>[1,11]</sup> 曾给出了共轭应力分量的表示形式; 随后, 郭仲衡等<sup>[14]</sup> 和 Scheilder<sup>[15]</sup> 推导出共轭应力更紧凑的表达形式; 对具有任意特征根的右伸长张量  $\mathbf{U}$ , Xiao<sup>[6]</sup> 给出了一种统一的不变表示形式. 利用 Hill 主轴法, Farahani 等<sup>[12]</sup> 给出了不同 Hill 应变共轭应力之间的关系. 对于式 (2) 中一般形式的 Hill 应变,

尽管其共轭应力表达式很复杂, 但如何用坐标无关的形式来表达的问题已基本解决.

对于 Hill 应变, 存在的共轭应力, 人们自然会想到对式 (5) 中 Doyle-Ericksen 应变, 也可能存在共轭应力. 但 Ogden<sup>[16,17]</sup> 曾证明, 对 Doyle-Ericksen 应变, 如果用物质导数, 一般并不存在共轭应力.

对于式 (5) 中以左伸长张量表示的 Hencky 对数应变  $\ln \mathbf{V}$ , Ogden<sup>[16,17]</sup> 和 Hoger<sup>[4]</sup> 曾用不同的方法证明, 如果用物质导数, Hencky 对数应变  $\ln \mathbf{V}$  并不存在共轭应力; Lehmann 等<sup>[18]</sup> 提出了一种客观导数代替物质导数的方法, 使得 Cauchy 应力与 Hencky 对数应变  $\ln \mathbf{V}$  共轭; Lehmann 等<sup>[19]</sup> 给出了 Hencky 对数应变  $\ln \mathbf{V}$  共轭应力的一类抽象表示形式. 利用 Kronecker 张量积关系, Nicholson<sup>[20]</sup> 进一步研究了 Hencky 对数应变  $\ln \mathbf{V}$  的共轭应力. 因此, Doyle-Ericksen 应变的共轭应力如何? 仍然是一个没有搞清楚的问题.

如此多的应力定义使问题变得非常复杂. 事实上, 这些定义应源自同一物理本质. 下面几个问题值得思考:

(1) 是否真正需要引进如此多的应力张量来描述一点的应力状态?

(2) 是否存在比各种应力张量更简捷的概念?

(3) 不同应力张量间的内在关系如何?

(4) 应力张量的表示能否摆脱坐标系?

高玉臣<sup>[21,22]</sup> 提出了“基面力”的概念. 利用“基面力”可以构造一些不同的应力张量. 这说明不同的应力张量具有某些共同的结构. 因此, 利用“基面力”可以使应力张量的结构变得更清晰. 作为一个比喻, 对于应力状态来说, 各种应力张量就像同一个人身上穿的不同衣服. 利用“基面力”, 弹性大变形问题的控制方程, 如平衡方程、边界条件和本构关系, 可以表示成很简捷的形式. 因而, 从这个角度来说, 不同应力张量可以用“基面力 (base forces)”来代替.

此外, 在求解具体问题的时, “基面力”为我们提供了一个很好的工具. 例如, 利用“基面力”, 高玉臣等<sup>[21~47]</sup> 研究了一系列困扰人们多年的问题, 详细综述见 1.2 节和 1.3 节.

第 2 部分将回顾 Cauchy 应力、第一类和第二类 Piola-Kirchhoff 应力分量的直观定义. 第 3 部分介绍“基面力”的概念及其性质.

## 1.2 一些奇异性问题

### 1.2.1 裂纹或缺口尖端场

众所周知, 裂纹或缺口尖端附近的应变是奇异的, 就是说, 和远场的应变相比, 尖端附近的应变趋于无穷大. 由于橡胶类材料可以发生很大的弹性变形, 所以, 要分析这类材料的裂纹或缺口尖端附近的应变分布情况, 就不能以弹性小变形理论为基础. 在这种情况下, 几何非线性和物理非线性这两种非线性因素使问题的分析变得十分复杂. 寻找裂纹尖端的渐近解是考虑大应变的断裂力学中的一个基本问题. 第一次用精确的非线性有限变形弹性理论处理裂纹问题是 Wong 等<sup>[48]</sup> 的工作. 之后, 这个问题引起了许多学者兴趣. Knowles<sup>[49,50]</sup> 和 Sternberg<sup>[51,52]</sup> 对他们自己在裂纹尖端渐近性质方面的研究工作曾做过详细的综述. Abeyaratne<sup>[53]</sup> 对 II 型裂纹和 I 型界面裂纹的渐近性质的研究情况也做过详细的综述. 下面介绍最近的研究进展.

#### 1.2.1.1 I 型裂纹

##### (i) 平面应变问题

##### (1) 可压缩材料

对于可压缩的 Blatz-Ko 材料中平面应变 I 型裂纹问题, Knowles 和 Sternberg<sup>[54]</sup> 最早进行了系统的分析. 分析结果表明, 裂纹尖端处于单向拉伸状态, 但是这些分析结果不完善. 后来 Knowles 和 Sternberg<sup>[55]</sup> 为改进他们的分析结果, 又进行了繁琐的二次渐近分析. Lund 和 Westmarm<sup>[56]</sup> 的有限元计算结果证实了 Knowles 和 Sternberg<sup>[54,55]</sup> 的二次渐近分析结果. 对于可压缩的 Blatz-Ko 材料, Fowler<sup>[57]</sup> 指出, 由于椭圆条件得不到满足, 会从裂纹尖端出现一条“静弹性激波带 (elastostatic shocks)”, 在这个激波带附近, 位移梯度和应力都是不连续的.

高玉臣<sup>[23,30]</sup> 曾建议用两类形式的应变能密度函数来描述橡胶类材料的本构关系. 按照这两类形式的应变能密度函数, 提出了一种分区的方法来求解裂纹尖端的渐近特征. 高玉臣<sup>[32]</sup> 指出, Knowles 和 Sternberg 的渐近解与高玉臣等得到的渐近解<sup>[23,29,30]</sup> 具有相同的性质, 即裂纹尖端都是处于单向拉伸状态. 对一种 Hadamard 型材料中的裂纹, Le<sup>[57]</sup> 给出了一个渐近分析结果.

对于可压缩的 Blatz-Ko 材料, Betra 等<sup>[59]</sup> 用有限元法分析了一个椭圆型空穴和一个在边缘的

半个椭圆型空穴附近的应变场. 他们的计算结果表明, 空穴附近的应力, 主伸长是有限的, 而应力集中系数与远场的拉力有关.

### (2) 不可压缩材料

对于不可压缩的 neo-Hookean 材料, Knowles<sup>[60]</sup> 得到了 I 型裂纹尖端场的渐近解. Wang 等<sup>[61]</sup> 利用有限元法计算了 Mooney 材料中 I 型裂纹的 J 积分. Stephenson<sup>[62]</sup> 研究了一类材料中 I 型裂纹尖端场的理论解, Mooney-Rivlin 材料是其中之一. Abeyaratne 等<sup>[63]</sup> 得到了一类不可压缩强化材料的解, 在这个解中存在两条“静弹性激波带 (elastostatic shock)”, 这两条激波带源自裂纹尖端; 在这两条激波带的两侧应力和位移梯度发生突变. 用有限元法, Quigley 等<sup>[64]</sup> 证实了 Knowles<sup>[60]</sup> 和 Stephenson<sup>[62]</sup> 的渐近解. 用 Fowler<sup>[57]</sup> 建议的一种不可压缩材料的应变能函数, Hao<sup>[65]</sup> 研究了面内裂纹尖端附近的力学行为.

### (3) 缺口尖端

当顶端角度趋于零时, 缺口就退化为裂纹. 所以, 缺口尖端的应力场是断裂力学中的一个基本问题. 用高玉臣<sup>[23,30]</sup> 建议的两类应变能密度函数, 高玉臣及其合作者<sup>[26,27,45]</sup> 得到了不可压缩和可压缩材料缺口尖端应力场. 用这两类应变能函数得到的结果具有共同的特点.

### (4) 界面裂纹

对 Knowles 和 Sternberg<sup>[54]</sup> 建议的一种可压缩材料的应变能函数, Herrmann<sup>[66]</sup> 得到多种渐近形式的变形, 每个解都满足平面应变状态下平衡方程. 为改进其渐近解, Herrmann<sup>[67]</sup> 对文献 [66] 的变形结果进行了“二阶渐近处理 (a second-order treatment)”. 高玉臣等<sup>[24]</sup> 分析的结果表明, 若考虑大变形, 就会消除裂纹尖端的应力振荡奇异性.

对 Knowles 和 Sternberg<sup>[54]</sup> 和高玉臣<sup>[23,30]</sup> 中所建议的几种本构关系, 高玉臣<sup>[40]</sup> 比较了解的结构, 发现这些解具有共同的特点. 但对界面裂纹尖端处的应力状态而言, 高玉臣<sup>[23,30]</sup> 所建议的两种本构关系存在差异. 基于高玉臣在文献 [30] 中提出应变能函数, 界面裂纹尖端处于单向拉伸状态, 而基于高玉臣在文献 [23] 中提出的应变能函数, 界面裂纹尖端并不是单向拉伸状态.

### (5) 一般理论

在任意载荷作用下, Le 等<sup>[68]</sup> 对一类 Ogdenball 可压缩橡胶类材料的平面应变裂纹问题进行了讨论, 他们认为各种情况下的裂纹尖端变形奇

异场只相差一个刚体旋转项. 文献 [68] 中还对裂纹尖端场的渐近解的研究情况进行了详细综述.

### (ii) 平面应力问题

由于厚度方向的收缩, 平面应力状态下的裂纹尖端应力场的分析比平面应变状态下的要复杂得多.

#### (1) 可压缩材料

高玉臣等<sup>[25]</sup> 得到了平面应力问题在扩展区的解, 这个解也适用于一类平面应变问题<sup>[23]</sup>, 但不适用于两种材料的界面裂纹问题. Tarantino<sup>[69]</sup> 得到了可压缩 Mooney-Rivlin 超弹性薄膜中的一个 Airy 应力函数, 并计算了裂纹尖端应力奇异场. Tarantino<sup>[70]</sup> 还得到了可压缩 neo-Hookean 材料中缺口尖端的一个渐近解. 对高玉臣<sup>[30]</sup> 建议的一类形式比较简单的应变能函数, 高玉臣等<sup>[37]</sup> 得到了一个渐近解. 对 neo-Hookean 材料, Legrain 等<sup>[71]</sup> 用广义有限元法 (extended finite element method)——一种无网格方法, 给出了裂纹尖端应力场渐近性质的数值解.

#### (2) 不可压缩材料

对处于双向拉伸应力状态的 neo-Hookean 材料, Wong 等<sup>[48]</sup> 在渐近解框架的基础上, 得到了在无穷远处双向拉伸平面应力问题的一个近似的全场解, 这个解和实验结果吻合得很好.

对不可压缩广义 neo-Hookean 材料薄膜, Geubelle 等<sup>[72]</sup> 给出了裂纹尖端应变和应力的一个渐近解, 这个解可以用有限元法加以验证.

#### (3) 缺口尖端

对高玉臣<sup>[23]</sup> 建议的一类应变能函数, 高玉臣等<sup>[44]</sup> 将缺口尖端分为扩张区和收缩区, 得到了薄膜缺口尖端应力应变场的渐近解. 对于不可压缩 neo-Hookean 薄膜材料中的缺口尖端应力场, Tarantino<sup>[73]</sup> 给出了一个渐近解.

#### (4) 界面裂纹

对两种性质不同的 neo-Hookean 薄膜材料的界面裂纹, Knowles 等<sup>[74]</sup> 构造了应力和位移的渐近场. Ravichandran 等<sup>[75]</sup> 用有限元法验证了 Knowles 等<sup>[74]</sup> 的解. Geubelle 等<sup>[76]</sup> 给出了广义 neo-Hookean 薄膜材料中裂纹尖端应力应变奇异场的一个渐近解, 并用有限元法进行了验证. Geubelle<sup>[77]</sup> 对广义 neo-Hookean 薄膜材料模型的渐近解、数值解和实验结果进行了归纳总结. Ru<sup>[78]</sup> 的分析结果表明, 不论载荷形式如何, 变形后裂纹面间的张开角总是  $180^\circ$ . 对可压缩的调和

型材料, Ru<sup>[79]</sup> 用复变函数方法得到了界面裂纹的一个全场解.

### 1.2.1.2 II 型裂纹

Knowles<sup>[80]</sup> 和 Stephenson<sup>[62]</sup> 的分析结果都表明, 与线弹性情况相比, II 型裂纹的有限变形场具有一些特殊性质. 例如, 即便载荷关于裂纹面是对称的, 裂纹面在裂纹尖端也是对称地张开的. 对具有半个椭圆缺口的 Blatz-Ko 材料半平面, Batra 等<sup>[59]</sup> 的有限元计算结果表明, 在缺口尖端应力和主伸长是有限值, 并且应力集中系数依赖于远场载荷的大小.

### 1.2.1.3 混合型裂纹

对高玉臣<sup>[23]</sup> 建议的一种可压缩材料的应变能函数, 高玉臣等<sup>[29]</sup> 的分析结果显示, 即使在复杂载荷作用下, 裂纹尖端仍处于单向拉伸应力状态. 对于可压缩的调和型材料, Ru<sup>[81]</sup> 用二阶渐近方法, 分析了两种材料缺口的变形, 分析结果表明缺口尖端的张开角不论载荷形式如何, 总是 180°. 用高玉臣<sup>[30]</sup> 建议的一种应变能函数, 高玉臣等<sup>[46]</sup> 用渐近方法和有限元法分析了可压缩材料在平面应变状态下的混合型裂纹的渐近性质. 分析结果表明, 既使是在纯剪切状态下, 裂纹尖端仍处于单向拉伸状态, 只是拉伸的方向有一定的旋转. 对可压缩调和型材料, Ru<sup>[82]</sup> 的分析结果表明, 在混合型裂纹尖端有一条局部的非椭圆性的变形带 (nonelliptical deformation bend).

### 1.2.1.4 扩张区和收缩区

尽管 Knowles 和 Sternberg<sup>[54]</sup> 最早对 Blatz-Ko 材料的裂纹问题进行了系统的分析, 但他们的分析并不完善. 后来, Knowles 和 Sternberg<sup>[55]</sup> 又进行了二阶近似分析来改进分析结果. Herrmann<sup>[66,67]</sup> 用相同的方法分析了界面裂纹问题. 他们的分析过程都非常繁琐, 论文的篇幅也很长. 关于这个问题的进一步评述见本文 4.1 节. 后来, 许多学者用不同的弹性本构模型对上述问题进行了类似的研究<sup>[47,62,68,70,72~76,78,82]</sup>. 这些论文的篇幅都很长.

高玉臣等<sup>[23,30]</sup> 提出了分区的解法, 改进了裂纹尖端渐近分析方法. 为了证明分区方法的必要性, 高玉臣等<sup>[23~27,29,30,32,35,37,44~47]</sup> 用不同的本构模型对一系列裂纹和缺口问题的奇异性进行了分析. 结果表明, 在裂纹尖端和缺口尖端都存在扩张区和收缩区. 所以, 分区方法是十分必要的. 对不同的弹性本构模型, 渐近解的主项是相同的. 而

忽略扩张区的其它解法都有矛盾.

### 1.2.2 集中力

集中力作用下的半平面线弹性问题, 即著名的 Boussinesq 问题, 已由 Boussinesq 解决<sup>[83]</sup>. 但是直到最近, 其非线性问题才由 Simmonds 等<sup>[84]</sup> 开始研究. Warne 等<sup>[85]</sup> 曾进行过详细的综述.

#### 1.2.2.1 拉力情况

Simmonds 等<sup>[84]</sup> 研究了一个受拉力  $P$  作用的弹性半空间 ( $z \geq 0$ ), 见图 1. 他们采用了两种应变能函数, 一种是广义 neo-Hookean 模型或称 Knowles 幂次模型<sup>[86]</sup>, 其应变能的表达式为

$$U = \frac{1}{2b} \left\{ \left[ 1 + \frac{b}{n}(I - 3) \right]^n - 1 \right\} \quad (12)$$

式中  $I$  是右 Cauchy-Green 应变张量的第一不变量,  $b$  和  $n$  是材料常数.

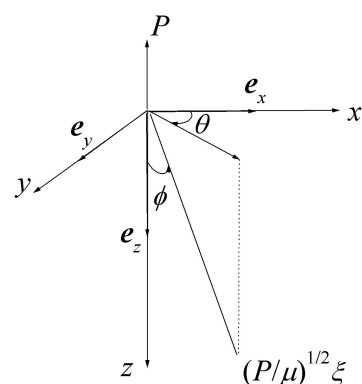


图 1 拉力作用下的弹性半空间

为了描述变形, 使用无量纲化的球坐标系  $\xi, \phi$  和  $\theta$  作为初始构形上的坐标, 这样就有

$$(x, y, z) = \sqrt{\frac{P}{\mu}} \xi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \quad (13)$$

式中  $P$  是拉力、 $\mu$  是剪切模量. 变形后, 位置向量  $\bar{\rho}$  由下列柱坐标系表示

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\xi, \phi) \mathbf{e}_r(\theta) + \bar{\xi}(\xi, \phi) \mathbf{e}_z \quad (14)$$

式中

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta \quad (15)$$

式中  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  分别是  $x, y$  方向上的单位向量.

当  $\xi \rightarrow 0$  时, 假设渐近解的映射函数为

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \xi^\alpha F(\phi) + o(\xi^\alpha) \\ \bar{\xi} &= \xi^\beta G(\phi) + o(\xi^\beta) \end{aligned} \quad (16)$$

经过分析和计算, 可得渐近解

$$\begin{aligned} G &= G_0 = \frac{1}{\beta} \left( \frac{n^{n-1}}{2\pi b^{n-1}} \right)^{\frac{1}{2n-1}} \\ F &= \frac{2}{\sqrt{\beta G_0}} \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\beta = \frac{2n-3}{2n-1}, \quad \alpha = \frac{2n}{2n-1} \quad (18)$$

由于  $\beta > 0$ , 方程 (18) 要求  $n > \frac{3}{2}$ .

Simmonds 等<sup>[84]</sup>的分析结果表明, 在拉力作用点附近, 材料是处于单向拉伸状态的. 进一步分析表明, 对于 Blatz-Ko 材料不存在映射函数 (16) 的渐近解, 就是说, Blatz-Ko 材料不能承受拉力. Knowles<sup>[86]</sup>的分析结果表明, 当材料足够刚硬时, 广义 neo-Hookean 材料能够承受拉力的作用.

以高玉臣建议的应变能函数<sup>[23]</sup>为基础, 高玉臣等<sup>[28]</sup>分析了一个拉力作用下的橡胶锥体, 当锥体的锥角为  $180^\circ$  时, 问题就变成 Simmonds 等考虑的问题<sup>[84]</sup>. 详细的综述见 4.2 节.

对几种各向同性可压缩和不可压缩超弹性材料弹性半空间受拉力的情况, Warne 等<sup>[87,88]</sup>给出了有限变形问题的渐近解.

超弹性材料能否受拉力是一个有趣的问题. 为确定可压缩超弹性材料能否承受拉力而发生有限位移, Warne 等<sup>[85]</sup>对一系列应变能函数进行了渐近分析. 分析结果表明, 只要对材料常数加以一定的限制, Antman<sup>[89]</sup>和高玉臣等<sup>[30]</sup>建议的本构模型可以承受拉力. 但另一些本构模型不能承受拉力, 其中包括一类特殊的 Hadamard 材料、广义 Blatz-Ko 材料、广义 Hadamard 材料、高玉臣<sup>[23]</sup>建议的一种本构模型以及一种生物材料的本构模型.

### 1.2.2.2 压力情况

如 Simmonds 和 Warne 等<sup>[84,85]</sup>的观点, 对于集中压力作用下的弹性半空间, 大变形问题仍是一个没有解决的问题. 小变形情况的问题比较简单, 只要将拉力问题的解加一个负号便得到压力问题的解. 但对于大变形, 这两种情况是完全不同的两种问题.

对高玉臣<sup>[23]</sup>建议的一种应变能函数, 高玉臣<sup>[36]</sup>分析了这种受压情况下的非线性 Boussineq 问题. 分析结果表明, 在压力附近, 应力场中存在扩张区和收缩区, 并给出了渐近解. 详细综述见 4.

2 节. 对在压力作用下的几种不可压缩材料的弹性半空间, Lee 等<sup>[90]</sup>给出了渐近解.

### 1.2.3 角点接触问题

线弹性材料的光滑表面接触问题是由 Hertz 解决的<sup>[91]</sup>, 这是接触问题的第一个理论解. 两个光滑表面的一般接触问题可由积分方程法和有限元法来解. 但角点接触问题却不能在有限元理论的框架下来求解. 这是因为, 在小变形弹性理论的模型中, 角点接触不是一个面, 而只是一个点. 所以, 求解角点接触问题时, 只有大变形理论才有效. Aleksandrov 等<sup>[92]</sup>用渐近方法求解了楔形体与任意形状基础的接触问题. 用 Wiener-Hopf 方法, Kipnis 等<sup>[93]</sup>求解了受任意形状刚性楔体作用的弹性楔体问题. Filippova<sup>[94]</sup>分析了有预应力的不可压缩 neo-Hookean 材料受光滑刚性楔作用的三维接触问题.

平面应变状态下, 橡胶缺口和刚性楔的接触问题是一个基本问题. 对于可压缩的橡胶材料, 用高玉臣建议的本构模型<sup>[23,30]</sup>, 高玉臣等<sup>[34,41]</sup>给出了渐近解. 这个解说明, 在橡胶缺口附近, 存在扩张区和收缩区. 对于 Knowles 等<sup>[53]</sup>建议的一种可压缩橡胶材料的本构模型, 高玉臣等<sup>[43]</sup>也给出了一个渐近解, 这个解和有限元的计算结果一致. 和文献<sup>[34]</sup>的结果类似, 变形后, 在橡胶缺口同样存在着扩张区和收缩区.

另外一个基本问题是三维情况下的角点接触问题. 用高玉臣<sup>[23]</sup>建议的本构模型, 高玉臣等<sup>[38,39]</sup>给出了轴对称情况下的一个渐近解. 在这类问题的变形场中, 都存在着扩张区和收缩区. 关于这类问题的详细综述, 见 4.3 节.

## 1.3 余能原理

在上述问题中, “基面力” 可以作为一种可以选择的求解工具. 与小变形情况类似, 可以建立弹性大变形的势能原理, 没有任何困难. 当采用基面力  $\mathbf{T}^i$  和位移梯度  $\mathbf{u}_i$  时, 势能原理的表达形式还可以变得非常简捷<sup>[21,22]</sup>.

但对弹性大变形问题, 情况就大不一样, 是否存在像小变形情况中以应力为独立变量的余能原理? 从上世纪初提出这个问题以来, 人们提出了多种形式的余能原理<sup>[95~108]</sup>, 但都存在矛盾. 至今仍未给出余能原理的适当表达形式. 正如 Levinson<sup>[97]</sup>指出的, 利用第二类 Piola-Kirchhoff 应力作为基本未知量, 不可能建立和小变形情况类

似的大变形余能原理, 其原因是公式中包含一个“令人讨厌”的项. 尽管如此, Levinson<sup>[97]</sup> 仍给出了一个种新的大变形余能原理. 在这个余能原理中, 他采用了第一类 Piola-Kirchhoff 应力  $\tau$  为基本未知量. 然而, Levinson<sup>[97]</sup> 未证明这类应力的共轭量, 即变形梯度  $F$ , 可以唯一地通过第一类 Piola-Kirchhoff 应力  $\tau$  表示出来. Veubeke<sup>[100]</sup> 基于变形梯度张量极分解定理, 建立了一种余能原理, 在余能泛函中仅含有应力和刚体转动项. 但 Veubeke<sup>[100]</sup> 的余能泛函仍不是一种纯余能原理. Ogden<sup>[102]</sup> 讨论了表示这种刚体转动的可能性和唯一性, 并给出了若干限制条件. 但是这些限制条件似乎是不正确的, 因为确定主轴的方位并不等价于确定单元的转轴的方位. Gao<sup>[106~110]</sup> 对余能原理进行了研究. Gao 等<sup>[106]</sup> 讨论了 Levinson<sup>[97]</sup> 称之为“令人讨厌”的项, 并且称它为“裂隙函数”, 其后, 在文献<sup>[107]</sup>中, 将“裂隙函数”通过第一类和第二类 Piola-Kirchhoff 应力表示了出, 从而消除了位移项, 得到了一种余能原理. 然而, 该原理中包含着第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量的逆, 这是很难求得的且有可能不存在. 此外, Gao<sup>[107]</sup> 的余能公式与线弹性情况也不相似.

为了消除现有各种弹性大变形的余能原理中存在的矛盾, 高玉臣<sup>[42]</sup> 采用“基面力”作为状态变量, 来代替第一、二类 Piola-Kirchhoff 应力张量, 建立了一种余能原理. 使含有转动的变形梯度可由“基面力” $T^i$  唯一确定, 此原理将在第 5 节中作简要介绍.

## 2 三种应力张量的直观定义

Cauchy 应力张量、第一类和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量的直观定义已在许多教科书中给出<sup>[16,17,21,111~124]</sup>. 为了系统阐述本文的主要观点, 下面对这应力的定义做一简要概述.

### 2.1 Cauchy 应力张量的分量

早期, 人们对应力张量的定义强调其分量, 一般采用笛卡尔坐标系. 让我们考虑一个物体的当前构形. 用  $x^i (i=1, 2, 3)$  表示当前构形的笛卡尔坐标系,  $e_i$  表示沿坐标轴的单位矢量. 为了描述某一点的应力状态, 我们围绕此点取一个正六面体微元, 这个点的矢径用  $Q$  表示, 在当前构形上, 正六面体的边长记为  $dx^1, dx^2, dx^3$ , 见图 2.

我们用  $d\sigma^i$  表示作用在正六面体 3 个正侧面

上的力, 用  $\sigma^i$  表示此 3 个正侧面上的应力, 则

$$\sigma^i = \frac{d\sigma^i}{dx^{i-1}dx^{i+1}} \quad (19)$$

式中约定指标满足  $3+1=1, 1-1=3$ . 此外, 用  $\sigma^{ji}$  表示  $\sigma^i$  在  $e^j$  方向的分量. 即

$$\sigma^i = \sigma^{ji}e_j \quad (20)$$

$\sigma^{ji}$  称为 Cauchy 应力张量的分量.  $\sigma^{ji}$  完整表达了  $Q$  点应力状态.

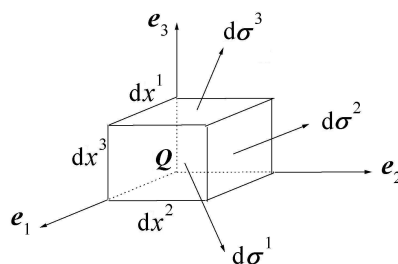


图 2 当前构形的正六面体微元

### 2.2 第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量的分量

对于大变形固体, 应该区分当前构形和初始构形. 考虑一个物质点, 在初始构形中用位置矢量  $P$  表示, 包含该点的正六面体微元见图 3.

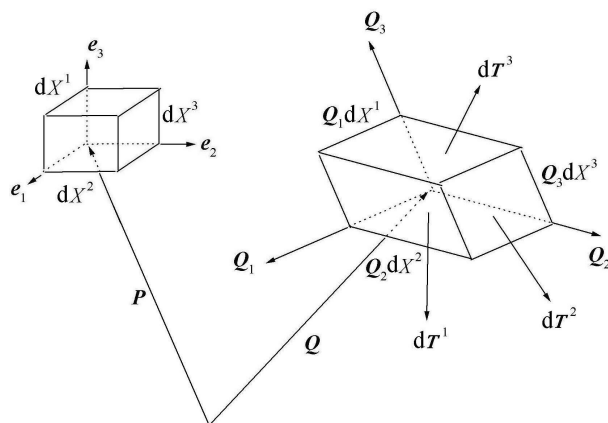


图 3 当前构形的平行六面体微元 (其原来形状是正六面体)

用笛卡尔坐标  $X^i$  表示正六面体微元边长.  $e_i$  表示沿  $X^i$  方向的单位矢量, 则  $e_i = \frac{\partial P}{\partial X^i}$ ,  $e_i$  是一组标准正交矢量. 那么正六面体微元的边为  $e_1 dX^1, e_2 dX^2$  和  $e_3 dX^3$ . 变形后, 正六面体变为平行六面体, 边长为  $Q_1 dX^1, Q_2 dX^2$  和  $Q_3 dX^3$ , 其中  $Q$  为变形后物质点的位置矢量, 且  $Q_i = \frac{\partial Q}{\partial X^i}$ . 显然,  $e_1, e_2$  和  $e_3$  在变形后分别变为  $Q_1, Q_2$  和  $Q_3$ .

一般情况下,  $Q_i$  并不一定是正交矢量. 平行六面体 3 个正侧面上的力分别表示为  $d\mathbf{T}^i$ . 假设变形前,  $d\mathbf{T}^i$  就作用在初始正六面体相应的侧面上. 用  $\tau^i$  表示相应侧面上初始单位面积上的力

$$\tau^i = \frac{d\mathbf{T}^i}{dX^{i-1}dX^{i+1}} \quad (21)$$

式中  $dX^i \rightarrow 0$ . 如果在初始基矢  $e_j$  上分解  $\tau^i$ , 则

$$\tau^i = \tau^{ji} e_j \quad (22)$$

式中  $\tau^{ji}$  就是第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量的分量.

### 2.3 第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量的分量

若在当前构型上的 3 个基矢  $Q_j$  上分解  $\tau^i$ , 则有

$$\tau^i = \sum^{ji} Q_j \quad (23)$$

$\sum^{ji}$  为 Piola-Kirchhoff 应力张量的分量.

### 2.4 绝对符号

从现代的观点来看, 一个张量可以用基矢的并矢求和来表达. 那么 Cauchy 应力张量  $\sigma$ 、第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量  $\tau$  和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量  $\mathbf{T}^{(2)}$  可写成

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^{ji} e_j \otimes e_i = \sigma^i \otimes e_i \\ \tau &= \tau^{ji} e_j \otimes e_i = \tau^i \otimes e_i \\ \mathbf{T}^{(2)} &= \sum^{ji} e_j \otimes e_i = \tau_0^i \otimes e_i \end{aligned} \quad (24)$$

式中

$$\tau_0^i = \sigma^{ji} e_j \quad (25)$$

注意, 式 (23) 中的  $\tau^i$  和式 (25) 中的  $\tau_0^i$  是不同的. 因为  $\sigma$ ,  $\tau$  和  $\mathbf{T}^{(2)}$  是这 3 个应力张量的绝对表示, 在坐标变换时, 它们是不变量. 上面给出的 3 个应力张量具有不同的功能, 在许多书中都有详细介绍, 见第 2 部分开始时引用的文献.

## 3 “基面力” 和应力张量

下面我们简单阐述“基面力”的概念, 详细论述请见文献 [21, 22, 124].

### 3.1 “基面力” 的定义

在当前构型上建立一个拉格朗日坐标系  $x^i$ ,  $x^i$  为曲线坐标系.  $Q$  表示当前构型中物质点的位

置矢量.  $Q_i$  表示物质点的基矢量, 即  $Q_i = \frac{\partial Q}{\partial x^i}$ . 当前构型中平行六面体微元的各边表示为  $Q_1 dx^1$ ,  $Q_2 dx^2$  和  $Q_3 dx^3$ , 见图 4.

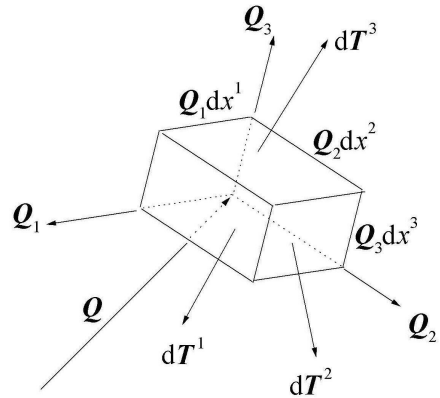


图 4 当前构型的平行六面体微元

我们用  $d\mathbf{T}^i$  表示作用于微元体 3 个正侧面上的力, 当  $dx^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 趋向于零时, 有极限值

$$\mathbf{T}^i = \frac{d\mathbf{T}^i}{dx^{i-1}dx^{i+1}} \quad (26)$$

式中约定指标满足  $3 + 1 = 1$  和  $1 - 1 = 3$ .  $\mathbf{T}^i$  就称为“基面力”.

在式 (19) 中, 当  $x^i$  是当前构型的一个笛卡尔坐标时,  $\mathbf{T}^i$  就变为  $\sigma^i$ . 在式 (21) 中, 当  $x^i$  是初始构型的一个笛卡尔坐标时,  $\mathbf{T}^i$  就变为  $\tau^i$ . “基面力” $\mathbf{T}^i$  与 Cauchy 应力张量、第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量的关系在 3.4 节中讨论.

### 3.2 “基面力” 的功能

为了说明“基面力” $\mathbf{T}^i$  的功能, 需要在初始构型和当前构型上定义一些几何量. 现在, 把  $x^i$  看作拉格朗日坐标, 用  $P$  和  $Q$  表示一个物质点在变形前后的位置矢量, 那么, 对每个物质点, 可以得到的两组基矢量

$$P_i = \frac{\partial P}{\partial x^i}, \quad Q_i = \frac{\partial Q}{\partial x^i} \quad (27)$$

$P_i$  和  $Q_i$  分别称为初始和当前构型的基矢. 用  $V_P$  和  $V_Q$  表示初始和当前的基容, 则

$$V_P = (P_1, P_2, P_3), \quad V_Q = (Q_1, Q_2, Q_3) \quad (28)$$

式中括号表示 3 个矢量的混合乘积.

用“基面力” $\mathbf{T}^i$ , 可以给出初始构型或当前构型上的力边界条件

$$\frac{m_i}{V_P} \mathbf{T}^i = \bar{\sigma}_0 \quad \text{或} \quad \frac{n_i}{V_Q} \mathbf{T}^i = \bar{\sigma} \quad (29)$$

式中  $\bar{\sigma}_0$  为初始单位面积上给定的边界力,  $\bar{\sigma}$  为当前单位面积上给定的边界力. 且  $m_i = \mathbf{m} \cdot \mathbf{P}_i$ , 式中  $\mathbf{m}$  为初始面积上的局部单位法向量;  $n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_i$ , 式中  $\mathbf{n}$  为当前面积上的局部单位法向量.

用“基面力” $\mathbf{T}^i$ , 平衡方程可写成

$$\frac{\partial \mathbf{T}^i}{\partial x^i} + \rho_0 V_P \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (30)$$

或

$$\frac{\partial \mathbf{T}^i}{\partial x^i} + \rho V_Q \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (31)$$

式中  $\rho_0$  和  $\rho$  分别是变形前和变形后的质量密度,  $\mathbf{f}$  是单位质量物质受到的力, 即体力. 用不同的应力张量, 如 Cauchy 应力张量、第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量等表达的平衡方程只是式 (30) 和 (31) 的变化形式. 式 (30) 和 (31) 不仅形式简捷, 而且在具体使用时易于计算.

### 3.3 可压缩材料弹性定律

当我们使用“基面力” $\mathbf{T}^i$  去描述应力状态时, 我们应该使用它的共轭变量来描述变形. 令  $\mathbf{u}$  表示位移, 那么

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{P}_i + \mathbf{u}_i \quad (32)$$

式中  $\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}$  为位移梯度. 用  $U$  表示初始构型上单位体积的应变能. 考虑一个平行六面体微元, 见图 4. 设虚位移为  $\delta \mathbf{u}$ , 则由虚位移原理得

$$\mathbf{T}^i \cdot \delta \mathbf{u}_i = V_P \delta U \quad \mathbf{T}^i \dot{\mathbf{u}}_i = V_P \dot{U} \quad (33)$$

式中  $(\dot{\cdot}) = \frac{d}{dt}(\cdot)$ . 因此

$$\mathbf{T}^i = V_P \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_i} \quad (34)$$

式 (34) 为用应变能表示的“基面力” $\mathbf{T}^i$ . 因此, 位移梯度  $\mathbf{u}_i$  正是“基面力” $\mathbf{T}^i$  的共轭变量.

用平衡方程 (30) 或 (31), 弹性定律 (34), 位移边界条件和力边界条件 (29), 我们可以看到一个大变形弹性力学问题可以用“基面力” $\mathbf{T}^i$  和位移梯度  $\mathbf{u}_i$  来描述.

### 3.4 应力张量的结构

正如在式 (26) 所提及的, 式 (19) 中的  $\sigma^i$  和式 (21) 中的  $\tau^i$  是  $\mathbf{T}^i$  的特殊情况. 通过“基面力” $\mathbf{T}^i$ ,

式 (24) 中的应力张量可写成

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{V_Q} \mathbf{T}^i \otimes \mathbf{Q}_i, \tau = \frac{1}{V_P} \mathbf{T}^i \otimes \mathbf{P}_i \\ \mathbf{T}^{(2)} &= \frac{1}{V_P} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^i \otimes \mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (35)$$

式中  $\mathbf{F}^{-1}$  表示变形梯度  $\mathbf{F}$  的逆. 很容易证明在式 (35) 中的 3 个表达式均是张量. 其它应力张量也可以用“基面力”表示, 例如, 把式 (35) 中的第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量表达代入式 (8), 我们可以用“基面力”表示 Biot 应力张量

$$\mathbf{T}^{(1)} = \frac{1}{2V_P} [\mathbf{P}_i \otimes \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{R} + (\mathbf{P}_i \otimes \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{R})^T] \quad (36)$$

式中  $\mathbf{R}$  是式 (1) 中定义的旋转张量.

从式 (35) 和 (36) 中, 我们可以看出 Cauchy 应力张量、第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量、第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量和 Biot 应力张量都是由  $\mathbf{T}^i$  配以不同基矢构造出来的, 构造的框架相同. 所以, 从直观和分析两方面看, 各种应力张量都可用“基面力”构造出来. 打一个比方, 对应力状态来说, 各种应力张量相当于同一个人穿的不同衣服.

### 3.5 一些与坐标无关的绝对表达式

由上面的讨论我们知道, “基面力” $\mathbf{T}^i$  可以代替各种应力张量. 下面将会看到, 不用坐标系也可用“基面力”来表达应力张量 [22]. 在当前构形中, 考虑一个四面体微元, 其边用向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  表示, 见图 5.  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{b}_0$  和  $\mathbf{c}_0$  表示向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  在变形前对应的向量. 用  $\mathbf{H}^a$ ,  $\mathbf{H}^b$  和  $\mathbf{H}^c$  表示与 3 条边  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  对应的侧面上的力, 用  $\mathbf{H}^n$  表示底面上的力.

现在可以想象,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  的基矢为  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$  和  $\mathbf{Q}_3$ , 那么, 从式 (35) 的第一个方程可以得到 Cauchy 应力张量

$$\sigma = \frac{1}{3V} (\mathbf{H}^a \otimes \mathbf{a} + \mathbf{H}^b \otimes \mathbf{b} + \mathbf{H}^c \otimes \mathbf{c}) \quad (37)$$

式中  $V$  是四面体微元当前的体积. 类似地, 可以想象,  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{b}_0$  和  $\mathbf{c}_0$  初始基矢为  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  和  $\mathbf{P}_3$ , 那么, 由式 (35) 的第 2 个方程可以得到第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量

$$\tau = \frac{1}{3V_0} (\mathbf{H}^a \otimes \mathbf{a}_0 + \mathbf{H}^b \otimes \mathbf{b}_0 + \mathbf{H}^c \otimes \mathbf{c}_0) \quad (38)$$

式中  $V_0$  为四面体微元初始的体积. 将图 5 中的顶点循环, 不难证明以下公式

$$\sigma = \frac{1}{V} \mathbf{H}^i \otimes \rho_i, \tau = \frac{1}{V_0} \mathbf{H}^i \otimes \rho_{i0}, i = a, b, c, n \quad (39)$$

式中  $\rho_i$  是在当前构形上, 从四面体微元的形心到每个侧面中心的矢量,  $\rho_{i0}$  是  $\rho_i$  的初始矢量. 因为四面体微元处于平衡状态, 所以有  $H^a + H^b + H^c + H^n = 0$ .  $\rho_i$  的初始点可以任意选择, 式 (39) 也适用于任意多面体. Cauchy 应力张量和第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量的积分表达式为

$$\sigma = \frac{1}{V} \oint \sigma^n \otimes Q dS, \quad \tau = \frac{1}{V_0} \oint \sigma_0^n \otimes P dS_0 \quad (40)$$

式中  $V$  为当前构形中包含一个物质点的、任意小的空间区域的体积,  $dS$  表示区域  $V$  表面的当前面积微元,  $\sigma^n$  是当前构形上这个任意小空间区域

表面上的应力向量,  $Q$  是当前构形上这个任意小的空间区域表面上点的位置矢量.  $V_0$  为初始构形中包含一个物质点的、任意小的空间区域的体积,  $dS_0$  表示这个空间区域表面的面积微元,  $\sigma_0^n$  是这个空间区域表面变形前单位面积上的力,  $P$  是初始构形上这个任意小的空间区域表面上点的位置矢量.

众所周知, 张量与坐标系的选择无关, 有绝对性. 然而, 式 (35) 必须在一个坐标系中给定. 当我们使用式 (39) 和 (40) 时, 就不再需要坐标系.

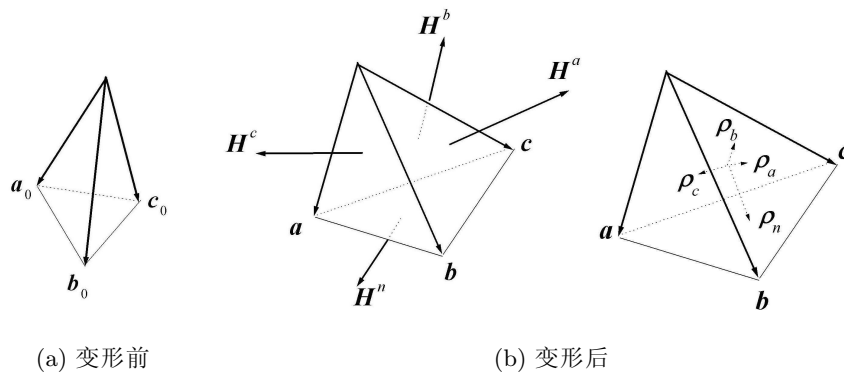


图 5 四面体的 3 个侧面和底面上的作用力

### 4 弹性大变形中 3 类典型的奇异点问题

橡胶类材料中的裂纹尖端应力场、集中力附近的应力场以及刚性楔和橡胶缺口接触处的应力场是 3 类典型的弹性大变形奇异点问题. 这一节将说明“基面力”结合分区方法在求解以上 3 类问题中的应用.

#### 4.1 裂纹或缺口尖端应力场

众所周知, 裂纹和缺口尖端的应变是奇异的, 就是说, 和远场相比, 尖端的应变趋于无穷大. 对于能发生很大弹性应变的橡胶类材料, 裂纹尖端的应变趋于无穷大, 因此, 小变形弹性理论在这里并不适用. 裂纹尖端的几何非线性和物理非线性使得问题非常复杂. Knowles 等 [53] 最早对这个问题进行过系统的分析. 他们发现在裂纹尖端附近的应力状态是单向拉伸状态. 他们采用如下形式的应变能密度来导出平面应变的弹性本构关系, 这种弹性本构关系既适用于小应变情况, 也适用于大应变情况.

$$U = (AI + BJ + CIJ^{-2})^n \quad (41)$$

式中  $I$  为右 Cauchy-Green 应变张量的第一不变量;  $J$  为变形后与变形前的体积比;  $A, B, C$  和  $n$  为材料常数. 分别用  $x_\alpha$  和  $y_\alpha (\alpha = 1, 2)$  表示变形前和变形后的笛卡尔坐标. 裂纹位于  $x_2 = 0, -b < x_1 < b$ , 见图 6.

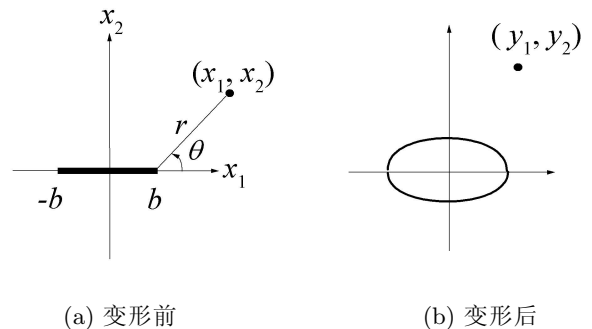


图 6 单向拉伸无限大平面中的裂纹

问题的关键是弄清楚裂纹尖端附近的渐近特性. 下面先回顾一下 Knowles 等提出的解决办法. 为了描述右边裂纹尖端的初始构型, 引入如下极坐标

$$x_1 - b = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (42)$$

假定在裂纹尖端附近, 从初始构型  $x_\alpha$  到当前构型  $y_\alpha$  的映射函数为

$$\begin{aligned} y_1 &= b + r^{m_1} v_1(\theta) + o(r^{m_1}) \\ y_2 &= r^{m_2} v_2(\theta) + o(r^{m_2}) \end{aligned}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (43)$$

式中  $y_\alpha$  为变形后物质点的笛卡尔坐标.

考虑到裂纹尖端的变形是关于  $x_1$  轴对称的这一特点, 有

$$v_1(\theta) = v_1(-\theta), \quad v_2(\theta) = -v_2(-\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (44)$$

为了简化分析, 令

$$m_1 = m, \quad m_2 = 4 - 3m, \quad 1 < m < \frac{4}{3} \quad (45)$$

经过一段繁琐的推导, 最后得到如下两个方程

$$\begin{aligned} p\ddot{v}_2 + (n-1)\dot{p}\dot{v}_2 + (4-3m) \cdot \\ [3(1-m)(2n-1) + 1]pv_2 = 0 \\ 6(1-m)(n-1)w\dot{v}_2 - (4-3m)\dot{w}v_2 = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

式中  $n$  为材料常数

$$\begin{aligned} p &= (4-3m)^2 v_2^2 + \dot{v}_2^2 \\ w &= p^{n-1} (B - 2Cpq^{-3}) \\ q &= mv_1 \dot{v}_2 - (4-3m)v_2 \dot{v}_1 \end{aligned} \quad (47)$$

式中  $\dot{(\ )} = \frac{d}{d\theta}(\ )$ . 边界条件是

$$\dot{v}_2(\pm\pi) = 0, \quad w(\pm\pi) = 0 \quad (48)$$

因为式 (46) 中的第一个方程中只含有  $v_2$ , 所以可以解得  $v_2$  的解析解

$$\begin{aligned} v_2(\theta) &= a \sin \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \frac{2k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \omega(\theta)} \right]^{\frac{1}{2}} [\omega(\theta) + k \cos \theta]^{\frac{k}{2}} \\ \omega(\theta) &= (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (49)$$

式中  $a$  是一个任意常数. 由于特征值  $m$  为

$$m = 1 + \frac{1}{6n} \quad (50)$$

式 (46) 中第 2 个方程化为

$$2(n-1)w\dot{v}_2 + (2n-1)\dot{w}v_2 = 0 \quad (51)$$

经过分析可以得到  $w \equiv 0$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ). 进而得到

$$\begin{aligned} 3(2n-1)v_2\dot{v}_1 - (6n+1)\dot{v}_2v_1 + 6n \left( \frac{2C}{B} \right)^{\frac{1}{3}} p^{\frac{1}{3}} = 0, \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (52)$$

由于  $v_2(0) = 0$ , 所以裂纹尖端点 (即坐标原点) 是方程 (52) 的一个奇异点.

Knowles 等<sup>[54]</sup> 认为  $v_1$  应具有如下形式

$$v_1(\theta) = K(\chi) |v_2(\theta)|^{\chi-1} + P(\theta, \chi) \quad (53)$$

式中

$$\chi = \frac{2(6n-1)}{3(2n-1)}, \quad \frac{1}{2} < n < \infty \quad (54)$$

$P(\theta, \chi)$  在  $\theta = 0$  处是非奇异的. 这样  $v_1$  在  $\theta = 0$  处的非奇异性决定于参数  $\chi$ , 也就是决定于材料常数  $n$ . 在 Knowles 等<sup>[54]</sup> 的长达 41 页的文章中, 关于  $v_1$  的非奇异性论证就占了很大的篇幅. 在这个论证中, 还根据材料常数  $n$  取不同的值, 分为许多种情况加以讨论. 后来, Knowles 等又对这一问题进行了二阶渐近分析, 其研究结果发表在另一篇长达 33 页的文章<sup>[55]</sup> 中. 继 Knowles 等<sup>[54,55]</sup> 的研究工作之后, 针对不同的弹性本构关系, 不同的边界条件, 人们对这一问题又进行了许多研究, 其中的一些研究是建立在  $v_1$  非奇异的前提下进行的, 所以这些推导过程都十分繁琐. 关于公式 (42)~(54) 的推导过程可以在文献 [54] 中查到.

问题是  $v_1$  (在  $\theta = 0$  处) 的非奇异性是否必要? 人们会问, 是否一定存在一系列关于  $v_1$  和  $v_2$  的、统一的映射函数, 来描述裂纹尖端的变形? 如果不能这样做, 能否将裂尖附近的整个区域, 即  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , 分解为一些子区域, 在每个子区域上具有不同的映射函数?

基于上述考虑, 高玉臣<sup>[23]</sup> 对裂纹尖端奇异场提出了不同于 Knowles 等的渐近分析方法. 下面对高玉臣提出的方法做一回顾, 关于以下式 (55)~(68) 的详细推导过程, 请参见文献 [23].

高玉臣建议如下应变能函数来描述裂纹尖端的弹性行为

$$U = a \left[ (IJ^{-2/3})^n - 3^n \right] + b (J^2 - 1)^m J^{-2l} \quad (55)$$

式中  $a, b, n, m$  和  $l$  都是材料常数. 图 7 为裂纹尖端区域变形示意图. 变形前, 物质点的极坐标为

$(R, \theta)$ ; 变形后, 该点的坐标为  $(r, \theta)$ . 坐标原点选在裂纹尖端点, 在裂纹尖端附近,  $R$  和  $r$  都非常小. 考虑到变形后裂纹尖端处于单向拉伸状态,  $\theta$  和  $\theta$  的变化范围分别是  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  和  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

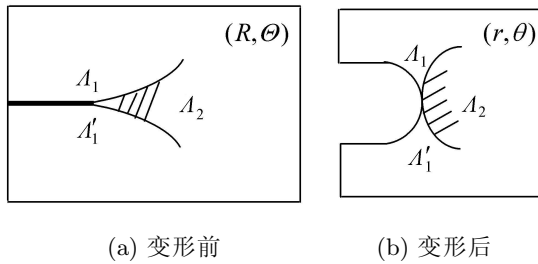


图 7 裂纹尖端的变形模式

为了描述变性特征, 将裂纹尖端区域分为  $A_1$ ,  $A_1'$  和  $A_2$  3 个部分, 见图 7. 变形前,  $A_1$  ( $0 < \theta \leq \pi$ ) 和  $A_1'$  ( $-\pi \leq \theta < 0$ ) 分别为上弹性半空间和下弹性半空间的绝大部分. 变形后, 由于裂纹尖端的上、下两表面的夹角由变形前的  $0^\circ$  变为变形后的  $180^\circ$ , 见图 7(a) 和 7(b),  $A_1$  和  $A_1'$  几乎变成了一条线, 这条线处在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  和  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  附近. 所以  $A_1$  和  $A_1'$  称为收缩区. 相反, 变形前,  $A_2$  为  $\theta = 0$  附近一条非常小的区域; 但变形后,  $A_2$  几乎占据了整个弹性半空间, 即  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  这个区域, 所以  $A_2$  称为扩张区. 由于收缩区和扩张区的变形特点不同, 所以不存在统一形式的映射函数. 因此, 应该用不同的映射函数来描述裂纹尖端的变形. 在收缩区  $A_1$ , 映射函数可设成

$$r = R^{1-\delta} \varphi(\theta), \quad \theta = \frac{\pi}{2} - R^\gamma \psi(\theta), \quad 0 < \theta \leq \pi \tag{56}$$

式中  $\delta$  和  $\gamma$  为待定常数. 由奇异性的匹配关系, 有

$$\gamma = \frac{6s-n}{3s+n} \delta \tag{57}$$

式中  $s = m - l$ . 由式 (56) 表示的映射函数, 可导出应力表达式, 然后代入平衡方程, 最后得到关于  $\varphi$  的方程

$$\varphi'' + (1-\delta)\varphi \left[ 1 - \delta(2-e) - \frac{\delta(1-\delta)^2(1-e)^2}{\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + e(1-\delta)^2} \right] = 0 \tag{58}$$

式中  $(\cdot)' = \frac{d}{d\theta}(\cdot)$ ,  $e = \frac{3s+n}{3s(2n-1)-n}$ . 关于  $\varphi$  的边界条件是

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(\pi) = 0 \tag{59}$$

考虑到裂纹扩展中能量释放率的关系, 有

$$\delta = \frac{n+3s}{6ns} \tag{60}$$

这个结果可以由方程 (58) 在边界条件 (59) 下的数值解来验证. 实际上, 函数  $\varphi$  等价于 Knowles 等 [54] 中的  $v_2$ , 即式 (46) 中的函数  $v_2$ . 决定  $\psi$  的方程是

$$\frac{na}{3} p^n - sbq \frac{2}{3} n+2s = 0 \tag{61}$$

式中

$$\begin{aligned} p &= (1-\delta)^2 \varphi^2 + \varphi'^2 \\ q &= \varphi[\gamma \varphi' \psi - (1-\delta)\varphi \psi'] \end{aligned} \tag{62}$$

比较 Knowles 等 [54] 中出现的式 (47) 中的  $p, q$  与上式中的  $p, q$ , 可以看出, 它们具有同等重要的地位. 对于来讲, 方程 (61) 最终和方程 (52) 相似. 当然, 在  $\theta = 0$  处,  $\psi$  具有奇异性, 而这正是解的自然属性. 当  $\theta \rightarrow 0$  时, 收缩区  $A_1$  的解应和扩张区  $A_2$  的解相匹配, 而与另一个收缩区  $A_1'$  无关.

下面考虑扩张区  $A_2$  的映射函数. 令

$$\begin{aligned} r &= R^{1+\beta} \rho(\xi), \quad \theta = \omega(\xi), \\ \xi &= \theta R^{-\alpha}, \quad -\infty \leq \xi \leq \infty \end{aligned} \tag{63}$$

由奇异性的匹配关系, 有

$$\alpha = \frac{6s-n}{3s-2n} \beta \tag{64}$$

经过一段繁琐的推导, 最终得到关于  $\rho$  和  $\omega$  的方程

$$\begin{aligned} \frac{\rho''}{\rho} - \omega'^2 - \frac{1}{\Delta} \frac{\mu}{(1+\beta)} \frac{\rho'^2}{\rho^2} (1+\Omega-Q) \cdot \\ \left[ \frac{1}{3}(1-2\Omega) - \frac{2s-1}{4n-3} Q \right] = 0 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\frac{\omega''}{\omega'} + 2 \frac{\rho'}{\rho} - \frac{1}{\Delta} \frac{\mu}{(1+\beta)} \frac{\rho'}{\rho} (1+\Omega-Q) = 0$$

式中  $(\cdot)' = \frac{d}{d\xi}(\cdot)$ , 以及

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\omega'^2 \rho^2}{\rho'^2}, \quad Q = \frac{3sbv^{2s+\frac{2n}{3}} u^{1-n}}{na\rho'^2} \\ \Delta &= 1 + 2\Omega + \frac{3(2s-1)(2n-1+\Omega)}{(4n-3)(1+\Omega)} Q \\ u &= \rho'^2 + \rho^2 \omega'^2, \quad v = -(1+\beta)\rho^2 \omega' \\ \mu &= \frac{3n(2s-1)\beta}{(3s-2n)} \end{aligned} \tag{66}$$

边界条件是

$$\begin{aligned} \rho'(0) &= 0, \quad \omega(0) = 0 \\ \omega(\pm\infty) &= \pm\pi/2 \end{aligned} \quad (67)$$

式中  $\rho(0)$  是一个不确定的参数, 它表示变形场的幅度或大小.  $\omega'(0)$  可以由式 (67) 第 2 个条件来确定. 在收缩区  $A_1(\theta \rightarrow 0)$  和扩展区  $A_2(\xi \rightarrow \infty)$  之间, 应力和位移要连续. 所以, 可以得到奇异性指数的匹配条件

$$\beta = \frac{3s - 2n}{3s + n} \delta \quad (68)$$

除此之外, 还要求  $\varphi(0)$  的大小和  $\rho(0)$  相关联.

在文献 [54, 55] 中, 上述 3 个区域  $A_1, A'_1$  和  $A_2$  被当作一个区域来处理, 用了单一的一个映射函数来描述裂纹尖端的变形, 没有单独考虑扩张区  $A_2$ , 所以导致了一些矛盾的结果. 实际上, 他们的解只适用于收缩区  $A_1$  和  $A'_1$ . 不考虑扩张区  $A_2$ , 他们就想将两个收缩区匹配在一起, 还要求映射函数  $\psi$  (或  $v_1$ ) 非奇异. 这是导致矛盾的原因.

### 4.2 集中力

用应变能式 (55) 表示的应变能函数, 高玉臣等 [28] 分析了图 8 所示的拉力作用下橡胶锥体的奇异性问题. 分别用球坐标  $(R, \theta, \Phi)$  和  $(r, \theta, \phi)$  表示一个物质点在变形前和变形后的位置.

集中力附近的变形可用下列渐近形式的映射函数来描述

$$R = r^{1+\beta} f(\xi), \quad \Theta = g(\xi), \quad \Phi = \phi, \quad \xi = \theta r^{-\alpha} \quad (69)$$

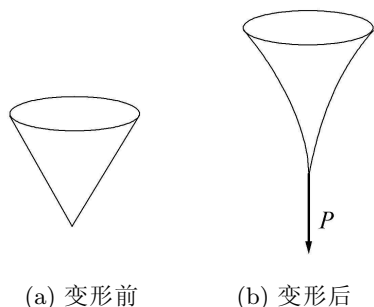


图 8 集中力作用下的橡胶锥体

经推导, 可以得到

$$\begin{aligned} \xi &= \sin \frac{\theta}{2} \left[ \frac{P}{4n\pi a(1 - \cos \theta_0)} \right]^{-\alpha/2} \\ &\left( \frac{3sb}{na} \right)^{\frac{\alpha}{4s}} (1 + \beta)^{-1-\alpha} \end{aligned} \quad (70)$$

和

$$\begin{aligned} r &= -R^{\frac{1}{1+\beta}} f_0^{\frac{-1}{1+\beta}} \\ r\theta &= \xi r^{1+\alpha} = R^{\frac{1+\alpha}{1+\beta}} f_0^{-\frac{1+\alpha}{1+\beta}} \\ &\left[ \frac{P}{4n\pi a(1 - \cos \theta_0)} \right]^{\frac{-\alpha}{2}} \\ &\left( \frac{3sb}{na} \right)^{\frac{\alpha}{4s}} (1 + \beta)^{-1-\alpha} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (71)$$

比较式 (71) 和式 (16) 和 (17), 我们可以看到上述结果和 Simmonds 等 [84] 得到的结果一致. 由于应变能函数的形式与 Simmonds 等 [84] 的应变能函数形式不同, 得到的解只是在一些常数上有差别. 高玉臣等 [33] 还给出了拉力作用下橡胶锥体的有限元数值计算结果.

正如 Simmonds 等 [84] 指出的那样, 进一步要研究的是集中压力作用下的弹性半空间问题. 在小变形情况下, 只要在拉力载荷解的前面加一个负号便得到压力载荷问题的解. 但对于大变形问题, 压力问题和拉力问题是完全不同的两个问题, 情况要复杂得多. 用高玉臣 [30] 建议的一类应变能函数, 高玉臣 [36] 给出了压力情况下的分析结果. 求解过程有以下两个特点: (1) 恰当的分区方式; (2) 用“基面力”推导各方程. 下面是求解的主要步骤.

设变形前的单位体积物质在变形后储存的应变能表达式为 [30]

$$U = a (I^n + I_{-1}^n) \quad (72)$$

式中  $a$  和  $n$  为材料常数;  $I$  为右 Cauchy-Green 应变张量的第一不变量;  $I_{-1} = C^{-1} : I$ ,  $C^{-1}$  表示右 Cauchy-Green 应变张量  $C$  的逆.  $I$  表示单位张量. 为简化分析过程而不失一般性, 进一步假设材料是不可压缩的, 即  $J \equiv 1$ . 由此得到“基面力”的表达形式

$$T^i = 2naV_P \left( I^{n-1} p^{ij} Q_j - I_{-1}^{n-1} q^{ij} p_{jk} Q^k + \sigma Q^i \right) \quad (73)$$

式中  $V_P$  为初始构型的基容, 由式 (28) 的第一项给出;  $\sigma$  为静水压力, 是待定的. 图 9 为压力作用下的弹性半空间的剖面图以及变形前后的形状的示意图.

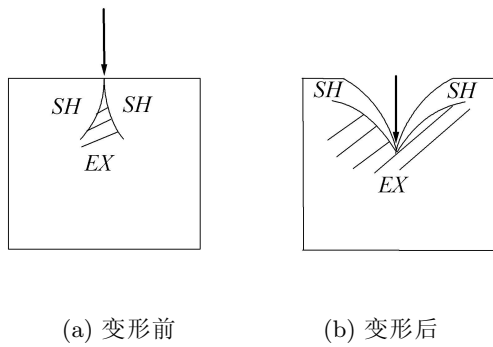


图9 压力作用下变形前、后的弹性半空间的剖面图

假定集中力附近的区域可以分为两个轴对称的子区域. 一个是扩张区 EX, 变形前扩张区 EX 是位于集中力作用线上的一个很窄的区域, 见图 9(a). 变形后, 扩张区 EX 变得非常宽, 几乎占据了整个区域, 见图 9(b). 另一个区域是收缩区 SH, 变形前, 收缩区非常宽, 几乎占据了整个区域, 见图 9(a). 变形后, 收缩区 SH 变为非常窄的一层, 是绕集中力作用线回转过成的很薄的一层, 见图 9(b). 在收缩区和扩展区中的两个典型的三角形 A 和 B 分别标识在图 10(a) 和 10(b) 中. 在变形过程中, A 的中心角是收缩的, B 的中心角是扩张的.

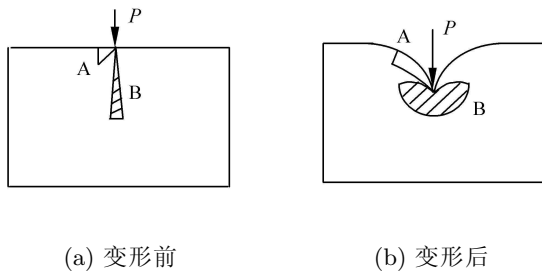


图10 收缩区和扩张区中典型的三角形变形

用物质点在变形前后的球坐标  $(R, \Theta, \Phi)$  和  $(r, \theta, \phi)$  来表示这个物质点位置. 对于扩张区 EX, 在集中力附近, 当  $r \rightarrow 0$  时, 假设如下渐近形式的映射函数

$$R = r^{1-\delta}h(\theta), \quad \Theta = r^\gamma m(\theta), \quad \Phi = \phi, \quad \theta < \theta^* \tag{74}$$

式中的  $\delta$  和  $\gamma$  是正的指数,  $\theta^*$  表示  $\theta$  在扩张区边界上的值.

考虑材料的不可压缩性, 可以得到“基面力”的表达形式

$$\begin{aligned} T^r &= 2nar^{2-2n\delta}p^{n-1}\sin\theta \cdot \\ &\quad \left\{ \left[ t - (1-\delta)^2 h^2 \right] e_r - (1-\delta)hh'e_\theta \right\} \\ T^\theta &= 2nar^{1-2n\delta}p^{n-1}\sin\theta \cdot \\ &\quad \left[ -(1-\delta)hh'e_r + (t-h'^2)e_\theta \right] \\ T^\varphi &= 2nar^{1-2n\delta}p^{n-1}te_\varphi \end{aligned} \tag{75}$$

式中  $e_r, e_\theta$  和  $e_\varphi$  是坐标线上的单位向量,  $()' = \frac{d}{d\theta}()$

$$p = h'^2 + (1-\delta)^2 h^2, \quad t = r^{2n\delta}p^{1-n}\sigma \tag{76}$$

数值结果显示, 将整个区域分为收缩区 SH 和扩张区 EX 是合理的, 见文献 [36].

高玉臣 [31] 还给出线载荷作用下楔体问题的一个解. 这类二维问题的求解过程比三维轴对称问题要简单, 而分区的方法是类似的.

综上所述, 对于拉力, 只有一个收缩区; 而对于压力, 整个区域必须分为扩张区和两个收缩区, 对这两种不同的区域, 要分别假设不同的映射函数.

### 4.3 角点接触问题

高玉臣等 [34] 给出了刚性楔和橡胶缺口接触问题的一个解. 对于平面应变问题, 用式 (72) 描述的本构关系, 可以得到式 (34) 表示的“基面力”. 对图 11 中的两个收缩区和一个扩张区, 变形特点应分别加以考虑. 在角点接触问题中, 如何满足变形后表面的接触条件是一个关键问题. 这种条件是收缩区的一个边界条件.

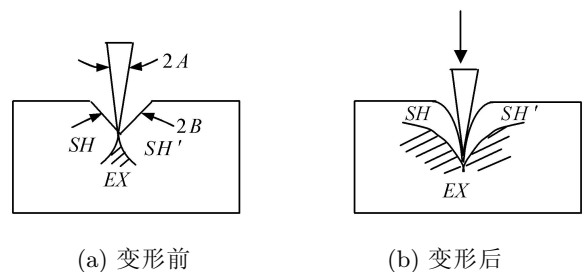


图11 刚性楔和橡胶缺口的接触问题 (2A 为楔角, 2B 为缺口的夹角)

设收缩区的映射函数为

$$R = r^{1+\beta}f(\xi), \quad \Theta = g(\xi), \quad \xi = r^{-\alpha}(\theta - \pi + A), \quad -\infty < \xi < 0 \tag{77}$$

式中  $\alpha$  和  $\beta$  是正的指数,  $A$  和  $B$  分别是楔角角度的一半和橡胶缺口角度的一半. 又设扩张区的映射函数是

$$R = r^{1-\delta}h(\theta), \quad \Theta = r^\gamma m(\theta), \quad |\theta| < \pi - A \quad (78)$$

当  $B = \frac{\pi}{2}$  时, 橡胶缺口退化为一个弹性半空间. 这时, 可以得到收缩区的解析解

$$f = f_0 (1 + K^2 \xi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad g = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(K\xi), \quad (79)$$

$$K = \frac{(2n-1)^{\frac{1}{2n}} f_0^{-2}}{1+\beta}$$

## 5 弹性大变形的余能原理

高玉臣<sup>[42]</sup>建立了一种弹性大变形问题的余能原理, 介绍如下:

### 5.1 基本原理

由上面的讨论, 可以认为  $\mathbf{u}_i$  可通过本构方程 (34) 和力矩平衡条件表示为  $\mathbf{T}^i$  的函数. 因此, 我们引入一新的余能函数  $U_C(\mathbf{T}^i)$  如下

$$U_C = \frac{1}{V_P} \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{u}_i - U \quad (80)$$

其中  $U_C$  称为变形前单位体积物质对应的余能. 由方程 (34) 和 (80), 可得

$$\mathbf{u}_i = V_P \frac{\partial U_C}{\partial \mathbf{T}^i} \quad (81)$$

系统总余能定义为

$$\pi_C = \int_D U_C dV_0 - \int_{S_u} \bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 dS_0 \quad (82)$$

式中  $dV_0$  和  $dS_0$  分别表示在变形前区域  $D$  内的体元和边界面元,  $\bar{\mathbf{u}}$  为位移边界  $S_u$  上的给定位移,  $\boldsymbol{\sigma}_0$  为变形前位移边界  $S_u$  上的面力.  $\boldsymbol{\sigma}_0$  不是独立的变量, 须由边界上的平衡条件——式 (29) 中的第一个方程来确定, 即

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{m_i}{V_P} \mathbf{T}^i \quad (83)$$

余能原理的含义为: 当  $\mathbf{T}^i$  满足平衡方程 (31) 和力边界条件 (29) 时, 如果系统的总余能  $\pi_C$  取驻值, 则存在位移场  $\boldsymbol{\lambda}$ , 使得式 (81) 中的 3 个向量分别为  $\boldsymbol{\lambda}$  对  $x^i$  导数, 即

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x^i} \quad (84)$$

在边界  $S_u$  上, 使得

$$\boldsymbol{\lambda} = \bar{\mathbf{u}} \quad (85)$$

应注意, 由于没有给定  $\mathbf{Q}_i$ , 力矩平衡条件对  $\delta \mathbf{T}^i$  无约束作用.

### 5.2 位移梯度的确定

首先, 我们可以引入中间标架  $\mathbf{N}_i$ , 使得

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}_i \otimes \mathbf{N}^i, \quad \mathbf{R} = \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{P}^i \quad (86)$$

式中  $\mathbf{V}$  为式 (1) 的左伸长张量,  $\mathbf{N}^i$  为  $\mathbf{N}_i$  共轭向量.

显然,  $\mathbf{u}_i$  包含单元变形与刚体旋转两部分. 虽然无人怀疑变形部分可由应力状态唯一确定, 即由“基面力” $\mathbf{T}^i$  唯一确定, 但人们很难相信刚体旋转也可由“基面力” $\mathbf{T}^i$  唯一确定. 实际上, 考虑由高玉臣<sup>[42]</sup>给出的力矩平衡条件恰恰提供了 3 个确定刚体转动的方程, 即

$$\mathbf{T}^i \times (\mathbf{P}_i + \mathbf{u}_i) = \mathbf{0} \quad (87)$$

由式 (87) 中的 3 个条件, 再加上弹性定律 (34), 可确定位移梯度  $\mathbf{u}_i$ .

设

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{P}_i + \mathbf{u}_{i,r}, \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{u}_{i,d} \quad (88)$$

根据式 (32) 有

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i,r} + \mathbf{u}_{i,d} \quad (89)$$

对于各向同性材料, 可以证明式 (87) 等价于

$$\mathbf{T}^i \times \mathbf{N}_i = \mathbf{0} \quad \text{或} \quad \mathbf{T}^i \times \mathbf{u}_{i,r} + \mathbf{T}^i \times \mathbf{P}_i = \mathbf{0} \quad (90)$$

由于  $\mathbf{u}_{i,r}$  仅含 3 个未知的标量, 由式 (90) 可完全可确定  $\mathbf{u}_{i,r}$ . 实际上,  $\mathbf{u}_{i,r}$  是由刚体转动确定的. 设  $\mathbf{e}$  为转轴方向单位向量,  $\alpha$  为转角, 则

$$\mathbf{u}_{i,r} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{e} \times \left( \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{P}_i + \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{P}_i \right) \quad (91)$$

式 (90) 和 (91) 给出了一个确定  $\alpha$  和  $\mathbf{e}$  的条件, 即

$$\mathbf{T}^i \times [\cos \alpha \mathbf{P}_i + (1 - \cos \alpha) \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{P}_i) \mathbf{e} + \sin \alpha \mathbf{e} \times \mathbf{P}_i] = \mathbf{0} \quad (92)$$

当  $\mathbf{T}^i$  有两个为零时, 上式不能确定  $\alpha$ . 但此时无需确定  $\alpha$ , 但仍能确定  $\mathbf{e}$ .

对各向异性材料, 因为我们不能得到式 (92), 所以刚体转动不能由此方法获得. 但式 (92) 仍不失为一种确定刚体转动的条件. Ogden<sup>[102]</sup> 已讨论了类似的问题, 即由第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量来确定变形梯度  $\mathbf{F}$ . 显然, 变形梯度  $\mathbf{F}$  包含刚体转动, 而刚体转动和应变主轴无关. 所以, 确定刚体转动和确定应变主轴不是一回事. 由于 Ogden<sup>[102]</sup> 试图利用应变主轴来确定刚体转动, 所以, 他未能获得形式合理的余能原理, 他应考虑力矩平衡条件.

下面来看  $U_C$  的结构.  $U_C$  可分解为两部分

$$\begin{aligned} U_C &= U_C^d + U_C^r, \quad U_C^d = \frac{1}{V_P} \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{u}_i^d - U \\ U_C^r &= \frac{1}{V_P} \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{u}_i^r \end{aligned} \quad (93)$$

$U_C^d$  可称为与变形部分对应的余能 (与微元刚体旋转无关),  $U_C^r$  可称作与转动部分对应的余能. 而在文献 [102] 中, 假定  $U_C$  与刚体旋转无关. 所以, 他的这个假定不对.

由式 (93), 还可得到一些关系

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^d &= V_P \frac{\partial U_C^d}{\partial \mathbf{T}^i}, \quad \mathbf{T}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i^d}{\partial \mathbf{T}^j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \\ \mathbf{u}_i^r &= V_P \frac{\partial U_C^r}{\partial \mathbf{T}^i} \end{aligned} \quad (94)$$

高玉臣<sup>[42]</sup> 讨论了  $U_C$  的具体形式、小变形情况以及一些实例.

## 6 结论

(1) 各种应力张量都可以用“基面力”来构造. 打一个比方, 对于一个应力状态来说, 不同的应力张量就好比同一个人穿的不同衣服. 利用“基面力”各种力学问题可以用建立在简捷的形式上, 而不须用任何其它形式的应力张量. 在实际应用中, 用“基面力”计算也使问题简单得多.

客观地讲, 各种应力张量的建立, 是固体力学发展史中的重要部分, 它曾经丰富了人们的认识. 而“基面力”的引入能进一步深化人们对一些基本力学问题的认识, 即人们对力学问题的认识是从复杂到简捷、从表面到本质这样一个认识过程. 这也是一种进步. 从实用角度讲, 因为各种应力张量可以由“基面力”来构造, 所以, 各种应力张量也显得并不是十分必要的.

(2) 采用“基面力”, 可以比较容易地解决大变形弹性力学中的一系列奇异性问题. 对大多数奇异性问题, 由于存在扩张区和收缩区, 所以, 必须使用分区的办法来解.

(3) 用“基面力”作为基本变量, 可以合理地建立大变形问题的余能原理, 这种余能原理是一种纯余能原理, 具有与小变形情况下相同的形式.

**致谢** 感谢北京理工大学范天佑教授对本文的宝贵意见.

## 符号说明:

- $X^i$ ——初始构形上的直角坐标
- $x^i$ ——当前构形上的直角坐标或 Lagrange 坐标
- $\mathbf{e}_i$ ——直角坐标系中坐标轴方向上的单位向量
- $\boldsymbol{\sigma}$ ——Cauchy 应力张量
- $\boldsymbol{\sigma}^i$ ——第  $i$  面应力
- $\boldsymbol{\sigma}^{ji}$ ——Cauchy 应力张量的分量
- $\boldsymbol{\tau}$ ——第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量
- $\boldsymbol{\tau}^i$ ——第  $i$  面在初始构型上单位面积上对应的力
- $\boldsymbol{\tau}^{ji}$ ——第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量的分量
- $\mathbf{T}^{(2)}$ ——第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量
- $\boldsymbol{\Sigma}^{ji}$ ——第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量的分量
- $\boldsymbol{\tau}_0^i$ —— $\boldsymbol{\tau}_0^i = \boldsymbol{\Sigma}^{ji} \mathbf{e}_j$
- $d\mathbf{T}^i$ ——变形后平行六面体微元第  $i$  个正侧面上的作用力
- $\mathbf{T}^i$ ——变形后平行六面体微元第  $i$  面上的基面力
- $\mathbf{P}$ ——初始构形物质点的矢径
- $\mathbf{Q}$ ——当前构形物质点的矢径
- $\mathbf{P}_i$ ——初始构形基矢
- $\mathbf{P}^i$ —— $\mathbf{P}_i$  的共轭基
- $p^{ij}$ —— $\mathbf{P}^i$  与  $\mathbf{P}^j$  的点积, 即  $p^{ij} = \mathbf{P}^i \cdot \mathbf{P}^j$
- $\mathbf{Q}_i$ ——当前构型上的基矢
- $\mathbf{Q}^i$ —— $\mathbf{Q}_i$  的共轭基
- $q_{ij}$ —— $\mathbf{Q}_i$  与  $\mathbf{Q}_j$  的点积, 即  $q_{ij} = \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{Q}_j$
- $V_P$ ——变形前基容
- $V_Q$ ——变形后基容
- $J$ ——变形后与变形前的体积之比,

即  $J = \frac{V_Q}{V_P}$   
 $\mathbf{n}$ ——变形后面单元上单位外法线矢量  
 $\mathbf{n}_i$ —— $\mathbf{n}$  在当前基矢  $\mathbf{Q}_i$  上的分量  
 $\mathbf{m}$ ——变形前面单元上单位外法线矢量  
 $\mathbf{m}_i$ —— $\mathbf{m}$  在初始基矢  $\mathbf{P}_i$  的分量  
 $\boldsymbol{\sigma}^n$ ——当前构形边界上的应力  
 $\boldsymbol{\sigma}_0^n$ ——初始构形边界上的应力  
 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ——在给定位边界上, 当前构型上单位面积上给定的力向量  
 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$ ——在给定位边界上, 初始构型上单位面积上给定的力向量  
 $\rho$ ——当前构型上的质量密度  
 $\rho_0$ ——初始构型上的质量密度  
 $\mathbf{f}$ ——单位质量物质受到的力, 即体力  
 $\mathbf{u}$ ——物质点的位移  
 $\mathbf{u}_i$ ——位移梯度  
 $U$ ——初始构型上单位体积物质的应变能, 即应变能函数  
 $\delta()$ ——() 的增量  
 $(\dot{\phantom{x}})$ ——() 关于时间的率  
 $\mathbf{F}$ ——标架转换张量, 即变形梯度  
 $\mathbf{F}^{-1}$ —— $\mathbf{F}$  的逆  
 $\cdot$ ——标量积  
 $:$ ——双标量积  
 $\times$ ——叉乘  
 $\mathbf{C}$ ——右 Cauchy-Green 变形张量, 即  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$   
 $\mathbf{U}$ —— $\mathbf{F}$  的右伸长张量  
 $\lambda_i$ —— $\mathbf{U}$  的特征值  
 $\mathbf{g}_i$ —— $\mathbf{U}$  的正交特征向量  
 $\mathbf{R}$ —— $\mathbf{F}$  的二阶转动张量  
 $\mathbf{V}$ —— $\mathbf{F}$  的左伸长张量  
 $\mathbf{I}$ ——二阶单位张量  
 $m$ ——整数  
 $\mathbf{E}_m$ ——Seth-Hill 应变张量或 Seth 应变  
 $\mathbf{G}_m$ ——Doyle-Ericksen 应变张量  
 $w$ ——初始构形单位体积物质受到的外力所作的功  
 $\mathbf{T}^{(1)}$ ——与右伸长张量  $\mathbf{U}$  相共轭的应力张量, 即 Biot 应力张量  
 $\mathbf{T}^{(m)}$ ——Seth-Hill 应变张量  $\mathbf{E}_m$  的共轭应力  
 $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$ ——变形前四面体微元的 3 条边  
 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ——四面体微元变形后的 3 条边

$\mathbf{H}^a, \mathbf{H}^b, \mathbf{H}^c$ ——分别为与四面体微元的 3 条边  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  相对面上的作用力  
 $V$ ——四面体微元变形后的体积  
 $V_0$ ——四面体微元的初始体积  
 $U_C$ ——变形前单位体积物质的余能  
 $\pi_c$ ——总余能  
 $D$ ——区域  
 $S_u$ ——给定位移的边界  
 $\bar{\mathbf{u}}$ ——给定位移的边界  $S_u$  上的给定位移  
 $\boldsymbol{\sigma}_0$ ——位移边界条件上的未知力  
 $\mathbf{N}_i$ —— $\mathbf{P}_i$  与  $\mathbf{Q}_i$  间的中间标架, 即  $\mathbf{N}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_i$   
 $\mathbf{N}^i$ —— $\mathbf{N}_i$  的共轭向量  
 $\mathbf{u}_i^r$ ——位移梯度  $\mathbf{u}_i$  的转动部分  
 $\mathbf{u}_i^d$ ——位移梯度  $\mathbf{u}_i$  的变形部分  
 $\mathbf{e}$ ——沿转轴方向的单位向量  
 $\alpha$ ——转角  
 $U_C^d$ ——变形前单位体积物质变形部分的余能  
 $U_C^r$ ——变形前单位体积物质转动部分的余能

## 参考文献

- Hill R. On the constitutive inequalities for simple materials — I. *J. Mech. Phys. Solids.*, 1968, 16: 229~242
- Seth BR. Generalized Strain measure with applications to physical problems. In: Reiner M, Abir D eds *Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics*, Oxford: Pergamon. 1964. 162~172
- Guo ZH, Man CS. Conjugate stress and tensor equation  $\sum_{r=1}^m \mathbf{U}^{m-r} \mathbf{XU}^{r-1} = \mathbf{C}$ . *Int. J. Solid. Struct.*, 1992, 29: 2063~2076
- Hoger A. The stress conjugate to logarithmic strain. *Int. J. Solids Struct.*, 1987, 23: 1645~1656
- Guo ZH, Li JB, Xiao H, et al. Intrinsic solution to the  $n$ -dimensional tensor equation  $\sum_{r=1}^m \mathbf{U}^{m-r} \mathbf{XU}^{r-1} = \mathbf{C}$ . *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1994, 115: 359~364
- Xiao H. Unified explicit basis-free expressions for time rate and conjugate stress of an arbitrary Hill's strain. *Int. J. Solids Struct.*, 1995, 32: 3327~3340
- Dui GS, Ren QW. Conjugate stress of strain  $\mathbf{E}^{(3)} = \frac{1}{3}(\mathbf{U}^3 - \mathbf{I})$ . *Mech. Res. Comm.*, 1999, 26: 529~534
- Dui GS, Ren QW, Shen ZJ. Conjugate stresses to Seth's strain class. *Mech. Res. Comm.*, 2000, 27: 539~542
- Farahani K, Naghdabadi R. Conjugate stresses of the Seth-Hill strain tensors. *Int. J. Solids Struct.*, 2000, 37: 5247~5255
- Hill R. Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain. *Proc. R. Soc. London A*, 1970, 314: 457~472
- Hill R. Aspects of invariance in solid mechanics. *Adv. Appl. Mech.*, 1978, 18: 1~75

- 12 Farahani K, Naghdabadi R. Basis free relations for the conjugate stresses of the strains based on the right stretch tensor. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, 40: 5887~5900
- 13 Dui GS. Some basis-free formulae for time rate and conjugate stress of logarithmic strain tensor. *J. Elasticity*, 2005, 83: 113~151
- 14 Guo ZH, Dubey RN. Basic aspects of Hill's method in solid mechanics. *SM Arch.*, 1984, 9: 353~380
- 15 Scheilder M. Time rates of generalized strain tensors, Part I: compact formulas. *Mech. Mater.*, 1991, 11: 199~210
- 16 Ogden RW. Non-linear Elastic Deformations. Chichester: Ellis Horwood Ltd., 1984
- 17 Ogden RW. Non-linear Elastic Deformations. New York: Dover Publications, Inc. 1997
- 18 Lehmann Th, Guo ZH, Liang HY. The stress conjugacy between Cauchy stress and logarithm of the left stretch tensor. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1991, 10: 395~404
- 19 Lehmann Th, Liang HY. The stress conjugate to the logarithmic strain in  $V$ . *Z. Angew. Math. Mech.*, 1993, 73: 357~363
- 20 Nicholson DW. On the stress conjugate to Eulerian strains. *Acta Mechanica*, 2003, 165: 87~98
- 21 高玉臣. 固体力学基础. 北京: 中国铁路出版社, 1999
- 22 Gao YC. A new description of the stress state at a point with applications. *Arch. Appl. Mech.*, 2003, 73: 171~183
- 23 Gao YC. Elastostatic crack tip behavior for a rubber-like material. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 1990, 14: 219~231
- 24 Gao YC, Shi ZF. Large strain field near an interface crack tip. *Int. J. Fract.*, 1994, 69: 269~279
- 25 Gao YC, Durban D. The crack tip field in a rubber sheet. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1995, 14: 665~677
- 26 Liu B, Gao YC. The stress field near the notch tip of an incompressible rubber-like specimen under the condition of plane strain. *Science in China(Series A)*, 1995, 38: 1220~1231
- 27 Gao YC, Liu B. Stress singularity near the notch tip of a rubber-like specimen under tension. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1996, 15: 199~211
- 28 Liu B, Gao YC. A rubber cone under the tension of a concentrated force. *Int. J. Solids Struct.*, 1995, 32: 1485~1493
- 29 Gao YC, Gao TS. Notch-tip fields in rubber-like materials under tension shear mixed load. *Int. J. Fract.*, 1996, 78: 283~298
- 30 Gao YC. Large deformation field near a crack tip in rubber-like material. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 1997, 26: 155~162
- 31 Gao YC. Large strain analysis of a rubber wedge compressed by a line load at its tip. *Int. J. Engng. Sci.*, 1998, 36: 831~842
- 32 Gao YC, Gao TJ. Analytical solution to a notch tip field in rubber-like materials under tension. *Int. J. Solid. Struct.*, 1999, 36: 5559~5571
- 33 Gao YC, Chen SH. Asymptotic analysis and finite element calculation of a rubber cone under tension. *Acta Mechanica*, 2000, 141: 149~159
- 34 Gao YC, Gao TJ. Large deformation contact of a rubber notch with a rigid wedge. *Int. J. Solid. Struct.*, 2000, 37: 4319~4334
- 35 Gao YC, Zhou LM. Interface crack tip field of rubber materials. *Int. J. Solid. Struct.*, 2001, 38: 6227~6240
- 36 Gao YC. Asymptotic analysis of the nonlinear Boussinesq problem for a kind of incompressible rubber material (compression case). *J. Elasticity*, 2001, 64: 111~130
- 37 Gao YC, Chen SH. Large strain field near a crack tip in a rubber sheet. *Mech. Res. Comm.*, 2001, 28(1): 71~78
- 38 Gao YC, Mai YW. The contact problem of a rubber half-space dented by a rigid cone apex. *Arch. Appl. Mech.*, 2002, 72: 213~228
- 39 Gao YC, Mai YW. Asymptotic analysis of a rubber cone dented by a rigid cone. *Acta Mechanica*, 2002, 158: 199~214
- 40 Gao YC. Analysis of the interface crack for rubber-like materials. *J. Elasticity*, 2002, 66: 1~19
- 41 Gao YC, Qian HS. Analysis of the contact of a rubber notch with a rigid wedge. *Mech. Res. Comm.*, 2002, 29: 165~176
- 42 Gao YC. Complementary energy principle for large elastic deformation. *Science in China*, 2006, 49(3): 341~356
- 43 Chen SH, Gao YC. Asymptotic analysis and finite element calculation of a rubber notch contacting with a rigid wedge. *Acta Mechanica*, 2001, 147: 111~124
- 44 Shi ZF, Gao YC. Stress-strain field near the notch tip of a rubber sheet. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, 11: 169~177
- 45 Wang ZQ, Gao YC. Large strain field near a notch-tip under tension. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 1997, 26: 163~168
- 46 Zhou Z, Gao YC. Asymptotic character of mixed mode in plane deformation of crack in rubber-like material. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 1998, 30: 225~233
- 47 章梓茂, 汪越胜, 金明. 傲梅成尘香如故 —— 高玉臣学术文选. 北京: 北京交通大学出版社, 2007
- 48 Wong FS, Shield RT. Large plane deformations of thin elastic sheets of neo-Hookean material. *Z. Angew. Math. Phys.*, (ZAMP), 1969, 20: 176~199
- 49 Knowles JK. On some inherently nonlinear singular problems in finite elastostatics. In: Proceedings, Eighth U. S. National Congress of Applied Mechanics, U.C.L.A., 1978. 101~114
- 50 Knowles JK. Crack problems in finite elastostatics. In: Proceedings, Symposium on Mathematical problems in Fracture, SIAM-AMS, Proceedings, 1979, 12: 81~96
- 51 Sternberg E. Some recent advances in the application of nonlinear elastostatics to singular problem. In: Trends in Solid Mechanics 1979, Proceedings of the Symposium dedicated to the 65th Birthday of W. T. Koiter. Delft University Press, Sijthoff and Noordhoff International Publishers, 1979. 225~234
- 52 Sternberg E. On singular problems in linearized and finite elastostatics. In: Proceedings, Fifteenth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Toronto, Aug. 1980. 33~43
- 53 Abeyaratne R. Some finite elasticity problems involving crack-tips. In: J. T. Pindera, B. R. Krasnowski eds. Modelling Problems in Crack-tip Mechanics CFC10, University of Waterloo, August 24-26, 1983, Martinus Nijhoff, 1983. 3~24
- 54 Knowles JK, Sternberg E. An asymptotic finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack. *J. Elasticity*, 1973, 3: 67~107
- 55 Knowles JK, Sternberg E. Finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack: Reconsid-

- eration and higher-order results. *J. Elasticity*, 1974, 4: 201~233
- 56 Lund RA, Westmann RA. Finite element analysis of hyperelastic large deformation crack tip fields. *Int. J. Fract.*, 1990, 43: 257~270
- 57 Fowler GF. Finite plane and anti-plane elastostatic fields with discontinuous deformation gradients near the tip of a crack. *J. Elasticity*, 1984, 14: 287~328
- 58 Le KC. On the singular elastostatic field induced by a crack in a Hadamard material. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1992, 45: 101~117
- 59 Batra RC, Zhang JP. Analysis of deformations near a crack tip in a compressible nonlinear elastic material. *Eng. Fract. Mech.*, 1993, 46: 413~432
- 60 Knowles JK. Finite elastostatic fields with unbounded deformation gradients. In: finite elasticity. *ASME*, 1977, 27: 23~40
- 61 Wang NM, Oh H. Finite element analysis of crack problems in highly elastic materials. In: Fracture 1977, 3: ICF4, Waterloo, Canada, 1977. 467~484
- 62 Stephenson RA. The equilibrium field near the tip of a crack for finite plane strain of incompressible elastic materials. *J. Elasticity*, 1982, 12: 65~99
- 63 Abeyaratne R, Yang JS. Localized shear deformations near the tip of a mode-I crack. *J. Elasticity*, 1987, 17: 93~112
- 64 Quigley CJ, Parks DM. The finite deformation field surrounding a mode I plane strain crack in a hyperelastic incompressible material under small-scale nonlinearity. *Int. J. Fract.*, 1994, 65: 75~96
- 65 Hao TH. Near field behavior of in-plane crack extension in nonlinear incompressible material. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 1990, 12: 241~249
- 66 Herrmann JM. An asymptotic analysis of finite deformation near the tip of an interface crack. *J. Elasticity*, 1989, 21: 227~269
- 67 Herrmann JM. An asymptotic analysis of finite deformation near the tip of an interface crack: Part II. *J. Elasticity*, 1992, 29: 203~241
- 68 Le KC, Stumpf H. The singular elastostatic field due to a crack in rubberlike materials. *J. Elasticity*, 1993, 32: 483~222
- 69 Tarantino AM. Thin hyperelastic sheets of compressible material: field equations, airy stress function and an application in fracture mechanics. *J. Elasticity*, 1996, 44: 37~59
- 70 Tarantino AM. The singular equilibrium field at the notch-tip of a compressible material infinite elastostatics. *Z. Angew. Math. Phys.*, (ZAMP), 1997, 48: 370~388
- 71 Legrain G, Moës N, Verron E. Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the eXtended finite element method. *Int. J. Num. Method Eng.*, 2005, 63: 290~314
- 72 Geubelle PH, Knauss WG. Finite strain at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material: I. Homogeneous case. *J. Elasticity*, 1994, 35: 61~98
- 73 Tarantino AM. On extreme thinning at the notch tip of a Neo-Hookean sheet. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1998, 51: 179~190
- 74 Knowles JK, Sternberg E. Large deformations near a tip of an interface-crack between two Neo-Hookean sheets. *J. Elasticity*, 1983, 13: 257~293
- 75 Ravichandran G, Knauss WG. A finite elastostatic analysis of bimaterial interface cracks. *Int. J. Fract.*, 1989, 39: 235~253
- 76 Geubelle PH, Knauss WG. Finite strain at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material: II. Special bimaterial cases. *J. Elasticity*, 1994, 35: 99~137
- 77 Geubelle PH. Finite deformation effects in homogeneous and interfacial fracture. *Int. J. Solid. Struct.*, 1995, 32: 1003~1016
- 78 Ru CQ. Finite strain singular field near the tip of a crack terminating at a material interface. *Math. Mech. Solids*, 1997, 2: 49~73
- 79 Ru CQ. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials. *Acta Mechanica*, 2002, 156(3-4): 219~234
- 80 Knowles JK. A nonlinear effect in mode II crack problems. *Eng. Fract. Mech.*, 1981, 15: 469~476
- 81 Ru CQ. Finite deformation at the vertex of a bi-material wedge. *Int. J. Fract.*, 1997, 84: 325~350
- 82 Ru CQ. Non-elliptic deformation field near the tip of a mixed mode crack in a compressible hyperelastic material. *Int. J. Non-linear Mech.*, 2003, 38: 521~530
- 83 Boussinesq J. Application des Potentials à L'étude de L'équilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885
- 84 Simmonds JG, Warne PG. Notes on the nonlinearly elastic Boussinesq problem. *J. Elasticity*, 1994, 34: 69~82
- 85 Warne DAP, Warne PG, Lee MR. A summary of asymptotic finite deformation results for a point load on hyperelastic half-space. *Math. Mech. Solids*, 2002, 7: 451~482
- 86 Knowles JK. The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids. *Int. J. Fract.*, 1977, 13: 611~639
- 87 Warne DAP, Warne PG. An asymptotic finite deformation analysis for an isotropic incompressible hyperelastic half-space subjected to a tensile point load. *SIAM J. Appl. Math.*, 2001, 62: 107~128
- 88 Warne DAP, Warne PG. An asymptotic finite deformation analysis for an isotropic compressible hyperelastic half-space subjected to a tensile point load. *SIAM, J. Appl. Math.*, 2002, 63(1): 169~194
- 89 Antman SS. Regular and singular problems for large elastic deformations of tubes, wedges and cylinders. *Arch. Rat. Mech.*, 1983, 83: 1~52
- 90 Lee MR, Warne DAP, Warne PG. On an incompressible nonlinearly elastic half-space under a compressive point load. *Math. and Mech. Solids*, 2004, 9(1): 97~117
- 91 Hertz H. Über die berührung fester elastischer körper. *J. Keine Angew. Math.*, 1881, 92: 156~171, in German
- 92 Aleksandrov VM, Babeshko VA. On the pressure on an elastic half-space by a wedge-shaped stamp. *J. Appl. Math. Mech.*, 1972, 36: 78~83
- 93 Kipnis LA, Cherepanov GP. Contact problem of elasticity theory for a wedge. *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, 46(1): 110~115
- 94 Filippova LM. Three-dimensional contact problem for a prestressed elastic body. *J. Appl. Math. Mech.*, 1978, 42(6): 1183~1188
- 95 Hellinger E. Der allgemeine ansatz der machanik der kon-tinua. *Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften* 1914, 4: 602

- 96 Reissner E. On a variational theorem for finite elastic deformation. *J. Math. Phys.*, 1953, 32: 129~135
- 97 Levinson M. The complementary energy theorem in finite elasticity. *J. Appl. Mech.*, 1965, 32: 826~828
- 98 Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon, 1968,
- 99 Zubov LM. The stationary principle of complementary work in nonlinear theory of elasticity. *Prikl. Mat. Mech.*, 1970, 34: 228~232
- 100 Fraeijns de Veubeke BM. A new variational principle for finite elastic displacements. *Int. J. Eng. Sci.*, 1972, 10: 745~763
- 101 Koiter WT. On the principle of stationary complementary energy in the nonlinear theory of elasticity. *SIAM J. Appl. Math.*, 1973, 25: 424~434
- 102 Ogden RW. A note on variational theorems in non-linear elastostatics. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1975, 77: 609~615
- 103 Ogden RW. Inequalities associated with the inversion of elastic stress deformation relation and their implications. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1977, 81: 313~324
- 104 Guo ZH. The unified theory of variational principles in non-linear elasticity. *Arch. Mech.*, 1980, 32: 577~596
- 105 Atluri SN. On some new general and complementary energy theorems for the rate problems in finite strain, classical elasticity. *J. Struct. Mech.*, 1980, 8: 62~91
- 106 Gao DY, Strang G. Geometric nonlinearity: Potential energy, complementary energy and the gap function. *Quart. Appl. Math.*, 1989, 47: 487~504
- 107 Gao DY. Pure complementary energy principle and triality theory in finite elasticity. *Mech. Res. Comm.*, 1999, 26: 31~37
- 108 Gao DY. General analytical solutions and complementary variational principles for large deformation nonsmooth mechanics. *Meccanics*, 1999, 34: 169~198
- 109 Gao DY. Dual extremum principles in finite deformation theory with applications to post-buckling analysis of extended nonlinear beam model. *Appl. Mech. Rev.*, 1997, 50(11): part 2, S64~S71
- 110 Gao DY. Duality, triality and complementary extremum principles in non-convex parametric variational problems with applications. *IMA J. Appl. Math.*, 1998, 61: 199~235
- 111 Doyle TC, Ericksen JL. Nonlinear elasticity. *Adv. Appl. Mech.*, 1956, 4: 53~115
- 112 Biot MA. Mechanics of Incremental Deformations. New York: Wiley, 1965
- 113 Truesdell CA, Noll W. The Nonlinear Field Theories of Mechanics: Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1965
- 114 Green AE, Adkins JE. Large Elastic Deformations(2nd edition). Oxford: Oxford University Press, 1970
- 115 Flügge S. Tensor Analysis and Continuum Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1972
- 116 Wang CC, Truesdell CA. Introduction to Rational Elasticity. Leyden: Noordhoff, 1973
- 117 郭仲衡. 非线性弹性理论. 北京: 科学出版社, 1980
- 118 Ciarlet PG. Three-dimensional elasticity. Mathematical Elasticity, vol 1, Amsterdam: North Holland, 1988
- 119 Green AE, Zerna W. Theoretical Elasticity. New York: Dover Publications, 1992
- 120 Marsden JE, Hughes TJR. Mathematical Foundation of Elasticity. New York: Dover Publications, 1994
- 121 Antman SS. Problems of Nonlinear Elasticity, New York: Springer. 1995
- 122 Chadwick P. Continuum Mechanics. New York: Dover Publications, 1999
- 123 Holzapfel GA. Nonlinear Solid Mechanics. Chichester: Wiley, 2000
- 124 金明主编. 非线性连续介质力学教程. 北京: 清华大学出版社和北京交通大学出版社, 2005
- (北京交通大学土建学院力学所 金明 兑关锁  
朱玉萍 王志乔 译自  
Stresses, singularities and a complementary  
energy principle for large strain elasticity,  
*Applied Mechanics Reviews*,  
2008, 61: 030801-1~16)

## STRESSES, SINGULARITIES, AND A COMPLEMENTARY ENERGY PRINCIPLE FOR LARGE STRAIN ELASTICITY

GAO Yuchen      JIN Ming<sup>†</sup>      DUI Guansuo

Institute of Mechanics, School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China

**Abstract** This article reviews three aspects of large strain elasticity. First, various conjugate stress tensors to strain tensors are reviewed. Many researchers have studied the theory of large strain elasticity. Many stress tensors including the Cauchy stress tensor, the first and the second Piola-Kirchhoff stress tensor, and the Jaumann stress tensor have been proposed to describe the stress state at a point. Recently, the first author of this article proposed a concept of "base forces" to reveal the essence of stress state. By the concept of base

<sup>†</sup> E-mail: jinmingjinming@hotmail.com

forces, the description of the stress state becomes clearer than other stress tensors. We attempt to take base forces as a basic point of view to deal with a review in which different descriptions of stress state are discussed and compared. The governing equations and boundary conditions expressed by the base forces are given.

Second, this article reviews the solution of some singularity problems for large strain elasticity, i.e., problems of stress singularity at a crack or a notch tip, at the point of application of a concentrated force and at the vertex of contact in rubberlike materials. Methods of getting the singularity index of stress by using base forces are introduced and compared to earlier work. Complementary energy principles for large strain elasticity have eluded researchers for nearly 100 years. A review of some important advances in this is also given, and a new complementary energy principle related to base forces is introduced.

**Keywords** large strain elasticity, base forces, singularity problems, Complementary energy principles



高玉臣, 院士 (1937~2005), 1960 年北京大学数学力学系本科毕业, 1966 年清华大学工程力学系研究生班毕业, 1960~1963 年和 1968~1970 年在北京大学数学力学系任教, 1970~1994 年在哈尔滨工程大学任教, 1994 年~2005 年在北京交通大学任教, 1981~2002 年, 先后在美国西北大学、澳大利亚悉尼大学、爱德雷得大学、加拿大阿卡的亚大学、香港理工大学、香港城市大学及以色列和法国的多所大学做访问教授和高级研究顾问. 1986 年被聘为教授, 当年由国务院学位委员会批准为博士生导师, 1987 年加入中国共产党, 1988 年被评为国家级突出贡献专家, 任中国力学学会理事, 黑龙江省力学学会副理事长, 2001 年当选中国科学院院士. 主要研究领域为裂纹尖端场、复合材料细观力学及非线性连续力学; 其中关于裂纹尖端场方面的研究, 1987 年获国家自然科学三等奖; 关于复合材料细观力学方面的研究, 1996 年获教委科技进步一等奖、1999 年获国家自然科学三等奖. 共发表 96 篇学术论文和一部专著.



金明, 教授, 1963 年生, 1999 年毕业于北京大学力学与工程科学系固体力学专业, 获理学博士学位; 1999~2001 年在北方交通大学 (现北京交通大学) 土木建筑工程学院力学所做博士后研究工作. 出站后留校任教; 2006 年晋升为教授, 2007 年被评为博士生导师. 主要研究方向为: 非线性连续介质力学、计算力学、工程力学. 发表学术论文 30 余篇, 出版研究生教材一部.



兑关锁, 教授, 1963 年生, 美国 Houston 大学固体力学博士. 现为北京交通大学土建学院力学所教授, 博士生导师. 主要研究方向包括细观力学、连续介质力学、土力学、热动力学、计算力学、功能材料等方面. 近年来, 在 *J. Elast.*, *Int. J. Solids Struct.*, *Mathematics and Mechanics of solids*, *Mech.Rech.Comm.*, *Appl. Math. Mech.* 和中国科学等杂志发表论文 70 余篇, 已被 SCI 收录 30 余篇.