第 39 卷 第 1 期 力 学 进 展 Vol. 39 No. 1
2009 年 1 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Jan. 25, 2009

经典约束力学系统对称性与守恒量研究进展*

梅凤翔 †

北京理工大学力学系, 北京 100081

摘　要　介绍有关经典约束力学系统对称性与守恒量研究的近代发展. 提出经典力学发展的 5 个阶段以及待研究的 3 个问题. 介绍 Noether 对称性, Lie 对称性, 形式不变性, Lagrange 对称性, 共形不变性以及由它们导致的守恒量, 并提出若干问题.

关键词　经典力学, 对称性, 守恒量, 积分

1 引　言

1.1 经典力学的发展阶段

1687 年 Newton (1642∼1727) 出版《自然哲学的数学原理》, 总结出了物体运动的 3 个基本定律, 创立了经典力学的理论体系. 但是, Newton 主要研究自由质点的运动规律. 1743 年 d'Alembert (1717∼1783) 出版《动力学》, 将 Newton 运动定律推广到受约束物体的运动规律, 即著名的 d'Alembert 原理. 1788 年 Lagrange (1736∼1813) 出版《分析力学》, 吸收并发展了 Euler, d'Alembert 等人的研究成果, 提出了虚功原理, 动力学普遍方程和 Lagrange 方程, 创立了分析力学的理论体系, 使经典力学进入第 2 个发展阶段 —— Lagran 力学. 1834∼1835 年, Hamilton (1805∼1865) 在他的两篇长文 "论动力学中的一个普遍方法", "再论动力学中的普遍方法" 中提出了 Hamilton 原理, 建立了 Hamilton 正则方程, 经典力学进入第 3 个发展阶段 —— Hamilton 力学. 1894 年 Hertz 出版《新约束中描述的力学原理》, 提出了完整和非完整系统的术语, 从此经典力学发展到第 4 个阶段 —— 非完整力学. Hamilton 力学的进一步发展出现了两个分支, 一个是 Birkhoff 力学, 另一个是广义 Hamilton 力学. 1927 年 Birkhoff 出版《动力系统》, 书中提出一个积分变分原理和一类新型运动方程 [1]. 1983 年 Santilli 出版《理论力学基础 II, Hamilton 力学的 Birkhoff 推广》, 将 Birkhoff 的方程推广到含时间的系统, 指出 Birkhoff 力学是由 Hamilton 力学通过变换理论构造出的最一般可能的力学 [2]. Birkhoff 力学是经典力学发展的第 5 个阶段之一. 20 世纪 50 年代, 物理学家 Pauli, Martin 试图推广 Hamilton 力学而提出了广义 Hamilton 力学. 广义 Hamilton 力学的基本思想是构造一个 Hamilton 系统, 在这个系统中正则变量用非正则变量替代, 而这些非正则变量通常是系统的物理变量 [3]. 广义 Hamilton 力学是经典力学发展的第 5 个阶段之二.

以上的看法, 归纳为下面的框图, 见图 1.

看来, 经典力学在量子力学出现之后还在发展. 专著 [4] 在其前言中指出, Hamilton 系统理论犹如一颗参天大树, 已经根深叶茂, 成为当今非线性科学中一个最富成果而又生机勃勃的研究方向. 图 1 中的箭头表示发展方向, 虚线表示尚待研究的问题:

问题 1.1　非完整力学与 Birkhoff 力学的关系;

问题 1.2　Birkhoff 力学与广义 Hamilton 力学的关系;

问题 1.3　Birkhoff 力学还能向前发展吗?

收稿日期: 2008-06-26, 修改日期: 2008-08-16
* 国家自然科学基金 (10572021, 10772025) 资助项目
† E-mail: meifx@bit.edu.cn

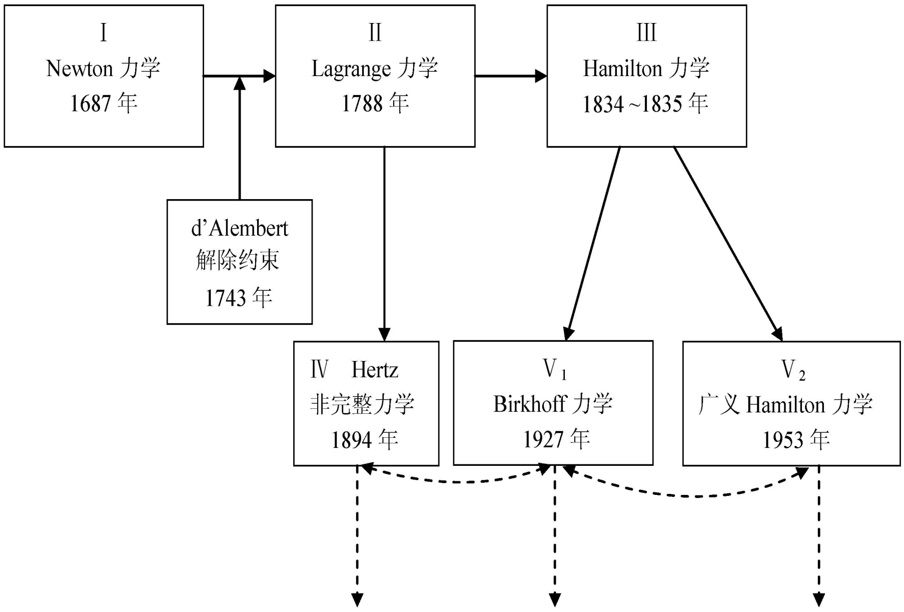

图 1 经典力学的发展阶段

1.2 经典力学的经典守恒量

Newton 力学通过力的分析可找到 3 个守恒量: 动量守恒, 动量矩守恒和机械能守恒. 这 3 个守恒律都具有明显的物理意义.

Lagrange 力学和 Hamilton 力学通过 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的表达式, 可找到循环积分和广义能量积分. 循环积分可以代表动量守恒, 可以代表动量矩守恒, 也可以既不是动量守恒也不是动量矩守恒. 广义能量积分可以是机械能守恒, 也可以不是. 因此, 分析力学得到的积分比 Newton 力学的守恒律更广, 更多, 但物理意义也稍欠明显了.

非完整力学中也有循环积分和广义能量积分 [5~7], 但限制条件增加了, 例如, 一个非完整系统所受主动力是有势的, 非完整约束方程相对速度是齐次的 (可以是非定常的), 则存在能量积分.

在 Birkhoff 力学中, 对自治和半自治系统, Birkhoff 函数是积分, 而 Birkhoff 函数可以是能量, 也可以是别的量. 这时积分的物理意义也欠明显.

1.3 经典力学的对称性与守恒量

寻求力学系统的积分是经典约束系统动力学的主要任务.

经典约束力学系统, 可分为完整系统, 非完整系统和 Birkhoff 系统等 3 类. 在这 3 类约束系统中, 除了具有明显物理意义, 稍欠明显物理意义的积分以外, 是否还存在更欠明显物理意义、甚至没有物理意义的积分呢? 如果能够找到一个理论, 用这个理论既能求得 Newton 力学的守恒律, 又能求得 Lagrange 力学和 Hamilton 力学的积分, 还能求得更多的积分, 那么这个理论就是一个好的理论. 1918 年德国女数学家 Noether 在她的论文 "不变变分问题"[8] 中提出了这个理论, 即 Noether 理论. 这个理论揭示了 Hamilton 作用量在群的无限小变换下的不变性与守恒量之间的潜在关系. Noether 理论为数理科学带来了一片光明 [9].

本文在文 [10] 的基础上, 就约束力学系统的 Noether 对称性, Lie 对称性, 形式不变性, Lagrange 对称性, 共形不变性等问题发表一些看法.

2 Noether 对称性

对称性亦称不变性. Noether 对称性是指 Hamilton 作用量在群的无限小变换下的一种不变性. 由 Noether 对称性可找到守恒量; 反之, 由守恒量可找到相应的 Noether 对称性.

有关 Noether 对称性的研究方法可分为分析方法和几何方法. 分析方法容易理解, 几何方法要用近代微分几何来描述而较难理解. Noether 对称性理论不仅可研究完整保守力学系统, 而且可用来研究完整非保守系统、非完整系统和 Birkhoff 系统等.

对于 Lagrange 系统

$$E_s(L) = 0,\ s = 1, \cdots, n \tag{1}$$

其中

$$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{2}$$

Noether 等式为

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \dot{G}_N = 0 \tag{3}$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{4}$$

这里 ξ_0, ξ_s 为无限小生成元, 而 Noether 守恒量有形式

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \text{常数} \tag{5}$$

如果由 Noether 等式可找到生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 $G_N = G_N(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, 那么便可由式 (5) 找到守恒量. 这类守恒量称为 Noether 守恒量.

对于带有非保守力的 Lagrange 系统, Noether 等式需增加与非保守力相关的项, 而守恒量仍有形式 (5)[11,12].

对非完整系统, 除 Noether 等式外, 生成元还要受到非完整约束的限制 [13~15], 守恒量仍有形式 (5). 对 Birkhoff 系统亦可建立 Noether 理论 [2,9,16~18].

什么是 Noether 对称性? 目前有两种解释. 例如, 对 Lagrange 系统, 一种理解为 Lagrange 函数的不变性 [19,20], 另一种理解为 Hamilton 作用量的不变性 [6,9,11,14,21]. 与 Noether 对称性相关, 可提出如下问题.

问题 2.1 对 Noether 对称性的理解, 哪一个更为合理?

问题 2.2 Noether 等式中出现的加速度能否用微分方程表为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数?

问题 2.3 由 Noether 对称性导出的守恒量被称为 Noether 守恒量. 那么什么叫非 Noether 守恒量?

在对称性与守恒量的研究中, Noether 对称性显得简单而直接: 由 Noether 对称性一定能够找到 Noether 守恒量, 反之亦然. 当然, 一般说来, 要找到所有 Noether 对称性也是不容易的, 因为要解 Killing 方程那样的偏微分方程. 有关 Noether 对称性的几何方法已有相当多的文献, 如文献 [19,20,22~25], 以及文献 [23,26] 给出的参考文献.

3 Lie 对称性

微分方程在无限小变换下的不变性, 称为 Lie 对称性.

关于 Lie 群对微分方程的应用已有一些专著出版, 如文献 [27~29]. 1979 年 Lutzky 将 Lie 理论应用于力学系统的运动微分方程 [30]. Prince 等 [31] 研究了经典 Kepler 问题的 Lie 对称性. 赵跃宇 [32] 研究了非保守系统的 Lie 对称性与守恒量. 文献 [33~39] 分别研究了非完整系统、准坐标下力学系统、变质量系统、Birkhoff 系统、广义力学系统的 Lie 对称性. 但是, 上面这些工作都是由 Lie 对称性通过 Noether 对称性而间接导出的 Noether 守恒量.

由微分方程出发用 Lie 对称性可直接导出一类守恒量. 这起源于 Hojman1992 年的工作 [40], 他既不用 Lagrange 函数也不用 Hamilton 函数来构造了一类新守恒量. 由他导出的守恒量被人称为 Hojman 型守恒量 [41~47].

对 Lagrange 系统 (1), 将其展开为

$$\ddot{q}_s = F_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{6}$$

Lie 对称性的确定方程表为

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 F_s = X^{(1)}(F_s) \tag{7}$$

在时间不变的无限小变换下, 式 (7) 成为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s = \frac{\partial F_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k \tag{8}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + F_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{9}$$

Hojman 指出, 如果存在某函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足

$$\frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0 \tag{10}$$

则系统存在守恒量

$$I_H = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right) = \text{常数} \tag{11}$$

对其他约束力学系统有类似结果.

由 Lie 对称性 (8) 求守恒量式 (11) 是有很大困难的. 甚至有文章指出, Hojman 得到的守恒量对所有 Noether 对称性都是平凡的 [48].

Hojman 型守恒量的优点在于直接从微分方程出发, 而不必知道 Lagrange 函数或 Hamilton 函数就可以找到守恒量. 其缺点在于有较多限制, 而因这些限制就增大了求守恒量的难度.

Noether 对称性通过 Lie 对称性可间接地导出 Hojman 型守恒量.

有关 Lie 对称性可提出如下问题.

问题 3.1 文献 [48] 的结果是正确的吗?

问题 3.2 将 Hojman 型守恒量当作 Noether 守恒量, 则可找到 Noether 对称性. 那么, 这类守恒量叫做 Noether 守恒量, 还是非 Noether 守恒量?

4 形式不变性

形式不变性是指微分方程中的动力学函数, 如 Lagrange 函数, Hamilton 函数, 广义力, 约束方程中的函数, Birkhoff 函数等, 在经历无限小变换后仍然满足原来方程的一种不变性.

对 Lagrange 系统 (1), 变换后的 Lagrange 函数为

$$L^* = L\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = L\left(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\right) + \varepsilon X^{(1)}\left(L\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{12}$$

将式 (12) 代入方程 (1), 忽略 ε^2 及更高阶小项, 得到判据方程

$$E_s\left\{X^{(1)}\left(L\right)\right\} = 0 \tag{13}$$

如果存在规范函数 $G_F = G_F\left(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\right)$ 满足结构方程

$$\tilde{X}^{(1)}\left(L\right)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + \tilde{X}^{(1)}\left\{\tilde{X}^{(1)}\left(L\right)\right\} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_F = 0 \tag{14}$$

其中

$$\tilde{X}^{(1)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{15}$$

则系统形式不变性导致守恒量

$$I_F = \tilde{X}^{(1)}\left(L\right)\xi_0 + \frac{\partial \tilde{X}^{(1)}\left(L\right)}{\partial \dot{q}_s}\left(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0\right) + G_F = \text{常数} \tag{16}$$

对其他约束力学系统, 结构方程有变化, 而守恒量总有形式 (16).

形式不变性的最初结果, 于 2000 年在北京理工大学学报英文版上发表 [49]. 其后, 研究了形式不变性与 Lie 对称性, 形式不变性与 Noether 对称性的关系, 以及各类约束力学系统的形式不变性与守恒量 [50~78].

有的文章称形式不变性为 Mei 对称性, 如文献 [50~57,59~63,68,74,76,77].

形式不变性的优点在于从力学意义上较易理解. 缺点在于由式 (13), (14) 找到相应的守恒量式 (16) 较困难.

由 Noether 和 Lie 对称性通过形式不变性可导出守恒量 (16).

由形式不变性通过 Noe- ther 对称性可找到 Noether 守恒量, 通过 Lie 对称性可找到 Hojman 型守恒量 [78].

对形式不变性提出如下问题.

问题 4.1 将形式不变性导致的守恒量 (16) 当作 Noether 守恒量, 则可找到 Noether 对称性. 那么这类守恒量叫做 Noether 守恒量, 还是非 Noether 守恒量?

问题 4.2 形式不变性与文献 [19,20] 理解的 Noether 对称性有什么关系?

以上 3 种对称性之间的关系, 可用图 2 表示, 图中 NS 为 Noether 对称性, LS 为 Lie 对称性, FI 为形式不变性.

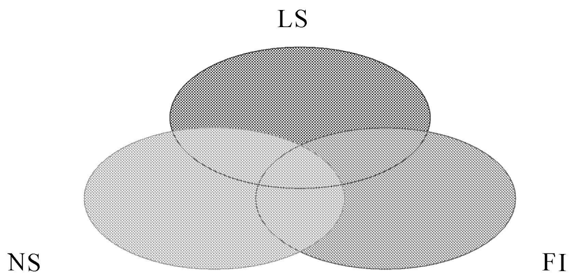

图 2 NS, LS, FI 之间的关系

5 Lagrange 对称性

在专著 [2] 中有一个例子, 指出下面的 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 - q^2\right) \tag{17}$$

$$L_1^* = \frac{1}{6}\dot{q}^3\cos t + \frac{1}{2}q\dot{q}^2\sin t - q^2\dot{q}\cos t \tag{18}$$

$$L_2^* = 2\frac{\dot{q}}{q}\arctan\frac{\dot{q}}{q} - \ln\left(\dot{q}^2 + q^2\right) \tag{19}$$

都表示一维谐振子

$$\ddot{q} + q = 0 \tag{20}$$

式 (17) 有直接解析表达

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \left(\ddot{q} + q\right)_{SA} \tag{21}$$

其余的两个有间接解析表达

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L^*}{\partial q}=\left[I\left(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\right)\left(\ddot{q}+q\right)_{SA}\right]_{SA} \tag{22}$$

此时 I 是积分

$$I_1=\dot{q}\cos t+q\sin t=c_1 \tag{23}$$

$$I_2=\left(\dot{q}^2+q^2\right)^{-1}=c_2 \tag{24}$$

这样, 就说式 (18) 与 (17), 式 (19) 与 (17) 具有 Lagrange 对称性, 并由这种对称性找到了守恒量式 (23), (24).

1966 年 Currie 和 Saletan 研究了单自由度系统等价 Lagrange 函数问题, 并指出在此情形下存在守恒量 [79]. 1981 年 Hojman 和 Harleston 将此结果推广到多自由度系统 [80]. 专著 [9] 给出完整非保守系统 Lagrange 对称性的定义, 判据以及导致的守恒量形式. 文献 [81] 研究了非完整系统的 Lagrange 对称性并导出了守恒量. 对 Birkhoff 系统也可给出类似结果, 并称为 Birkhoff 对称性 [82].

Lagrange 对称性不同于 Noether 对称性, Lie 对称性和形式不变性, 它不需要无限小变换, 而只需找到等价 Lagrange 函数, 便可找到守恒量. 类似地, 对 Birkhoff 系统, 只要找到等价 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组, 便可找到守恒量.

有关 Lagrange 对称性可提出如下问题.

问题 5.1　已知 Lagrange 系统的一个 Lagrange 函数, 与其等价的 Lagrange 函数如何构造?

问题 5.2　已知 Birkhoff 系统的一组动力学函数, 与其等价的动力学函数如何构造?

问题 5.3　将 Lagrange 对称性导致的守恒量当作 Noether 守恒量, 便可找到相应的 Noether 对称性, 那么这类守恒量应叫作 Noether 守恒量, 还是非 Noether 守恒量?

6　共形不变性

专著 [18] 研究了 Birkhoff 系统的共形不变性, 并给出共形不变性是 Lie 对称性的充分必要条件. 主要结果如下.

对 Birkhoff 方程

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=0 \tag{25}$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}} \tag{26}$$

为 Birkhoff 张量, 这里 $B=B\left(t,\boldsymbol{a}\right)$ 为 Birkhoff 函数, $R_{\mu}\left(t,\boldsymbol{a}\right)$ 称为 Birkhoff 函数组. 令无限小变换有形式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0\left(t\right),\ a^{\mu^*}=a^{\mu}+\varepsilon\xi_{\mu}\left(t,\boldsymbol{a}\right) \tag{27}$$

并令

$$F_{\mu}=\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t} \tag{28}$$

共形不变性表为

$$X^{(1)}F_{\mu}=\ \delta_{\mu}^{\nu}F_{\nu},\ \mu,\nu=1,\cdots,2n \tag{29}$$

其中共形乘子矩阵的行列式不为零, 即

$$\det\left(\delta_{\mu}^{\nu}\right)\neq 0 \tag{30}$$

文献 [18] 给出如下结果

变换 (27) 是 Birkhoff 方程的 Lie 对称性同时又是共形不变性, 其充分必要条件是满足等式

$$\begin{aligned}&\delta_{\mu}^{\rho}=\left(S\Omega_{\mu\nu}\right)\Omega^{\nu\rho}+\Omega_{\mu\nu}\frac{\partial\xi_{\nu}}{\partial a^{l}}\Omega^{l\rho}-\delta_{\mu}^{\rho}\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\\&\mu,\nu,l,\rho=1,\cdots,2n\end{aligned} \tag{31}$$

其中

$$S=\left(\xi_{\mu}-\dot{a}^{\mu}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial a^{\mu}} \tag{32}$$

如能找到 Birkhoff 系统 Lie 对称性的生成元 $\xi_0=\xi_0\left(t\right)$, $\xi_{\mu}=\xi_{\mu}\left(t,\boldsymbol{a}\right)$, 那么由式 (31) 可找到共形乘子 δ_{μ}^{ρ}. 同时, 由于 Birkhoff 系统的 Noether 对称性一定是 Lie 对称性 [78], 因此, 可先研究系统 Noether 对称性, 再将其代入式 (31) 得到共形乘子 δ_{μ}^{ρ}, 最后由 Noether 定理求得 Noether 守恒量. 这样, 就建立了共形不变性与守恒量之间的关系.

有关共形不变性可提出如下问题.

问题 6.1　研究各类经典约束力学系统的共形不变性与守恒量.

问题 6.2　研究共形不变性与 Noether 对称性的关系.

7　结束语

本文所指经典约束力学系统仅限于有限自由度力学系统, 未涉及连续介质系统, 也未涉及场论等物理系统. 本文就经典约束力学系统的对称性与守恒量研究的进展情况表达了一些看法. 同时就未来研究提出了一些问题, 即问题 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 5.3, 6.1, 6.2 等.

这些问题的解决将有助于经典约束系统动力学的进一步发展.

参 考 文 献

1 Birkhoff G D. Dynamical Systems. Providence RI: AMS College Publ, 1927
2 Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ. NewYork: Springer-Verlag, 1983
3 刘端, 梅凤翔, 陈滨. 分析力学的数学方法. 见: 陈滨. 现代数学理论与方法在动力学、振动与控制中的应用. 北京: 科学出版社, 1992
4 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1994
5 Неймарк Ю И, Фуфаев Н А. Динамика Неголономных Систем Москва: Наука, 1967
6 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985
7 梅凤翔. 非完整系统力学积分方法的某些进展. 力学与实践, 1991, 21(1): 83～95
8 Noether E. Invariante Xariationsprobleme. *Nachr Kal Ges Wiss Göttingen Math Phys K I*, 1918, 235～237 (Noether E. 不变变分问题. 梅凤翔译. 力学进展, 2005, 35(1): 116～124)
9 赵跃宇, 梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量. 北京: 科学出版社, 1999
10 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与不变量. 力学进展, 1993, 23(3): 360～372
11 Djukić Dj S, Vujanović B D. Noether's theory in classical nonconservative mechanics. *Acta Mech*, 1975, 23: 17～27
12 Bahar L Y, Kwatny H G. Extension of Noether's theorem to constrained nonconservative dynamical systems. *Int J Non-Linear Mech*, 1987, 22: 125～138
13 罗勇, 赵跃宇. 非线性非完整约束系统的广义 Noether 定理. 北京工业学院学报, 1986, 6(3): 41～47
14 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社, 1993
15 刘端. 非完整非保守动力学系统的守恒律. 力学学报, 1989, 21(1): 75～83
16 Mei F X. The Noether's theory of Birkhoffian systems. *Science in China*, Serie A, 1993, 36(12): 1456～1467
17 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 吴惠彬. Birkhoff 系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1996
18 Галиуллин А С, Гафаров Г Г, Малайшка Р П, Хван А М. Анали тическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. Москва: УФН, 1997
19 Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1980
20 José J V, Saletan E J. Classical Dynamics: A Contemporary Approach. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1998
21 Bogoliubov N N, Shirkov D V. Introduction to the Theory of Quantized Fields. NewYork: Wiley, 1958
22 Crampin M. Tangent bundle geometry for Lagrangian dynamics. *J Phys A*: *Math Gen*, 1983, 16: 3755～3772
23 Marsden J E, Ratiu T S. Introduction to Mechanics and Symmetry. NewYork: Springer-Verlag, 1994
24 De León M, Rodrigues P R. Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics. Amsterdam: NHPC, 1989
25 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991
26 郭永新, 罗绍凯, 梅凤翔. 非完整约束系统几何动力学研究进展: Lagrange 理论及其它. 力学进展, 2004, 34(4): 477～492
27 Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. NewYork: Springer-Verlag, 1986
28 Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations. NewYork: Springer-Verlag, 1989
29 Ibragimov N H. CRC Handbook of Lie Analysis of Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 1994
30 Lutzky M. Dynamical symmetries and conserved quantity. *J Phys A* : *Math Gen*, 1979, 12(7): 973～981
31 Prince G E, Eliezer C J. On the symmetries of the classical Kepler problem. *J Phys A* : *Math Gen,* 1981, 14: 587～596
32 赵跃宇. 非保守力学系统的 Lie 对称性与守恒量. 力学学报, 1994, 26(3): 380～384
33 Wu R H, Mei F X. On the Lie symmetries of the nonholonomic mechanical systems. *J of BIT*, 1997, 6(3): 229～235
34 梅凤翔, 吴润衡, 张永发. HeTaeB 非完整系统的 Lie 对称性与守恒量. 力学学报, 1998, 30(4): 468～474
35 Fu J L, Liu R W, Mei F X. Lie symmetries and conserved quantities of holonomic mechanical system in terms of quasi-coordinates. *J of BIT*, 1998, 7(3): 215～220
36 Mei F X. Lie symmetries and conserved quantities of holonomic variable mass systems. *Appl Math Mech*, 1999, 20(6): 619～634
37 Mei F X, Zhang Y F, Shang M. Lie symmetries and conserved quantities of Birkhoffian system. *Mech Res Comm*, 1999, 26(1): 7～12
38 乔永芬, 赵淑红. 准坐标下广义力学系统的 Lie 对称性定理及其逆定理. 物理学报, 2001, 50(1): 1～7
39 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京: 科学出版社, 1999
40 Hojman S A. A new conservation law constructed without using either Lagrangians and Hamiltonians. *J Phys A*: *Math Gen*, 1992, 25: L291～295
41 梅凤翔. 完整力学系统的 Hojman 守恒量 (I). 江西师范大学学报, 2003, 27(3): 193～195
42 罗绍凯, 梅凤翔. 非完整力学系统的非 Noether 守恒量—— Hojman 守恒量. 物理学报, 2004, 53(3): 6～10
43 乔永芬, 赵淑红, 李仁杰. 准坐标下完整力学系统的非 Noether 守恒量—— Hojman 定理的推广. 物理学报, 2004, 53(3): 2035～2039
44 张毅, 范存新, 葛伟宽. Birkhoff 系统的一类新型守恒量. 物理学报, 2004, 53(11): 3644～3647
45 方建会, 张鹏玉. 相空间中变质量力学系统的 Hojman 守恒量. 物理学报, 2004, 53(12): 4041～4044
46 张宏彬, 陈立群, 刘荣万, 顾书龙. 广义 Hojman 定理. 物理学报, 2004, 54(6): 2489～2493
47 贾利群, 张耀宇, 郑世旺. 事件空间中非 Chetaev 型非完整约束系统的 Hojman 守恒量. 物理学报, 2007, 56(2): 649～654
48 Pillay T, Leach PGL. Comment on a theorem of Hojman and its generalizations. *J Phys A*: *Math Gen*, 1996, 26: 6999～7002
49 Mei F X. Form invariance of Lagrange system. *J of BIT*, 2000, 9(2): 120～124
50 罗绍凯. Hamilton 系统的 Mei 对称性, Noether 对称性和 Lie 对称性. 物理学报, 2003, 52(12): 2941～2944
51 罗绍凯. 奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性, Noether 对称性和 Lie 对称性. 物理学报, 2004, 53(1): 5～10
52 方建会, 彭勇, 廖永潘. 关于 Lagrange 系统和 Hamilton 系统的 Mei 对称性. 物理学报, 2005, 54(2): 496～499
53 方建会, 廖永潘, 彭勇. 相空间中力学系统的两类 Mei 对称性与守恒量. 物理学报, 2005, 54(2): 500～503
54 楼智美. 二维运动电荷的 Mei 对称性. 物理学报, 2005, 25(3): 1015～1017
55 张毅, 葛伟宽. 相对论性力学系统的 Mei 对称性导致的新守恒量. 物理学报, 2005, 54(4): 1464～1467
56 张毅. 广义经典力学系统的对称性与 Mei 守恒量. 物理学报, 2005, 54(7): 2980～2984

57 顾书龙, 张宏彬. Vacco 动力学方程的 Mei 对称性、Lie 对称性和 Noether 对称性. 物理学报, 2005, 54(9): 3983∼3986
58 葛伟宽, 张毅. 完整力学系统的 Lie- 形式不变性. 物理学报, 2005, 54(11): 4985∼4988
59 方建会, 王鹏, 丁宁. 相空间中力学系统的 Lie-Mei 对称性. 物理学报, 2006, 55(8): 3821∼3824
60 贾利群, 郑世旺. 带有附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性. 物理学报, 2006, 55(8): 3829∼3832
61 顾书龙, 张宏彬. Emden 方程的 Mei 对称性, Lie 对称性和 Noether 对称性. 物理学报, 2006, 55(11): 5594∼5597
62 葛伟宽. 一类动力学方程的 Mei 对称性. 物理学报, 2007, 56(1): 1∼4
63 郑世旺, 贾利群. 非完整系统的 Tzénoff 方程的 Mei 对称性和守恒量. 物理学报, 2007, 56(2): 661∼665
64 Wang S Y, Mei F X. On the form invariance of Nielsen equations. *Chin Phys*, 2001, 10(5): 373∼375
65 Wang S Y, Mei F X. Form invariance and Lie symmetry of equations of nonholonomic systems. *Chin Phys*, 2002, 11(1): 5∼8
66 Zhang Y, Mei F X. Form invariance for systems of generalized classical mechanics. *Chin Phys*, 2003, 12(10): 1058∼1061
67 Qiao Y F, Zhao S H, Li R J. Form invariance and conserved quantities of Nielsen equations of relativistic variable mass nonholonomic systems. *Chin Phys*, 2004, 13(3): 292∼296
68 Li H, Fang J H. Lie symmetry and Mei symmetry of a rotational relativistic system in phase space. *Chin Phys*, 2004, 13(8): 1187∼1190
69 Qiao Y F, Li R J, Ma Y S. Form invariance of Raitzin's canonical equations of a nonholonomic mechanical system. *Chin Phys*, 2005, 14(1): 12∼16
70 Mei F X, Xu X J. Form invariances and Lutzky conserved quantities for Lagrange systems. *Chin Phys*, 2005, 14(3): 449∼451
71 Wu H B. Lie-form invariance of Lagrange systems. *Chin Phys*, 2005, 14(3): 452∼454
72 Lou Z M. The parametric orbits and the form invariance of three-body in one-dimension. *Chin Phys*, 2005, 14(4): 660∼662
73 Xia L L, Wang J, Hou Q B, Li Y C. Lie-form invariance of nonholonomic mechanical systems. *Chin Phys*, 2006, 15(3): 467∼469
74 Zheng S W, Jia L Q, Yu H S. Mei symmetry of Tzénoff equations of holonomic system. *Chin Phys*, 2006, 15(7): 1399∼1402
75 Wang J, Li Y C, Xia L L, Hou Q B. Lie-form invariace of nonholonomic systems with unilateral constraints. *Chin Phys*, 2006, 15(8): 1665∼1668
76 Liu H J, Fu J L, Tang Y F. A series of non-Noether conservative quantities and Mei symmetries of nonconservative systems. *Chin Phys*, 2007, 16(3): 599∼600
77 Fang J H, Ding N, Wang P. A new type of conserved quantity of Mei symmetry for Lagrange system. *Chin Phys*, 2007, 16(4): 887∼890
78 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京: 北京理工大学出版社, 2004
79 Currie D F, Saletan E J. q-equivalent particle Hamiltonians I. The classical one-dimensional case. *J Math Phys*, 1966, 7(6): 967∼974
80 Hojman S, Harleston H. Equivalent Lagrangians: multidimensional case. *J Math Phys*, 1981, 22(7): 1414∼1419
81 Mei F X, Wu H B. Symmetry of Lagrangians of nonholonomic systems. *Phys Lett A*, 2008, 372: 2141∼2147
82 Mei F X, Gang T Q, Xie J F. A symmetry and a conserved quantity for the Birkhoff system. *Chin Phys*, 2006, 15(8): 1678∼1681

ADVANCES IN THE SYMMETRIES AND CONSERVED QUANTITIES OF CLASSICAL CONSTRAINED SYSTEMS*

MEI Fengxiang †

Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract　This paper summarized the recent progress in the symmetries and conserved quantities of classical constrained mechanical systems. The five stages of classical mechanics are introduced and the three problems are proposed. The Noether symmetry, the Lie symmetry, the form invariance, the symmetry of Lagrangians, the conformal invariance and the conserved quantities of the systems are dsicussed, and some future research problems are proposed.

Keywords　classical mechanics, symmetry, conserved quantity, integral

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10572021, 10772025)

† E-mail: meifx@bit.edu.cn