第 38 卷 第 6 期 力 学 进 展 Vol. 38 No. 6
2008 年 11 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Nov. 25, 2008

# 图论与复杂网络*

段志生 †

北京大学工学院力学与空天技术系, 湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871

**摘 要** 近 10 年来迅猛发展起来的复杂网络理论为研究复杂性与复杂系统科学提供了一个重要支撑点, 它高度概括了复杂系统的重要特征, 无论是在理论还是在应用方面都具有很强的生命力, 而且在各个方面都得到了很大发展. 重点讨论图论在复杂网络中的应用, 特别是代数图论在复杂网络同步问题中的应用. 首先给出一些图的最小非零与最大特征值以及同步能力的估计, 并且讨论了子图与图特征向量在同步能力估计中的作用. 其次以两个简单图指出同步能力与网络结构参数的关系复杂, 并给出补图与加边对同步研究的意义, 然后给出图运算在复杂网络同步中的作用. 最后从图论与控制理论角度展望了复杂网络领域未来可能的发展方向.

**关键词** 复杂网络, 同步, 图论, 子图, 补图, 图运算

## 1 引 言

复杂性与复杂系统是 21 世纪的重点研究课题 [1~7], 复杂网络高度概括了复杂系统的重要特征：由多个基本单元（或节点）与它们之间的相互作用（即连线）组成. 典型的例子有互联网、神经网络和各类生物网络、科研合作网、交通网、电力网等等. 一方面, 不同的网络各有其自身的特点与演化机制, 所以复杂网络是目前公认比较合适的复杂系统建模形式. 另一方面, 各种复杂网络也有很多相似性质, 它们能体现复杂系统的共性, 为复杂系统提供了一些有代表性的基本范式. 所以复杂网络的研究成为了近 10 年来全世界不同学科（包括力学、物理、生物、系统控制、工程技术、经济、社会、军事等）科学家研究的热点课题, 出版了大量的专著与文献 [8~21]. 实际上在稳定性与控制理论领域, 致力于对众多子系统组成的大系统理论的研究从 20 世纪 60 年代起已经有近 50 年的历史 [22~28], 但由于模型的一般化, 以及研究手段的限制, 在建立起基本理论框架后, 一直未有重大进展. 随着计算机科学、以还原论与整体论相结合的复杂性科学的迅猛发展, 以及不同学科间的不断交叉融合, 特别是复杂网络理论与统计物理相结合后, “小世界” 与 “无尺度 (scale-free)” 等统计性质的发现 [8,9] 极大地促进了复杂网络研究的发展. 随着研究的不断深入, 复杂网络的多个研究方面都取得了重要进展, 如复杂网络建模与拓扑结构 [10~12,29~36], 网络涌现行为 [8,9,37,38], 复杂网络鲁棒性与脆弱性 [39~42] 等. 在复杂网络群体行为的研究中, 同步行为由于其重要的现实意义及其普遍性受到了广泛关注并且已经有很多年的研究历史 [43~50]. 对同步的研究最早可以追溯到 1665 年荷兰物理学家 Huygens(惠更斯) 对两个挂钟同步摆动的观察, 随后人们在自然界、物理、化学、生物、工程技术等领域看到和实现了各种各样的同步现象 [43~49]. 最初对同步的研究主要集中在简单耦合关系形成的网络同步行为上, 随着研究的不断深入, 特别是主稳定函数方法 [50] 与复杂网络结构相结合, 复杂网络同步问题得到了广泛研究 [51~64], 例如特殊耦合结构网络同步 [54~64], 物理学中的相位同步与频率同步 [65,66], 有向加权网络同步 [67~69], 聚类同步 [70~72], 时滞网络同步 [73~75] 等. 对于一个给定的复杂网络, 其结构参数: 平局距离, 度分布, 介数, 聚类系数等都比较容易确定, 而其同步能力指标与其对应的图 Laplace 矩阵特征值相关, 是不容易确定的, 那么网络结构

收稿日期: 2008-06-30, 修回日期: 2008-07-21
* 国家自然科学基金 (60674093) 与教育部重点基金 (107110) 联合资助项目
† E-mail: duanzs@pku.edu.cn

参数与同步能力有什么关系? 这一关系引起了很多学者的兴趣, 特别是统计物理方面的学者给出了很多统计结果 [76~82], 但是目前为止尚未发现一个结构参数能完全反应网络同步能力. 复杂网络同步品质与同步能力的其它指标也得到了相应的研究 [83~85], 基于对同步能力的评价, 给出了很多改善网络同步能力的方法 [86~91]. 复杂网络同步控制, 特别是牵制控制 (pinning control) 也得到了深入研究 [92~96]. 与复杂网络同步能力直接相关的另一个概念是同步化区域, 该区域越大则同步能力越强, 并且该区域可以是不连通的, 这表明随着耦合强度的变化可以出现间歇性同步现象 [97~100], 同时研究同步化区域与复杂网络对应图 Laplace 矩阵特征值可以完整地体现同步能力问题. 随着复杂网络理论研究的深入发展, 复杂网络应用方面的研究也得到了广泛关注, 特别是与生物代谢网络、脑网络、神经网络相结合取得了大量研究成果 [101~109], 与生物传染病相结合, 在流行病传播与免疫控制方面得到了很多有意义的成果 [110~118], 在交通网、社会经济网、通讯网、传感器网络等方面也得到了不少应用 [119~128], 综述文献 [129] 进一步阐述了复杂网络多方面的应用.

实际上, 图论与复杂网络有着天然的联系, 对于一个复杂网络, 如果不考虑其动态特征, 每个网络节点视为一个点, 节点间的连接关系视为边, 则复杂网络就是一个图. 与网络相应的图包含了网络的全部结构特征, 如平均距离、度分布、介数、聚类系数等, 并且小世界、无尺度 (scale-free) 等众所周知的网络统计特征也包含在图里面. 深入研究图的特征, 包括与其相应的 Laplace 矩阵特征值、以及子图与补图的特征等对于复杂网络建模, 以及理解复杂网络动态行为有重要意义. 特别是对于复杂网络建模问题, 完全可以归结为对各色各样图的建立, 一旦建立了图之后, 对复杂网络结构特征的研究完全可以归结为对图特征的研究上 [11,12,130,131]. 图论起始于欧拉的七桥问题, 但自欧拉 1736 年解决七桥问题之后, 相当长一段时间内图论并未得到足够的发展, 20 世纪 60 年代 Erdös 与 Rényi 建立的随机图论开创了基于图论的复杂网络理论的系统性研究 [132], 但复杂网络仍然没有得到大规模的发展, 直到小世界与无尺度性质的发现, 并且与动力学相结合, 复杂网络得到了前所未有的空前发展. 复杂网络动态行为, 特别是同步行为与相应图的 Laplace 矩阵特征值密切相关, 而在图论中, 基于图 Laplace 矩阵的代数图论已经有很多年的发展历史 [133~142], 所以明显地代数图论可以用于研究复杂网络同步问题, 并且近年来这方面已经出现不少有意义的成果 [143~167]. 下面着重介绍这方面的研究成果.

## 2 图的最小非零与最大特征值以及同步能力估计

考虑一个以 $N$ 个相同的动力系统 $\dot{x} = f(x)$ 作为节点构成的耗散耦合动态网络 (diffusively coupled dynamical network)

$$\dot{x}_i = f(x_i) - c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Gamma(x_j),\ i = 1, 2, \cdots, N \tag{1}$$

其中, $f: D \subseteq R^n \to R^n$ 是一定义好的函数 (通常是非线性例如混沌系统函数), $x_i \in D$ 为节点 $i$ 的状态向量, 常数 $c > 0$ 为网络的耦合强度, $\Gamma: D \to R^n$ 为各个节点状态变量之间的内耦合函数, $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in R^{N\times N}$ 表示网络的拓扑结构, 称为外耦合矩阵, 满足耗散耦合条件 $\sum_j a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的行和为零, 故当所有节点状态相同时, 方程 (1) 右端的耦合项自动消失. 外耦合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以看作一个与网络对应的图的 Laplace 矩阵, 如果 $\boldsymbol{A}$ 对应于一个无向无权图, 则 $a_{ij} = a_{ji} = -1$ 表示节点 $i$ 和节点 $j$ $(i \neq j)$ 之间有连接, 无连接时有 $a_{ij} = a_{ji} = 0$ $(i \neq j)$, $\boldsymbol{A}$ 的对角元

$$a_{ii} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} a_{ij} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} a_{ji} = k_i,\ i = 1, 2, \cdots, N$$

为节点 $i$ 的度数. 对于连通网络, $\boldsymbol{A}$ 是一个不可约矩阵, 有唯一的零特征值. $\boldsymbol{A}$ 也可以对应有向加权图, 本文只考虑无向无权图, 这时 $\boldsymbol{A}$ 的特征值可以如下排序

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_N \tag{2}$$

基于主稳定函数方法 [11,50,58,148], 众所周知复杂网络同步研究可以分为两个方面, 一个方面是与网络对应的图 Laplace 矩阵特征值, 另一方面是同步化区域. 如果网络耦合强度参数与 Laplace 矩阵特征值的乘积容易落入同步化区域, 则复杂网络容易实现同步. 同步化区域由网络节点动力学与内关联函数决定, 该区域为无界区域 $(-\infty,\ \alpha_1)$ 时, 网络同步能力由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小非零特征值 $\lambda_2$

来刻画：$\lambda_2$ 值越大, 其同步能力越强. 如果同步化区域为有界区域 $(\alpha_2, \alpha_1)$ 时, 明显地外耦合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值比率 $\lambda_2/\lambda_N$ 决定同步能力：$\lambda_2/\lambda_N$ 值越大, 其同步能力越强. 不考虑同步化区域时, $\lambda_2/\lambda_N$ 相对较全面地反应了网络的同步能力, 一般考虑 $\lambda_2/\lambda_N$ 要比单独考虑 $\lambda_2$ 复杂, 本文将 $\lambda_2/\lambda_N$ 称为同步能力指标, 记作 $r$. 本节主要利用图论方法对同步能力指标给出一些基本的估计式, 以下不再区分网络、图、以及 Laplace 矩阵的概念.

给定一个 $N$ 个节点的图 $G$, 其最大最小度分别记为 $d_{\max}$ 与 $d_{\min}$, 由代数图论知识 [135,142] 可知对于一个连通图 $G$, 其最大特征值满足 $2d_{\max} \geq \lambda_N \geq d_{\max}+1$, 等于 $d_{\max}+1$ 当且仅当其最大度等于 $N-1$, 并且 $\lambda_2 \leq d_{\min}N/(N-1)$. 进一步由文献 [151] 可知当图 $G$ 与其补图 $G^c$(由 $G$ 的所有节点以及不在 $G$ 中的所有边组成的图) 都连通时, $\lambda_2$ 满足 $\lambda_2 < d_{\min}$. 于是当 $G$ 与 $G^c$ 都连通时, 其同步能力指标满足 $r(G) < d_{\min}/d_{\max}$. 此外设 $e(G)$ 表示 $G$ 的边连通度 (即为使 $G$ 不连通需要去掉的最少边数), 那么 $\lambda_2 \geq 2e(G)(1-\cos(\pi/N))$, Praha[133] 进一步给出了 $\lambda_2$ 与图的边连通度节点连通度的其它关系. 设 $D$ 为图 $G$ 的直径 (即任何两个节点的最短距离中的最大值), $\bar{l}$ 为图 $G$ 中节点间的平均距离, 则 $\lambda_2 \geq 4/(ND), 1/\lambda_2 \leq 0.5(N-1)\bar{l} - 0.25(N-2)$[151]. 除了直径与平均距离外, 节点介数是图论中又一个重要概念, 它与网络同步能力有密切关系 [80]. 介数刻画了任意两个节点间的最短距离通过另外一个节点的个数, 显示了节点的重要性程度, 最大节点介数记为 $B_{\max}$, 则它与 $\lambda_2$ 有下面的关系 [151]

$$d_{\max} - \sqrt{d_{\max}^2 - (N/(B_{\max}+2))^2} \leq \lambda_2 \leq \\ d_{\max} + \sqrt{d_{\max}^2 - (N/(B_{\max}+2))^2}$$

Comellas 等 [151] 进一步给出了同步能力指标的其它估计式, 感兴趣的读者可以参阅.

Duan 等 [149] 基于子图与补图方法, 给出了当给定图中含有特殊的子图时的同步能力更为精确的估计, 例如考虑图 1 中的 $\Gamma_1$. $\Gamma_1$ 中度为 6 的节点形成一个典型的二分 (bipartite) 子图 [135,149], 由文献 [149] 中的子图补图方法可得 $r(\Gamma_1) \leq 2/9$. 而其实际同步能力指标为 $r(\Gamma_1)=1.725\,1/9.274\,9$. 文献 [149] 中的方法成功地给出了最小非零特征值的上正数与最大特征值的下整数估计.

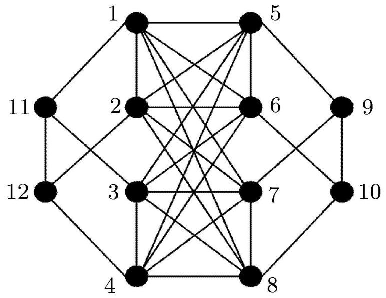



图 1 $\Gamma_1$, $r(\Gamma_1) \leq 2/9$

除了子图补图方法外, 图特征向量也可以用于同步能力估计, 例如考虑图 2, 图 2 中 $\Gamma_2$ 类似于物理学中所说的具有社区 (community) 结构的图, 图 2 中 $\Gamma_2$ 减去节点 3 与 6 之间的边, 所得图记为 $\Gamma_2 - e\{3,6\}$, 明显该图是不连通的, 其补图 $(\Gamma_2 - e\{3,6\})^c$ 是一个典型的二分 (bipartite) 图, $(\Gamma_2 - e\{3,6\})^c$ 的最大特征值对应的特征向量为 [136]

$$\boldsymbol{v} = (1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}, \\ 1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8})^{\mathrm{T}}$$

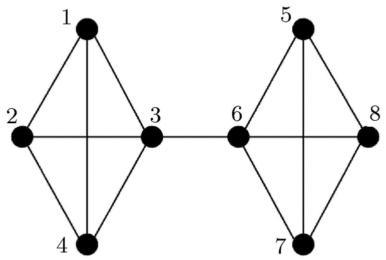


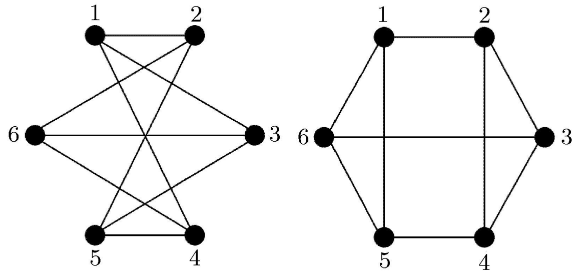

图 2 $\Gamma_2, r(\Gamma_2) < 0.5/5$

由于一个给定图的最小非零特征值与其补图的最大特征值具有共同的特征向量, 并且 $\Gamma_2$ 与 $\Gamma_2 - e\{3,6\}$ 只差一条边, 所以我们可以用 $\boldsymbol{v}$ 近似估计 $\lambda_2(\Gamma_2)$ 的特征向量, 设 $\Gamma_2$ 对应的 Laplace 矩阵为 $\boldsymbol{L}$, 则由代数理论中的 Releigh 商方法可知, $\lambda_2(\Gamma_2) \leq \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{v} = 0.5$. 另外由前面讨论可知 $\Gamma_2$ 的最大特征值严格大于 5, 于是 $r(\Gamma_2) < 0.5/5$. 这一估计明显优于文献 [149] 给出的估计值. 这一图特征向量方法适合用于带有社区结构的网络, 不同社区之间有较少的边 [11,33].

## 3 同步能力与网络结构参数的关系、加边的效果以及补图的意义

首先考虑下面的简单图 (见图 3). 图 3(a)(b)

有相同的度序列, 每个节点度都是 3; 有相同的平均距离, 7/5; 有相同的节点介数, 每个节点的介数都是 2. 但它们的同步能力完全不同, 分别计算它们对应 Laplace 矩阵特征值可得: $\lambda_2(G_1)$=3, $\lambda_6(G_1)$=6, $r(G_1)$=0.5; $\lambda_2(G_2)$=2, $\lambda_6(G_2)$=5, $r(G_2)$=0.4. 所以明显图 $G_1$ 的同步能力强于 $G_2$.




(a) $G_1$　　(b) $G_2$

图 3

图 3(a)(b) 可以推广到含有 $N=2n(n>1)$ 个节点的图, 设 $G_1$ 是一个含有 $2n$ 个节点的 bipartite 图 [135,136,148], 每 $n$ 个节点内部没有边, 但每个节点都连到另外 $n$ 个节点中的每个点, 这时对任意自然数 $n$ >1 都有 $r(G_1)$=0.5; 设 $G_2$ 是一个由两个 $n$ 节点完全图组成, 且每个节点对应地连一条边到另一个完全图中的一个节点, 则由代数图论知识 [135,136] 可知当 $n\to\infty$ 时, $r(G_2)\to$0. 但是象上面所讨论的一样, 这样两个图有很雷同的统计性质, 同步能力却差得很远. 统计物理学方面有很多统计结果显示网络同步能力与网络结构参数有怎样的关系 [76~82], 但是由图 3(a)(b) 说明, 两个结构参数很雷同的图可以有很不同的同步能力, Atay 等 [147] 指出统计性质与图的特征值关系不大, 这些结果都表明复杂网络同步能力与结构参数的关系问题是比较复杂的, 可能目前科学工作者还没有发现一个能完全特征同步能力的参数.

下面讨论加边对网络同步能力的影响, 首先介绍下面的引理 [135].

**引理 1:** 任意给定一个 $N$ 个节点的连通图 $G$, 其特征值如式 (2) 排序. 对 $G$ 增加一条边, 所得图记作 $G+e$, 则其特征值与原图相比, 均单调增加, 即

$$\lambda_i(G)\le\lambda_i(G+e), i=2,\cdots,N$$

由这个引理可知, 如果只考虑图的最小非零特征值 $\lambda_2$, 那么任意增加边都不会降低 $\lambda_2$. 但是考虑特征值比就大不相同了, 例如在图 3(b) $G_2$ 的 1, 3 节点间增加一条边, 所得图记作 $G_2+e\{1,3\}$, 简单计算其同步能力指标可知, $r(G_2+e\{1,3\})$=0.395 6< $r(G_2)$=0.4, 也即加边降低了其同步能力. 在 1, 4 节点继续增加一条边可得 $r(G_2+e\{1,3\}+e\{1,4\})$=0.397 0, 该指标好于 $r(G_2+e\{1,3\})$, 但仍然坏于 $r(G_2)$. 这表明加边既可以改善同步能力, 也可以破坏同步能力. 但是对 $G_1$ 加边却不会降低其同步能力, 为了解释这一现象, 我们考虑 $G_1$ 与 $G_2$ 的补图, 补图分别记为 $G_1^c$ 与 $G_2^c$. 下面引理给出了补图与原图特征值之间的关系 [135,136].

**引理 2:** 任意给定一个 $N$ 个节点的图 $G$, 下面结论成立:

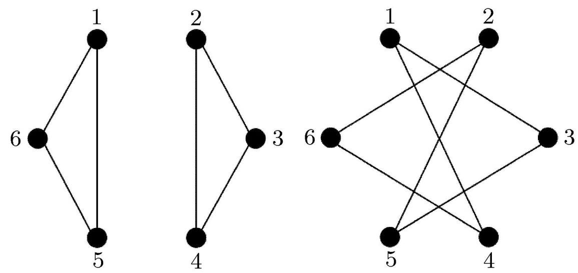
(1) $G$ 的最大特征值 $\lambda_N(G)$ 满足 $\lambda_N(G)\le N$;

(2) $\lambda_N(G)=N$ 当且仅当补图 $G^c$ 是不连通的;

(3) 如果 $G^c$ 不连通且正好由 $q$ 个连通的部分组成, 则 $\lambda_N(G)=N$ 是 $G$ 的 $q-1$ 重特征值;

(4) $\lambda_i(G^c)+\lambda_{N-i+2}(G)=N$, $i=2,\cdots,N$.

由图 4(a)(b) 看到 $G_1$ 的补图是不连通的, $G_2$ 的补图是连通的. 结合引理 2 知 $G_1$ 的最大特征值等于其节点数 6. 对 $G_1$ 任意加边, 最大特征值保持不变, 而最小非零特征值单调增加, 所以对 $G_1$ 加边有可能改善其同步能力, 但不会破坏同步能力. 并且由于 $G_1$ 的补图比较简单, 结合补图可以看出对 $G_1$ 任意增加 3 条以内的边都不会改善其同步能力, 而是保持相同的同步能力, 为了改善 $G_1$ 的同步能力, 至少要加 4 条边. 所以由此可以看出 $G_1$ 与 $G_2$ 加边对同步来说有完全不同的效果, 并且可以看出补图对于理解同步能力的意义 [148]. 由上面讨论可知对于补图不连通的图加边一定不会破坏同步能力, 那么什么样的图加边一定破坏同步能力? 下面我们讨论对环加边的情形 [150].

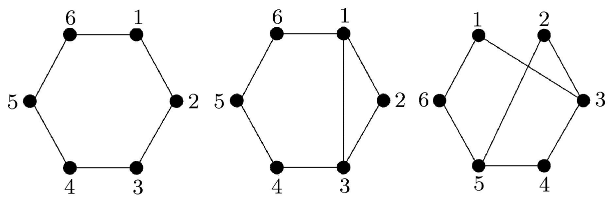



(a) $G_1^c$　　(b) $G_2^c$

图 4

**引理 3:** 任意节点数 $N\ge5$ 的环 $C_N$ 加一条边一定破坏其同步能力, 即 $r(C_N+e)<r(C_N)$.

我们以 6 个节点的环 $C_6$ 为例讨论相关问题, 见图 5(a)(b). 简单计算可知 $r(C_6)=0.25$, $r(C_6+e\{1{,}3\})=0.226\,5<0.25$. 明显地加一条边后破坏了同步能力. 但是重新改变 $C_6+e\{1{,}3\}$ 的连接方式可能改善同步能力, 例如将 $C_6+e\{1{,}3\}$ 变为图 5(c) 中的图 $C_{6o}$, 可得 $r(C_{6o})=0.268\,4>r(C_6)$. 于是重新连边后明显改善了同步能力. 那么是否存在图, 增加边后无论怎样优化结构也不能改善同步能力? 为了回答这个问题, 我们给出下面的引理 [150].




(a) 环 $C_6$ (b) $C_6+e\{1{,}3\}$ (c) $C_{6o}$

图 5

**引理 4:** 任意一个 10 个节点 16 条边的图 $G$, 其同步能力指标满足 $r(G)<2/5=0.4$.

尽管 10 个节点 16 条边的图同步能力指标均严格小于 0.4, 我们却可以找到一个 10 个节点 15 条边的图 $\Gamma_3$(图 6), 其同步能力指标为 0.4. 这表明对图 $\Gamma_3$ 任意增加一条边不但会严格破坏其同步能力, 而且加边后不可能再通过优化连接结构而改善同步能力.

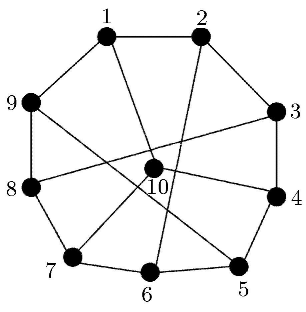



图 6 $\Gamma_3$, $r(\Gamma_3)=2/5=0.4$

Donetti 等 [78] 曾给出一个优化同步能力的方法, 他们指出具有优化同步能力的网络结构参数分布都是充分均匀的, 即介数, 度分布, 平均距离, 环分布等都充分均匀. 但下面的图 $\Gamma_4$ (图 7, 10 个节点 20 条边) 也具有充分均匀的结构参数, 并且其节点介数严格小于 $\Gamma_3$ 的节点介数, 但其同步能力指标却不如 $\Gamma_3$ 好 [150]. 曾有统计物理方面的文献 [80] 指出节点最大介数小则同步能力强, 但上面这两个图显示了不同的结果. 另一方面我们猜想具有 10 个节点 20 条边的图, 任意优化其连接结构都不能使其同步能力好于 $\Gamma_3$, 如果这一猜想成立, 则它表明在研究复杂网络同步能力问题时, 会出现冗余边, 这些边不但不会改善同步能力, 而且对同步能力有害. 那么对于一个具有 $N$ 个节点的复杂网络, 为了使其达到同步能力指标 $r$, 我们应该选多少条连接边? 这明显是一个对复杂网络同步有重要意义的优化问题.

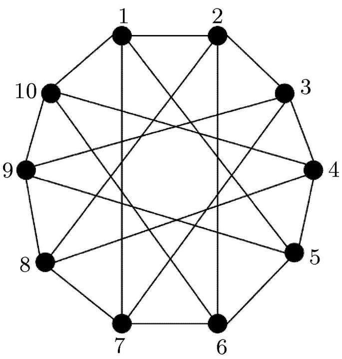



图 7 $\Gamma_4$, $r(\Gamma_4)=2.763\,9/7.236\,1<r(\Gamma_3)=2/5$

## 4 图运算对同步能力的影响

Atay 等 [146] 给出了几类图运算并且讨论了它们对同步的影响. 首先考虑图乘积运算, 给定两个图 $G$ 与 $H$, 我们可以定义它们的乘积图 $G\times H$, 乘积图的严格定义可参考文献 [135,146], 我们这里以例子来说明乘积图, 例如前面图 3(b) 中讨论的图 $G_2$ 就是一个由环 $C_3$ 与链 $P_2$(图 8) 形成的乘积图. 乘积图第二特征值满足 $\lambda_2(G\times H)=\min\{\lambda_2(G),\lambda_2(H)\}$, 最大特征值满足 $\lambda_{\max}(G\times H)=\lambda_{\max}(G)+\lambda_{\max}(H)$. 由此很容易地可以由 $C_3$ 与 $P_2$ 得到图 $G_2$(图 3(b)) 的最大最小特征值, 并且可以进一步解释上一节的结论, 即 $G_2$ 推广到 $2n$ 节点图 (可以看作 $n$ 节点完全图与 $P_2$ 的乘积图), 其同步能力趋于零. 并且可以得到乘积图的同步能力指标满足 $r(G\times H)<\min\{r(G),r(H)\}$. Duan 等 [149] 进一步给出了一个图含有乘积图作子图时的同步能力估计.

下面讨论图的另一类运算, 并运算. 给定两个图 $G$ 与 $H$, 它们生成的并图记作 $G*H$, 是指在 $G$ 的每个节点与 $H$ 的每一个节点间连边后形成的图. 3 个孤立节点形成的图记作 $O_3$, 则前面图 3(a) 中的图 $G_1$ 可以看作图 $O_3*O_3$. 设 $G$ 与 $H$

的节点数分别为 $n$, $m$, 则由图论知识 [135,146] 可知它们形成的并图的第二特征值与最大特征值满足, $\lambda_2(G*H)=\min\{\lambda_2(G)+m,\lambda_2(H)+n\}$, $\lambda_{\max}(G*H)=n+m$. 明显地并图 $G*H$ 的同步能力指标满足 $r(G*H)\geq 0.5$. 上一节讨论的 $G_1$ 推广到 $2n$ 个节点的图可以看作两个 $n$ 个孤立节点的图生成的并图. 并运算一般会改善同步能力.

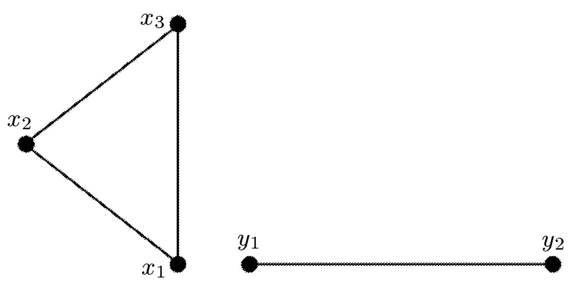



图 8 环 $C_3$ 与链 $P_2$

此外还有一类运算称作结合 (coalescence) 运算, 是指给定两个图 $G$ 与 $H$ 后, 将 $G$ 的一个节点与 $H$ 的一个节点结合为一个节点形成的图, 记作 $G\circ H$, 其特征值与同步能力指标分别满足 $\lambda_2(G\circ H)\leq\min\{\lambda_2(G),\lambda_2(H)\}$, $\lambda_{\max}(G\circ H)\geq\max\{\lambda_{\max}(G),\lambda_{\max}(H)\}$, $r(G\circ H)\leq\min\{r(G),r(H)\}$. 结合运算生成的图不一定唯一, 结合的节点不同则生成的图就不同. 例如图 9 中的图 $\Gamma_5$ 可以看作是由链 $P_4$ (图 10) 与链 $P_2$ (图 8) 结合生成的图, 并且 5 个节点形成的链 $P_5$ 也可以看作 $P_4$ 与 $P_2$ 结合生成的图. 图结合运算一般会破坏同步能力 [146], 并且结合的节点不同, 对同步能力的破坏程度也不同. 由文献 [149] 中的补图方法可知结合图的第二特征值都小于等于 1, 所以结合图的同步能力一般是不好的.

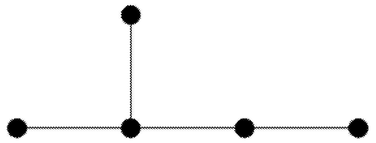


图 9 $\Gamma_5$

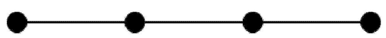


图 10 链 $P_4$

## 5 结论与展望

本文重点讨论了图论方法在复杂网络同步能力估计方面的应用, 明显地图论也可以用于复杂网络建模与结构特征方面的研究. 给定一个 $N$ 个节点的网络, 怎样连边才能优化其同步能力? 为了达到一定的同步能力指标, 至少应该连接多少边? 这些都是图论与复杂网络同步相结合的重要问题, 值得进一步深入研究, 无论是有向图还是无向图都存在类似的问题, 根据本文的讨论, 边连接多了不但会浪费连接, 而且可能破坏同步能力. 除了图特征值外, 另一个直接与同步能力相关的因素是同步化区域 [97~100], 对于无向网络同步化区域分布于实轴上, 有向网络则同步化区域分布于整个复平面, 同步化区域与图特征值相结合才能较全面地反应复杂网络同步能力. 对于有向网络该怎样反应同步能力指标? 明显图特征值实部与虚部需要同时考虑, 再结合到同步化区域, 这类问题将更加复杂. 另外, 在研究中发现当网络对应的图特征值有约当块出现时, 不管其特征值比对应的同步能力怎样, 网络的节点状态都会经过较长时间振荡才能趋于同步 [83], 所以对同步品质的评价还应该有其它指标 [84,85]. 控制理论中已经有很多评价控制系统品质的指标, 是否这些控制指标可以用于复杂网络同步研究是值得探讨的课题 [85,158]. 近年来 multi-agent 系统一致性问题也得到了广泛关注并且已经得到了很多研究成果 [159~168], 并且图论也在一致性问题中得到了应用. 复杂网络同步与 multi-agent 系统一致性问题有很多本质的联系, 都研究节点状态的一致性问题, 这两方面的问题能否建立统一的框架是一个非常有意义的课题. 最后, 正如前言中所述, 在控制理论中致力于多个子系统组成的大系统的研究已经有很多年的历史, 已经在稳定性分析与分散控制方面给出了很多成果 [22~27]. 明显地, 复杂网络系统与 multi-agent 系统都可以看作大系统, 并且从模型上来看比大系统更简单, 更接近于相似大系统 [169,170]. 大系统方法明显可用于复杂网络系统的研究 [28,162].

## 参 考 文 献

1 米歇尔. 沃尔德罗普著. 复杂 — 诞生于秩序与混沌边缘的科学. 陈玲译. 北京: 生活. 读书. 新知三联书店, 1997

2 伊普利高津, 伊斯唐热著. 从混沌到有序：人与自然的

新对话. 曾庆宏, 沈小峰译. 上海: 上海译文出版社, 2005

3 王成红, 王飞跃, 宋苏, 贺建军. 复杂系统研究中几个值得关注的问题. 控制理论与应用, 2005, 22(4): 604～608

4 张嗣瀛. 复杂性科学、整体规律与定性研究. 复杂系统与复杂性科学, 2005, 2(1): 71～83

5 Chua L O. CNN: A Paradigm for Complexity. Singapore: World Scientific, 1993

6 郭雷. 关于反馈的作用及能力的认识. 自动化博览, 2003, 20(1): 1～3

7 王飞跃, 戴汝为, 张嗣瀛等. 关于城市交通、物流、生态综合发展的复杂系统研究方法. 复杂系统与复杂性科学, 2004, 1(2): 60～69

8 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 1998, 393(6684): 440～442

9 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286(5439): 509～512

10 Barabási A L. The New Science of Networks. Massachusetts: Persus Publishing, 2002

11 王小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络: 理论与应用. 北京: 清华大学出版社, 2006

12 郭雷, 许晓鸣主编. 复杂网络. 上海: 科技教育出版社, 2006

13 Wang X F. Complex networks: Topology, dynamics, and synchronization. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2002, 5(12): 885～916

14 Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: structure and dynamics. *Physics Reports*, 2006, 424: 175～308

15 Dorogovtsev S N, Mendes J F F. Evolution of networks, *Adv Phys*, 2002, 51: 1079～1187

16 Yuan B S, Wang B H. Growing directed networks: organization and dynamics. *New Journal of Physics*, 2007, 9: 282

17 Albert R, Barabasi A L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74: 47～97

18 Costa L F, Rodrigues A, Travieso G, Villas Boas P R. Characterization of complex networks: A survey of measurements. *Advances in Physics*, 2007, 56(1): 167～242

19 Newman M E J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 2003, 45: 167～256

20 Strogatz S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, 410: 268～276

21 Wang X F, Chen G. Complex networks: small world, scale-free and beyond. *IEEE Circuits and System Magazine*, 2003, 3(1): 6～21

22 Siljak D D. Decentralized Control of Complex Systems. New York: Academic, 1991

23 高为炳, 霍伟. 大系统的稳定性、分散控制及动态递阶控制. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994

24 Ikeda M, Siljak D D, Yasuda K. Optimality of decentralized control for large scale systems. *Automatica*, 1983, 19: 309～316

25 Shi Z C, Gao W B. Stabilization by decentralized control for large scale interconnected systems. *Large Scale Systems*, 1986, 10: 147～155

26 黄琳. 稳定性理论. 北京: 北京大学出版社, 1991

27 Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Decentrralized control of symmetric systems. *Systems and Control Letters*, 2001, 42: 145～149

28 Duan Z S, Wang J Z, Chen G, Huang L. Stability analysis and decentralized control of a class of complex dynamical networks. *Automatica*, 2008, 44: 1028～1035

29 Bianconi G, Gulbahce N, Motter A E. Local structure of directed networks. *Phys Rev Lett*, 2008, 100(11): 118701

30 Fang J Q, Li Y, Bi Q. From a harmonious unifying hybrid preferential model towards a large unifying hybrid network model. *Int J Modern Physics B*, 2007, 21(30): 5121～5142

31 Fang J Q, Bi Q, Li Y, et al. Toward a harmonious unifying hybrid model for any evolving complex networks. *Advances in Complex Systems*, 2007, 10(2): 117～141

32 Chen M, Yu B, Xu P, Chen J. A new deterministic complex network model with hierarchical structure. *Phys A*, 2007, 385: 707～717

33 Fortunatoa S, Castellano C. Community structure in graphs. 2007, arXiv: 0712.2716

34 Li X, Chen G. A local-world evolving network model. *Physica A*, 2003, 328: 274～286

35 Zhang Z Z, Zhou S G, Fang L J, et al. Maximal planar scale-free Sierpinski networks with small worlds effect and power law strength-degree correlation. *European Physics Letters*, 2007, 79: 38007.

36 Zhang Z Z, Zhou S G, Wang Z Y, Shen Z. A geometric growth model interpolating between regular and small-world networks. *J Phys A*: *Math Theor*, 2007, 40: 11863～11876

37 Jezewski W. On the emergence of scaling in weighted networks, *Phys A*, 2007, 379: 691～700

38 Nykter M, Price N D, Larjo A, et al. Critical networks exhibit maximal information diversity in structure-dynamics relationships. *Phys Rev L*, 2008, 100: 058702

39 Albert R, Jeong H, Barabasi A L. Attack and error tolerance in complex networks. *Nature*, 2000, 406: 387～482

40 Callway D S, Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Phys Rev Lett*, 2000, 85(16): 4626～4628

41 Lestas I C, Vinnicombe G. Scalable robust stability for nonsymmetric heterogeneous networks. *Automatica* , 2007, 43: 714～723

42 Sun S W, Liu Z X, Chen Z Q, Yuan Z Z. Error and attack tolerance of evolving networks with local preferential attachment. *Phys A*, 2007, 373: 851～860

43 Pikovsky A, Rossenblum M, Kurths J. Synchronization, A Uuniversal Concept in Nonlinear Sciences. New York: Cambridge University Press, 2001

44 Strogatz S H, Stewart I. Coupled oscillators and biological synchronization. *Scientific American*, 1993, 12: 102∼109
45 Neda Z, Ravasz E, Vicsek T, et al. The sound of many hands clapping. *Nature*, 2000, 403: 849∼850
46 Blekhman I I. Synchronization in Science and Technology. ASME Press, 1988
47 Wu C W, Chua L O. Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Trans Circuits & Systems–I*, 1995, 42: 430∼447
48 Wu C W. Synchronization in Coupled Chaotic Circuits and Systems. Singapore: World Scientific, 2002
49 Ashwin P, Buescu J, Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators. *Phys Lett A*, 1994, 193: 126∼139
50 Pecora L M, Carroll T L. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys Rev Lett*, 1998, 80(10): 2109∼2112
51 Arenas A, Afaz-Guilera A, Kurths J, et al. Synchronization in complex networks. *Review of Modern Physics*, 2008, doi: 10.1016/j.physrep.2008.09.002
52 Guan S G, Wang X G, Li K, et al. Synchronizability of network ensembles with prescribed statistical properties. *Chaos*, 2008, 18(1): 013120
53 Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, et al. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 2002, 366(1-2): 1∼101
54 Barahona M, Pecora L M. Synchronization in small-world systems. *Phys Rev Lett*, 2002, 89(5): 054101
55 Belykh I V, Belykh V N, Hasler M. Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling. *Physica D*, 2004, 195: 188∼206
56 Checco P, Biey M, Kocarev L. Synchronization in random networks with given expected degree sequences. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 35(3): 562∼577
57 Hong H, Choi M Y, Kim B J. Synchronization on small-world networks. *Phys Rev E*, 2002, 65: 026139
58 Lü J H, Yu X H, Chen G, Cheng D Z. Characterizing the synchronizability of small-world dynamical networks. *IEEE Trans Circuits Syst-I*, 2004, 51(4): 787∼796
59 Kocarev L, Amato P. Synchronization in power-law networks. *Chaos*, 2005, 15: 024101
60 Moreno Y, Pacheco A F. Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *Europhysics Letters*, 2004, 68: 603∼609
61 Wang X F, Chen G. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility. *IEEE Trans Circuits Syst-I*, 2002, 49(1): 54∼62
62 Gong B, Yang L, Yang K. Synchronization on Erdos-Renyi network. *Phys Rev E*, 2005, 72: 037101
63 Fan J, Wang X F. On synchronization in scale-free dynamical networks. *Physica A*, 2005, 349: 443∼451
64 Li C G, Chen G. Phase synchronization in small-world networks of chaotic oscillators. *Physica A*, 2004, 341: 73∼79
65 Jalan S, Amritkar R E. Self-organized and driven phase synchronization in coupled maps. *Phys Rev Lett*, 2003, 90(1): 014101
66 Ichinomiya T. Frequency synchronization in random oscillator network. *Phys Rev E*, 2004, 70: 026116
67 Li Z, Lee J. New eigenvalue based approach to synchronization in asymmetrically coupled networks. *Chaos*, 2007, 17: 043117
68 Chavez M, Hwang D U, Amann A, et al. Synchronization is enhanced in weighted complex networks. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 218701
69 Wu C W. Synchronization in networks of nonlinear dynamical systems via a directed graph. *Nonlinearity*, 2005, 18: 1057∼1064
70 Chen L, Lu J. Cluster synchronization in a complex dynamical network with two nonidentical clusters. *J Syst Sci & Complexity*, 2008, 21(1): 20∼33
71 Wu X, Wang B H, Zhou T, et al. Synchronizability of highly clustered scale-free networks. *Chinese Phys Lett*, 2006, 23: 1046∼1049
72 Ma Z J, Liu Z R, Zhang G. A new method to realize cluster synchronization in connected chaotic networks. *Chaos*, 2006, 16(2): 023103
73 Wang Q Y, Chen G, Lu Q S, Hao F. Novel criteria of synchronization stability in complex networks with coupling delays. *Physica A*, 2007, 378(2): 527∼536
74 Wang L, Dai H, Sun Y. Synchronization criteria for a generalized complex delayed dynamical network model. *Physica A*, 2007, 383(2): 703∼713
75 Li C G, Chen G. Synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays. *Physica A*, 2004, 343: 236∼278
76 Belykh I V, Lange E, Hasler M. Synchronization of bursting neurons: what matters in the network topology. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 188101
77 Bernardo M D, Garofalo F, Sorrentino F. Effects of degree correlation on the synchronization of networks of oscillators. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(10): 3499∼3506
78 Donetti L, Hurtado P I, Muñoz M A. Entangled networks, synchronization, and optimal network topology. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 188701
79 Gomez-Gardenes J, Moreno Y, Arenas A. Paths to synchronization on complex networks. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 034101
80 Hong H, Kim B J, Choi M Y. Park H.Factors that predict better synchronizability on complex networks. *Phys Rev E*, 2004, 69: 067105
81 Nishikawa T, Motter A E, Lai Y C. Hoppensteadt F C. Heterogeneity in oscillator netwroks: Are smaller worlds easier to synchronize? *Phys Rev Lett*, 2003, 91(1): 014101
82 Zhao M, Zhou T, Wang B H, et al. Relations between average distance, heterogeneity and network synchronizability. *Physica A*, 2006, 371(2): 773∼780

83 Nishikawa T, Motter A E. Maximum peformance at minimum cost in network synchronization. *Physica D*, 2006, 224: 77∼89

84 Yang H, Zhao F, Wang B. Synchronizabilities of networks: A new index. *Chaos*, 2006, 16: 043112

85 Liu C, Duan Z S, Chen G, Huang L. *L*2-norm performance index of synchronization and optimal control synthesis of complex networks. 2007, arXiv: 0710.2736v1

86 Zhao M, Zhou T, Chen G, Wang B H. Enhancing the network synchronizability. *Front Phys China*, 2007, 2(4): 460∼468

87 Zhao M, Zhou T, Wang B H, Wang W-X. Enhance synchronizability by small structural perturbations. *Phys Rev E*, 2005, 72: 057102

88 Lu Y, Zhao M, Zhou T, Wang B. Enhanced synchronizability via age-based coupling. *Phys Rev E*, 2007, 76: 057103

89 Motter A E, Zhou C, Kurths J. Enhancing complex-network synchronization. *Europhysics Letters*, 2005, 69: 334∼340

90 Wang X, Lai Y, Lai C H. Enhancing synchronization based on complex gradient networks. *Phys Rev E*, 2007, 75: 056205

91 Xu D, Li Y, Wu T. Improving consensus and synchronizability of networks of coupled systems via adding links. *Physica A*, 2007, 382(2): 722∼730

92 Chen T P, Liu X W, Lu W L. Pinning complex networks by a single controller. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I*, 2007, 54(6): 1∼11

93 Li X, Wang X F, Chen G. Pinning a complex dynamical network to its equilibrium. *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I*, 2004, 51(10): 2074∼2085

94 Liu Z X, Chen Z Q, Yuan Z Z. Pinning control of weighted general complex dynamical networks with time delay. *Phys A*, 2007, 375: 345∼354

95 Wang X F, Chen G. Pinning control of scale-free dynamical networks. *Phys A*, 2002, 310: 521∼531

96 Li R, Duan Z S, Chen G. Cost and effects of pinning control for network synchronization. 2007, arXiv: 0710.2716v1

97 Stefański A, Perlikowski P, Kapitaniak T. Ragged synchronizability of coupled oscillators. *Phys Rev E*, 2007, 75: 016210

98 Liu C, Duan Z S, Chen G, Huang L. Analyzing and controlling the network synchronization regions. *Physica A*, 2007, 386: 531∼542

99 Duan Z S, Chen G, Huang L. Disconnected synchronized regions of complex dynamical networks. 2007, arXiv: 0706.2899v1

100 Duan Z S, Chen G, Huang L. Synchronization of weighted networks and complex synchronized regions. *Physics letters A*, 2008, 372: 3741∼3751

101 Liu Z R, Luo J G. From lag synchronization to pattern formation in one-dimensional open flow models. *Chaos Solitons & Fractals*, 2006, 30(5): 1198∼1205

102 Bassett D S, Bullmore E. Small-world brain networks. *Neuroscientist*, 2006, 12: 512∼523

103 Couzin L, Collective minds. *Nature*, 2007, 445: 715

104 Eguiluz V M, Dante R C, Guillermo A C, et al. Scale-free brain functional networks. *Phy Rev Lett*, 2005, 94: 018102

105 Hasegawa H. Synchronization in small-world networks of spiking neurons: Diffusive versus sigmoid couplings. *Phys Rev E*, 2005, 72: 056139

106 Motter A E, Gulbahce N, Almaas E, Barabási AL. Predicting synthetic rescues in metabolic networks. *Molecular Systems Biology*, 2008, 4 (168): 1744∼4292

107 Rossoni E, Chen Y H, Ding M Z, et al.. Stability of synchronous oscillations in a system of Hodgkin-Huxley neurons with delayed diffusive and pulsed coupling. *Phys Rev E*, 2005, 71: 061904

108 Wang Q Y, Lu Q S, Chen G, Guo D H. Chaos synchronization of coupled neurons with gap junction. *Phys Lett A*, 2006, 356：17∼25

109 Wang Q Y, Duan Z S, Huang L, Chen G, Lu Q S. Pattern formation and firing synchronization in networks of map neurons. *New Journal of Physics*, 2007, 9(383): 1∼11

110 Boguna M, Pastor-Satorras R. Epidemic spreading in correlated complex networks. *Phys Rev E*, 2002, 66(4): 047104∼047107

111 Boguna M, Pastorras R, Vespignani V. Absence of epidemic threshold in scale-free networks with degree correlations. *Phys Rev Lett*, 2003, 90(2): 028701∼028703

112 Cohen R, Havlin S, Avraham D. Efficient immunization strategies for computer networks and populations. *Phys Rev Lett*, 2003, 91(24): 247901∼247904

113 Moreno Y, Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks. *Euro Phys J B*, 2002, 26(4): 521∼529

114 Newman M E J. Spread of epidemic disease on networks. *Phys Rev E*, 2002, 66(1): 016128∼016139

115 Pastor-Satorras R, Vespignani A. Immunization of complex networks. *Phys Rev E*, 2002, 65(3): 036104∼036111

116 Wang J Z, Liu Z R, Xu J H. Epidemic spreading on uncorrelated heterogenous networks with non-uniform transmission. *Physica A*, 2007, 382: 715∼721

117 Guo W P, Li X, Wang X F. Epidemics and immunization on euclidean distance preferred small-world networks. *Physica A*, 684∼690

118 Shi H J, Duan Z S, Chen G. An SIS model with infective medium on complex networks. *Physica A*, 2008, 387: 2133∼2144

119 Cai S M, Yan G, Zhou T, et al. Scaling behavior of an artificial traffic model on scale-free networks. *Phys Lett A*, 2007, 366: 14∼19

120 Zhou T, Ren J, Medo M, Zhang Y. Bipartite network projection and personal recommendation. *Phy Rev Lett*, 2007, 76: 046115

121 Zhu C P, Zhou T, Yang H, et al. The process of coevolutionary competitive exclusion: speciation, multifractality and power-laws in correlations. *New Journal of Physics*, 2008, 10: 023006

122 Li P, Wang B H. Extracting hidden fluctuation patterns of Hang Seng stock index from network topologies. *Phys A*, 2007, 378: 519～526

123 Xia Y, Hill D J. Attack vulnerability of complex communication networks. *IEEE Trans Circuits and Systems II*, 2008, 55(1): 65～69

124 Xia Y, Tse C K, Lau F C, et al. Scale-free user-network approach to telephone network traffic analysis. *Phy Rev Lett*, 2005, 72: 026116

125 Akyildiz I F, Su W, Sanakarasubramaniam Y, et al. Wireless sensor networks: A survey. *Computer Networks*, 2002, 38(4): 393～422

126 Dimakis A G, Sarwate A D, Wainwright M J. Geographic gossip: efficient averaging for sensor networks. *IEEE Transactions on Signal Processing,* 2008, 56(3): 1205～1216

127 李晓维, 徐勇军, 任丰原. 无线传感器网络技术. 北京: 北京理工大学出版社, 2007

128 Li Q, Rus D. Grobal clock synchronization in sensor networks. *IEEE Trans on Computers*, 2006, 55(2): 214～226

129 da Fontoura Costa L, Oliveira Jr. O N, Travieso R, et al. Analyzing and modelling real-world phenomena: A survey of applications. 2007, arXiv: 0711.3199v1

130 周涛, 徐俊明, 刘隽. 图直径与平均距离的极值问题研究. 中国科技大学学报, 2004, 34(4): 410～413

131 West D B. Introduction to Graph Theory. NJ: Prentice Hall, 2001

132 Erdös P, Rényi A. On the evolution of random graphs. *Publ Math Inst Hung Acad Sci*, 1960, 5: 17～60

133 Praha M F. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1973, 23(98): 298～305

134 Pan Y L. Sharp upper bounds for the Laplacian graph eigenvalues. *Linear Algebra and its Applications*, 2002, 355: 287～295

135 Merris R. Laplacian matrices of graph: a survey. *Linear Algebra and its Applications*, 1994, 197-198: 143～176

136 Merris R. Laplacian graph eigenvectors. *Linear Algebra and its Applications*, 1998, 278: 221～236

137 de Abreu N M M. Old and new results on algebraic connectivity of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, 423: 53～73

138 Comellas F, Gago S. Spectral bounds for the betweenness of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, 423: 74～80

139 Nikiforov V. Bounds on graph eigenvalues I. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, 420: 667～671

140 Nikiforov V. Eigenvalues and extremal degrees of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 2006, 419: 735～738

141 Das K Ch. Sharp lower bounds on the Laplacian eigenvalues of trees. *Linear Algebra and its Applications*, 2004, 184: 155～169

142 Biggs N. Algebraic Graph Theory. Second ed. Cambridge: Cambridge Mathematical Library, 1993

143 Wu C W, Chua L O. Application of graph theory to the synchronization in an array of coupled nonlinear oscillators. *IEEE Trans Circuits* & *Systems-I*, 1995, 42: 494～497

144 Wu C W. Synchronizability of networks of chaotic systems coupled via a graph with a prescribed degree sequence. *Phys Lett A*, 2005, 346: 281～287

145 Wu C W. Perturbation of coupling matrices and its effect on the synchronization in arrays of coupled chaotic systems. *Phys Lett A*, 2003, 319: 495～503

146 Atay F M, Biyikoglu T. Graph operations and synchronization of complex networks. *Phys Rev E*, 2005, 72: 016217

147 Atay F M, Biyikoglu T, Jost J. Network synchronization: Spectral versus statistical properties. *Physica D*, 2006, 224: 35～41

148 Duan Z S, Chen G, Huang L. Complex network synchronizability: Analysis and control. *Physical Review E*, 2007, 76: 056103

149 Duan Z S, Liu C, Chen G. Network synchronizability analysis: The theory of subgraphs and complementary graphs. *Physica D*, 2008, 237: 1006～1012

150 Duan Z S, Liu C, Wang W X, Chen G. Are networks with more edges easier to synchronize? 2007, arXiv: 0711.2442v1

151 Comellas F, Gago S. Synchronizability of complex network. *Journal of Physics A*: *Mathematical and Theoretical*, 2007, 40: 4483～4492

152 Zhou T, Yan G, Wang B H. Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution. *Physical Review E*, 2005, 71: 046141

153 Jalili M, Rad A A, H M. Enhancing synchronizability of dynamical networks using the connection graph stability method. *Int J Circ Theor Appl*, 2007, 35(5-6): 611～622

154 Belykh I V, Belykh V N, Hasler M. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. *Physica D*, 2004, 195: 159～187

155 Belykh I, Hasler M, Laurent M, Nijmeijer H. Synchronization and graph topology. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2005, 15(11): 3423～3433

156 Kim D H, Motter A E. Ensemble averageability in network spectra. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 248701

157 Motter A E. Bounding network spectra for network design. *N J Phys*, 2007, 9: 182

158 周克敏等著. 鲁棒与最优控制. 毛剑琴等译. 北京: 国防工业出版社, 2002

159 Bauso D, Giarre L, Pesenti R. Non-linear protocols for optimal distributed consensus in networks of dynamic agents. *Systems* & *Control Letters*, 2006, 55: 918～928

160 Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Trans Automatic*

*Control*, 2004, 49(9): 1465∼1476

161 Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans Autom Contr*, 2003, 48(6): 988∼1001

162 Lafferriere G, Williams A, Caughman J, Veerman J J P. Decentralized control of vehicle formations. *Systems and Control Letters*, 2005, 54: 899∼910

163 Moreau L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Trans Autom Contr*, 2005, 50(2): 169∼182

164 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time delays. *IEEE Trans Autom Contr*, 2004, 49(9): 1520∼1533

165 Porfiri M, Stilwell D J. Consensus seeking over random weighted directed graphs. *IEEE Trans Autom Contr*, 2007, 52(9): 1767∼1773

166 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans Autom Contr*, 2005, 50(5): 655∼661

167 Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control Systems Magazine*, 2007, 27(2): 71∼82

168 Xiao F, Wang L. State consensus for multi-agent systems with switching topologies and time-varying delays. *Int J Control*, 2006, 79(10): 1277∼1284

169 王银河. 复杂相似控制系统的结构分析与鲁棒控制器设计. 呼和浩特市: 内蒙古人民出版社, 2001

170 Yang G H, Zhang S Y. Structural properties of large-scale systems possessing similar structures. *Automatica*, 1995, 31(7): 1011∼1017

# GRAPH THEORY AND COMPLEX NETWORKS*

DUAN Zhisheng†

State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, Department of Mechanics and Aerospace Engineering, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China

**Abstract** In the past ten years, the fast development of complex network theory has provided a good support for the study of complexity and complex systems, since they describe clearly the important characteristics of complex systems, and show bright prospects in theory and applications. This paper presents mainly the application of graph theory to complex networks, especially to the synchronization problem of complex networks. First, its application to the estimations of smallest nonzero, largest eigenvalues and synchronizability index of certain graphs are commented, followed by the effects of subgraph and graph eigenvector in the estimation of synchronizability index. Furthermore, the complexity between the relationships of synchronizability and network structural parameters are discussed via two simple graphs, and the effects of complementary graph, edge-addition and graph operation on the synchronization of complex networks are elaborated. Finally, some possible development directions in complex networks are predicted from the viewpoint of graph and control theory.

**Keywords** complex network, synchronization, graph theory, subgraph, complementary graph, graph operation

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (60674093) and the Key Projects of Educational Ministry (107110)

† E-mail: duanzs@pku.edu.cn