数值求解不可压缩流动的投影方法研究进展

刘淼儿 [1,†] 任玉新 [2] 张涵信 [3]

[1] 中海石油研究中心，北京 100027
[2] 清华大学航空航天学院，北京 100084
[3] 计算流体力学国家重点实验室，北京 100083

摘 要 在过去的 20 多年中，投影方法通过速度和压力的解耦计算，获得了比全耦合方法更高的计算效率，这个显著优点使之得以广泛应用. 目前，在计算非定常不可压缩流动的原始变量形式的数值方法中，投影方法得到了越来越广泛的应用. 本文根据投影方法的构造思路，将众多的投影方法分成了 3 类，即： Helmholtz-Hodge 分解类投影方法、算子分裂类投影方法和局部连续投影方法，并详细的介绍了 3 类投影方法的发展历程和求解步骤. 从投影方法的求解过程不难发现，通过速度和压力的解耦计算，提高了投影方法的计算效率，但同时也给投影方法的时间精度分析带来了困难，并长期成为大家争论的焦点. 普遍认为，速度的时间精度比较容易达到高阶，但是压力一般来说只有一阶精度. 但通过对 3 类投影的对比分析后，我们认为，局部连续投影方法将有助于澄清目前投影方法存在的相关争议，并使得发展高阶精度的投影方法在理论上和技术上成为可能.

关键词 不可压缩流动， Navier-Stokes 方程，投影方法，时间精度，研究进展

1 引 言

不可压缩流动是常见的流动现象，不可压缩流动的数值计算是计算流体力学的重要组成部分. 均质非定常不可压缩流动的控制方程为如下的 Navier-Stokes 方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla p=-\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})+\nu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 为速度场， p 为压力场， $\boldsymbol{f}$ 为体积力 (如重力，离心力等)，ν 为运动黏性系数， t 为时间，其中密度 ρ 已经吸收到 p 中. 与可压缩流动相比，不可压缩流动的控制方程中不包含压力的时间导数项，且表现出椭圆 - 抛物混合型的特点. 求解不可压缩流动的困难在于处理所谓 “压力 - 速度” 耦合问题：在不可压缩流动中，压力不具有热力学意义 (不存在状态方程)；从数学角度看，它仅起到一个 Lagrange 乘子的作用，对速度场加以限制，使连续方程 (即散度为零条件或称不可压缩条件) 得到满足. 在不可压缩流动中，压力场的波动具有无穷大的传播速度，它瞬间传遍全场，以使不可压缩条件在任何时间、任何地点满足. 也就是说，压力场在每个瞬时都满足一个椭圆型的平衡方程，即使速度场是随时间变化的. 这个特点造成了不可压缩 Navier-Stokes 方程的求解不能直接利用比较成熟的发展型偏微分方程的数值求解的理论和方法. 目前，不可压缩流动的数值方法还远不如可压缩流动的数值方法成熟.

不可压缩 N-S 方程 (1) 和方程 (2) 是一个非线性很强的方程组，直接耦合数值求解该方程组非常费时，因此，常见的算法都是将速度和压力解耦求解. 解耦的途径有两条：一条途径是直接对式 (1) 和式 (2) 中的速度和压力进行解耦，这类数值方法称为原始变量形式的数值方法；另一条途径是通过引入新的变量，消去方程中的压力项，得到一组与压力无直接关联的方程组，这类数值方法称为非原始变量形式的数值方法.

原始变量形式的数值方法的最大优点，就是数值计算的结果就是我们所需要的速度场和压力场，而且边界处理也相对比较简单. 这类方法相当多，如人工压缩方法 [1,2] 、预处理方法 [3~6] 、 MAC[7] (Harlow

收稿日期：2005-06-09，修回日期：2006-07-21
† E-mail: liume@cnooc.com.cn

1965)、SMAC[8,9]、SIMPLE (semi-implicit method for pressure-linked equations) 方法系列 [10~12] 以及投影方法 (projection method). 其中投影方法将解耦后的 N-S 方程分成几步计算，就可以得到速度和压力值，免去了在各步之间反复迭代过程，因而大大地提高了计算效率，并日益成为计算非定常不可压缩流动的一种重要数值方法. 投影方法，亦称作分步方法 (fractional step method) 或分裂格式 (splitting scheme). 尽管名称各异，但在本质上，三者基本相同，因此，在本文中统称为投影方法.

2 投影方法的研究进展

目前，构造投影方法的基本思路可以归纳成 3 种： (1) 从全离散形式的 N-S 方程出发，根据近似算子分裂或近似矩阵分裂，得到全离散形式的投影格式，本文称之为近似分裂类的投影方法； (2) 从半离散形式 (仅时间离散) 的 N-S 方程出发，根据 Helmholtz-Hodge 矢量分解定理，得到半离散的投影格式，本文称之为 Helmholtz-Hodge 分解类的投影方法； (3) 以连续的 N-S 方程为基础，构造一个在某个时间邻域内时间和空间均连续的投影方法，本文称之为局部连续投影方法. 下面按照 Helmholtz-Hodge 分解类、近似分裂类以及局部连续投影方法的顺序，将分别介绍这 3 类投影方法的研究现状.

2.1 Helmholtz-Hodge 分解类投影方法

投影方法最早由 Chorin 在 20 个世纪 60 年代末提出 [13,14]. 当时， Chorin 认为投影方法在时间方向上至多只有一阶精度. 然而，之后 20 多年的实践证明，投影法的发展及应用比 Chorin 所预期的要好得多，人们发展了各种各样的投影方法，并提出了一些高阶精度的投影格式. 在介绍各种投影格式之前，先来了解 Helmholtz-Hodge 分解类投影方法的基本原理及其求解步骤.

考虑一个有界域 Ω 内的流动，控制方程为方程 (1) 和方程 (2), 初、边值分别为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}_0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}_b=\boldsymbol{w} \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{w}$ 为边界上的速度，下标 “b” 表示边界.

根据 Helmholtz-Hodge 分解定理 [15], 任意矢量场 $\boldsymbol{\zeta}$ 可分解成一个无散度矢量场和一个无旋 (有势) 矢量场之和，即

$$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\eta}+\nabla\zeta \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{\eta}$ 满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}=0$. 设 $\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{\zeta}$ 投影到散度为零空间的投影算子，则有 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\zeta})$. 因此由 Helmholtz-Hodge 分解定理，可以把式 (1) 写成 (不失一般性，略去体积力项)

$$\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{P}(-\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})+\nu\Delta\boldsymbol{u}) \tag{6}$$

式 (6) 中已不含压力项，可以方便地求解 $\boldsymbol{u}$.

下面以一个半离散二阶投影格式为例，来说明投影方法求解步骤. 将不可压缩 N-S 方程 (1) 和方程 (2) 在时间方向离散成二阶精度 (不失一般性，略去体积力项)

$$\begin{aligned}&\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t}+\nabla p^{n+1/2}+\boldsymbol{T}_{ac}-\\&\qquad\frac{\nu}{2}\Delta(\boldsymbol{u}^{n+1}+\boldsymbol{u}^n)=0\end{aligned} \tag{7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1}=0 \tag{8}$$

边界条件离散成

$$\boldsymbol{u}_b^{n+1}=\boldsymbol{w}^{n+1} \tag{9}$$

式中： $\boldsymbol{T}_{ac}=[\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})]^{n+1/2}$ 表示对流项在时间 $t^{n+1/2}$ 处的二阶近似项，通常用 Admas-Bashforth 格式显式计算，黏性项用 Crank-Nicholson 格式离散. 投影方法通过如下几个步骤求解式 (7) 和式 (8)

(1) 预测步：求解中间速度场 $\boldsymbol{u}^*$

给定估计的压力场 q 且不考虑不可压缩条件，通过

$$\frac{\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t}+\nabla q+\boldsymbol{T}_{ac}-\frac{\nu}{2}\Delta(\boldsymbol{u}^*+\boldsymbol{u}^n)=0 \tag{10}$$

求得一个中间速度场 $\boldsymbol{u}^*$, 式中 q 表示 $p^{n+1/2}$ 的某种近似. 求解式 (10), 需要给定 $\boldsymbol{u}^*$ 的人工边界条件，它可以表示为

$$\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{w}+\Delta t\nabla\psi \tag{11}$$

式中 ψ 为人为给定的边界函数.

(2) 投影步

根据 Helmholtz-Hodge 定理， $\boldsymbol{u}^*$ 可分解成

$$\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{u}^{n+1}+\Delta t\nabla\phi \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{u}^{n+1}$ 满足连续方程 (8), 而 ϕ 为势函数或中间标量场. 对式 (12) 两边取散度，考虑式 (8) 后有

$$\Delta t\nabla^2\phi=\nabla\cdot\boldsymbol{u}^* \tag{13}$$

边界条件为

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi=\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为法向单位向量，式 (14) 成为中间标量场 ϕ 的人工边界条件.

(3) 校正步：更新速度和压力

由式 (13) 和式 (14) 可以求出 ϕ, 然后速度更新采用式 (12), 压力更新公式为

$$p^{n+1/2} = q + f(\phi) \tag{15}$$

式中 f 表示关于 ϕ 的表达式.

从投影方法步骤中可以看到，经过 3 步后就可以得到速度和压力, 而不需要在每步之间反复迭代，这是投影方法的最大优点. 但同时我们也看到，由于压力和速度解耦, 引入了两个人工变量, 即中间速度场 $\boldsymbol{u}^*$ 和中间标量场 ϕ, 这两个变量无法从物理上给出它们的边界条件. 而对这些人工边界的简单经验处理，使得投影方法的整体精度难于提高 (一般来说, 投影方法在空间上比较容易达到高阶精度, 而时间方向精度则难于提高, 因此, 在本文中如非特别声明, 精度均指时间方向精度). 无论是数值实验还是数学理论都可以证明, 速度场在时间方向是容易达到二阶精度甚至更高阶精度, 但是压力场却难于达到高阶精度 [16,17].

获得高精度格式的一个重要方法，就是通过 q, ψ 和 f 的适当组合，减小求解过程带来的误差. 在过去 20 年中，很多学者在这方面进行了大量工作，提出了多种改进的二阶投影格式. 目前比较典型的二阶投影方法中 q, ψ 和 f 常见的表达式见表 1.

表 1　q, ψ 和 f 常见表达式

q	$f(\phi)$	ψ
q1. $p = 0$	L1. $f(\phi) = \phi$	B1. $\nabla\psi = 0$
q2. $q = p^{n-1/2}$	L2. $f(\phi) = \left[1 - \dfrac{\nu\Delta t}{2}\Delta\right]\phi$	B2. $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi = 0$ $\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\psi = \boldsymbol{\tau}\cdot(\Delta t\nabla p^n)_b$

注：　$\boldsymbol{\tau}$ 为切向单位向量

考虑到 q, ψ 和 f 之间并不是完全独立的，二阶精度的 Helmholtz-Hodge 分解类投影方法可以根据 q 和 f 的形式，大致分成 3 类：(1) $q = 0$, $f(\phi) = [1 - 0.5(\nu\Delta t)\Delta]\phi$; (2) $q = p^{n-1/2}$, $f(\phi) = \phi$; (3) $q = p^{n-1/2}$, $f(\phi) = [1 - 0.5(\nu\Delta t)\Delta]\phi$. 当 $q = 0$ 时，计算中间速度场时动量方程中不含压力项，此时的投影方法称为无压力的投影方法；$q \neq 0$ 时，则称为压力增量形式的投影方法.

(1) $q = 0$, $f(\phi) = [1 - 0.5(\nu\Delta t)\Delta]\phi$

Kim 和 Moin 方法 [18] 是这类投影方法的代表. Kim 和 Moin 基本上沿袭了 Chorin 的思想，但是他们注意到因方程 (10) 中消除了压力梯度项 ($q = 0$) 而可能存在的后果：由于动量方程中排除了压力项，速度的计算似乎可以不受压力误差的影响, 这就对中间速度场的边界条件提出了更高的要求. 因此, 为了获得 $\boldsymbol{u}^*$ 二阶近似，Kim 和 Moin 没有采用表 1 中的 B1 作为中间速度场的边界条件, 而是重新推导了 $\boldsymbol{u}^*$ 的边界条件 (表 1 中的 B2). 最近 Iannelli 和 Denaro 认为选用 B2 仍然不能使速度场达到二阶精度，他们提出了一个更精确的边界条件 [19]

$$\boldsymbol{u}_b^* = \left[\left(1+\frac{\nu\Delta t}{2}\Delta\right)\left(1+\frac{\nu\Delta t}{2}\Delta\right)\boldsymbol{u}^n\right]_b + O(\Delta t^3) \tag{16}$$

但是该条件比较复杂, 在实际的计算中容易导致计算失稳，因此并没有很大的应用价值.

(2) $q = p^{n-1/2}$, $f(\phi) = \phi$

在这类方法中具有代表性是 van Kan[20] 和 Bell 等人 [21] 的工作. van Kan 为了让速度和压力的精度提高, 将 $q = p^{n-1/2}$ 参与到中间速度场的计算中，使得中间速度场更加接近真实速度场, 因而 $\boldsymbol{u}^*$ 的边界条件可以采用简单的 B1 式. Bell 等人沿用了这个思想, 为了提高格式的稳定性，在对流向的处理上抛弃了 Adams-Bashforth 格式, 采用无分裂的二阶 Godunov 方法 (unsplit second-order godunov methodology), 采用该方法后可以有效地放松了网格雷诺数的限制, 适用于计算高雷诺数流动, 是一种应用广泛的投影方法 [22~25].

(3) $q = p^{n-1/2}$, $f(\phi) = [1 - 0.5(\nu\Delta t)\Delta]\phi$

在总结前人的基础上，最近 Brown 等人 [26] 认为，结合 $q = p^{n-1/2}$ 和 $f(\phi) = [1 - 0.5(\nu\Delta t)\Delta]\phi$, 只需简单的边界条件 B1, 就可以使得速度和压力达到二阶精度.

此外，Guermond 和 Shen[27] 建议将 N-S 方程的黏性项改成旋度形式

$$\boldsymbol{u}_t + \nabla p = -\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) + \nu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u} \tag{17}$$

这样不仅有利于提高精度, 而且还可增加格式的稳定性.

2.2 近似分裂类投影方法

Issa[28,29] 从算子分裂的角度提出的 PISO (pressure-implicit with splitting of operators) 方法，是算子分裂方法的雏形． Dukowicz 和 Dvingsky[30] 根据 ADI 型分裂方法，提出了一种压力增量形式的、二阶精度的算子分裂格式． Perot[31] 、 Quarteroni 等人 [32] 利用 LU 分解，进一步发展了算子分裂方法． Henriksen 和 Holmen[33] 用 LU 分解，结合压力增量形式，提出了一般形式的算子分裂方法．在一定意义上说，算子分裂方法可以看成为投影方法或者分步方法的矩阵等价形式 [33].

文献中出现的算子分裂方式有多种, 但基本出发点是相同的, 都是通过采用近似分裂将速度和压力解耦求解．在此仅以 LU 分解为例，来阐述近似分裂类的投影方法的构造原理及求解步骤 [33].

首先对半离散形式的 N-S 方程 (7) 和方程 (8) 进行空间离散, 为了更具普遍性, 在形式上作一些微小改变，在动量方程两边同时减去 $\boldsymbol{Gq}$, 且将包含有边界条件信息的方程组写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}^{n+1}\\ \boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Gq}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_u^n\\ \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{p}}^n\end{bmatrix}\tag{18}$$

式中：

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\Delta t}\left[1-\frac{\nu\Delta t}{2}L\right]$$

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{\Delta t}\left[1+\frac{\nu\Delta t}{2}L\right]\boldsymbol{u}^n-[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})]^{n+1/2}$$

$\boldsymbol{b}_u^n$, $\boldsymbol{b}_p^n$ 是考虑边界条件引入的源项．式中 $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{D}$ 和 L 分别为离散形式的梯度、散度和 Laplace 算子．同第 2 节一样，当 $\boldsymbol{q}=0$ 时，为无压力的投影方法；$\boldsymbol{q}\neq 0$ 时，则为压力增量形式的投影方法．对式 (18) 中的系数矩阵进行近似 LU 分裂

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D} & -\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}\approx$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D} & -\boldsymbol{D}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{D} & -\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{G}\end{bmatrix}\tag{19}$$

式中 $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 近似．考虑到式 (19) 后，式 (18) 可以分两步求解

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D} & -\boldsymbol{D}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^*\\ p^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}^n-\boldsymbol{Gq}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_u^n\\ \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{p}}^n\end{bmatrix}\tag{20}$$

$$\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{n+1}\\ \boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^*\\ \boldsymbol{p}^*\end{bmatrix}\tag{21}$$

写成分步形式有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{Gq}+\boldsymbol{b}_u^n\\ &\boldsymbol{D}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{G}(\boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{q})=\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{p}}^n\\ &\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{G}(\boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{q})\end{aligned}\tag{22}$$

根据 $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2$ 对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 近似程度的不同，可以得到不同形式和不同精度的算子分裂格式. 显然式 (22) 在形式上与投影方法完全相似, 但是, 由于在离散的过程中就包括了所有的物理边界条件, 即系数矩阵中都包含了边界信息, 因此近似分裂类投影方法避免了 Helmholtz-Hodge 分解类投影方法所需的人工边界条件，这与 Helmholtz-Hodge 分解类投影方法是不同的．不过，应当指出的是二者可以看作相互关联的两种形式, 并没有本质的区别, 这就是本文中将算子分裂方法也归为一类投影方法的原因. 国内学者黄兰洁等在这方面也开展了卓有成效的研究工作 [34~40], 在他们的研究工作中，先对不可压缩 N-S 方程进行空间离散，将其变成微分代数方程组，通过选择合适的离散算子 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{G}$, 使得离散投影定理成立 (也有的文章采用第 2 节中的半离散写法，如文献 [37]). 对于微分代数方程组，其时间离散方式的选择比较灵活，可用 Rung-Kutta 方法或时间后插．当选择时间后插离散时，不难发现，他们得到的投影方法 (不考虑对流项的处理), 在形式上与式 (22) 中 ($\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{I}\cdot dt$) 类似. 为了提高投影方法的计算效率和改善稳定性，他们发展了 Temam 的隐式投影方法，对对流项进行了有效的处理，得到多种高效、稳健的投影方法．此外，对于压力修正投影方法，通过选择与时间离散相匹配的压力项形式, 得到了分量相容的压力修正方法 (压力增量形式的投影方法).

2.3 局部连续投影方法

最近，本文作者发展了 Gresho 等 [41,42] 的连续投影方法的概念, 提出了局部连续投影方法 [43,44]. 其基本思想是：在某个时间邻域内, 构造一组包含中间变量且易于求解的偏微分方程, 称为连续投影方法的控制方程．我们要求：通过适当选取中间变量及其初边值条件，使构造的偏微分方程组是原 N-S 方程的 k 阶近似．此时，任何对连续投影方法控制方程的 k 阶或高于 k 阶的离散格式都将是原 N-S 方程组的 k 阶近似．连续投影方法通过下列步骤，得到一组作为原始 Navier-Stokes 方程某种近似的新的偏微分方程组.

已知 $\tilde{\boldsymbol{u}}^l,\tilde{p}^l$ $(l\leq n)$, 在 $t=t^n$ 的邻域内，执行

(1) 给定一个估计压力 q, 计算中间矢量场 $\boldsymbol{u}^*$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t} = \nu \Delta \boldsymbol{u}^* - \nabla q - \boldsymbol{T}'_{ac} \tag{23}$$

初、边值条件分别为

$$(\boldsymbol{u}^*)^n = \widetilde{\boldsymbol{u}}^n, \quad \boldsymbol{u}^*_b = \boldsymbol{w} + \nabla \psi \tag{24}$$

式 (23) 中的 $\boldsymbol{T}'_{ac}$ 为对流项的某种近似.

(2) 计算中间标量场 ϕ

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \boldsymbol{u}^* \tag{25}$$

边界条件为

$$\frac{\partial \phi_b}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}} \tag{26}$$

(3) 更新速度和压力

更新速度

$$\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^* - \nabla \phi \tag{27}$$

边界条件为

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_b \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} \tag{28}$$

更新压力

$$\widetilde{p} = q + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nu \Delta \phi \tag{29}$$

把得到的 $\widetilde{\boldsymbol{u}}, \widetilde{p}$ 当作原 N-S 方程的近似解.

(4) 进入 $t = t^{n+1}$ 的邻域, 重复 (1) $\sim$ (3).

文献 [43, 44] 中证明了: 为了使连续投影方法近似 Navier-Stokes 方程到二阶时间精度, 只需 q, ψ 满足

$$q = \alpha_0 p^n + \alpha_1 \Delta t \dot{p}^n \tag{30}$$

$$\nabla \psi = \Delta t \Big\{ (1-\alpha_0) \nabla p^n + \frac{\Delta t}{2} [(1-\alpha_0) \nu \Delta \nabla p^n + (1-\alpha_1) \nabla \dot{p}^n] \Big\}_b \tag{31}$$

式中 α_0, α_1 可取任意值, 因此, 满足以上两个条件的投影方法构成了一类具有二阶精度的投影方法. 局部连续投影格式离散后, 即为离散形式的投影方法. 为了便于与 Helmholtz-Hodge 类投影方法进行对比, 我们将连续投影方法的 3 种半离散格式列于表 2.

表 2 中的 DPM1 、DPM2 与传统的无压力投影方法和压力增量投影方法相类似, 只是当 q 的表达式相同时, 表 2 中的人工边界条件要比 Helmholtz-Hodge 类的复杂些. 而与 DMP3 相类似的是 Gresho 提出的投影方法 - 3[41,42], 但二者的压力更新公式完全不同: Gresho 通过一个压力 Poisson 方程来求解压力, 而我们采用一个代数方程来更新压力.

表 2 3 种典型投影格式

投影类型	q	$\nabla \psi$
DPM1	0	$\Delta t \nabla \left[2p^{n-1/2} - p^{n-3/2} + \frac{\nu \Delta t}{2} \Delta p^{n-1/2} \right]$
DMP2	$p^{n-1/2}$	$\Delta t \nabla [p^{n-1/2} - p^{n-3/2}]$
DMP3	$2p^{n-1/2} - p^{n-3/2}$	0

在文 [44, 45] 中, 还得到了连续投影方法具有三阶时间精度的充分条件, 并构造了相应的离散投影格式.

值得注意的是, 本文作者提出的连续投影方法与 Minion 从偏移校正方法 (deferred correction)[46] 角度来构造投影方法的思路是类似的, 但是, Minion 并未解决一般计算域上中间变量所需要的人工边界条件问题.

3 投影方法的精度分析

投影方法将速度和压力解耦, 使得理论分析变得困难且不易理解 [47]. 理论分析格式精度的方法主要有能量估计法 [16,48~50] 和正则模态分析法 (normal mode analysis)[17,26,51~55] 等. 文献 [55] 对能量方法和正则模态分析法的相对优缺点进行了分析. 在连续投影方法框架下的局部截断误差分析 [43], 为研究投影方法的精度提供了一种简便、可靠的方法. 但在目前, 这种方法只能对某些特定的投影格式进行分析.

由于理论分析的困难, 不同的分析方法得到结论有时不完全相同. 但是基本的结论有: 投影方法的空间精度比较容易达到高阶 [16,17,48,51,52]; 前面介绍的二阶投影方法, 各种分析结果都表明, 速度在时间方向上的具有二阶精度; 而各种分析结果得到的压力时

间精度则不尽相同. Brown 等人 [26] 在一个 x 方向为半无限长、 y 方向为周期性边界的计算域内，采用正则模态法对第 2.1 节中提到的投影方法进行了分析，结果表明 (1) 、 (2) 两类二阶精度投影方法，其压力场都达不到二阶精度，然后他们提出了速度和压力都具有二阶精度的投影方法，即 (3). 最近，Guermond 和 Shen[56] 通过能量估计，发现第第 3 类投影方法，在一般计算域内，其压力的精度最多只有 3/2 阶精度，并得到了数值结果的验证. 本文作者通过局部截断误差分析和数值结果均证明，表 2 中投影方法的速度和压力均具有二阶精度 [43,44].

4 结束语

在不可压缩流动的数值求解过程中，将速度和压力解耦，是诸多求解不可压缩流动的数值方法共同采取的措施，投影方法也不例外. 通过解耦，提高了计算效率，使投影方法成为求解不可压缩流动，尤其是非定常不可压缩流动的一类重要方法，并得到越来越广泛的应用.

然而，速度和压力解耦也给数值格式的计算精度带来了问题，并长期成为大家争论的焦点. 普遍认为，投影方法空间精度容易保证；速度的时间精度比较容易达到二阶，但是压力一般来说难于达到二阶精度. 大部分研究者认为压力精度难于提高的原因，是因为中间变量缺乏合适的边界条件；但也有学者推测，投影方法本身内在的缺陷，导致压力最多只有一阶精度. 我们相信，由于局部连续投影方法更易于利用数学工具进行有效地分析，这将有助于澄清这方面的一些争议. 例如，我们已经证明当估计压力和人工边界条件满足相应地约束条件时，可以构造出时间方向具有二阶和三阶精度的投影方法 [43,44]. 因此，发展高阶精度的投影方法在理论上和技术上都是可能的.

参 考 文 献

1 Chorin A J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J Comput Phys*, 1967, 2: 12～25

2 Steger J L, Kutler P. Implicit finite-difference procedures for the computation of vortex wakes. *AIAA J*, 1977, 15: 581～590

3 Turkel E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *J Comput Phys*, 1987, 72: 277～298

4 吴子牛. 计算流体力学基本原理. 北京：科学出版社， 2001

5 Choi Y H, Merkle C L. The application of preconditioning in viscous flows. *J Comput Phys*, 1993, 105: 207～223

6 Kiris C, Kwak F. Aspects of unsteady incompressible flow simulations. *Computers Fluids*, 2002, 31: 627～638

7 Harlow F H, Welch J E. Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 1965, 8: 2182～2189

8 Harlow F H, Amsden A A. The SMAC method: a numerical technique for calculating incompressible fluid flows. Los Alamos Scientific Laboratory Rept. LA-4370, 1970. 1～50

9 Harlow F H, Amsden A A. A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds. *J Comput Phys*, 1971, 8: 197～213

10 Patankar S V, Spalding D B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows. *Int J Heat Mass Transfer*, 1972, 15: 1787～1806

11 Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Washington, DC: Hemisphere Publishing Corporation, 1980

12 Connell S D, Stow P. A discussion and comparison of numerical techniques used to solve the Navier-Stokes and Euler equations. *Int J Numer Method Fluids*, 1986, 6: 155～163

13 Chorin A J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math Comput*, 1968, 22: 745～762

14 Chorin A J. On the convergence of discrete approximation to the Navier-Stokes equations. *Math Comput*, 1969, 23: 341～353

15 Chorin A J, Marsden G. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. New York: Springer Verlag, 1993

16 E W N, Liu J G. Projection method I: convergence and numerical boundary layers. *SIAM J Numer Anal*, 1992, 32(4): 1017～1057

17 E W N, Liu J G. Projection method II: Godunov-Ryabenki analysis. *SIAM J Numer Anal*, 1996, 33: 1597～1621

18 Kim J, Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J Comput Phys*, 1985, 59: 308～323

19 Iannelli P, Denaro F M. Analysis of the local truncation error in the pressure-free projection method for incompressible flows: a new accurate expression of the intermediate boundary conditions. *Int J Numer Meth Fluids*, 2003, 42: 399～437

20 van Kan J. A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM J Sci Stat Comput*, 1986, 7(3): 870～891

21 Bell J B, Colella P, Glaz H M. A second order projection method for the incompressible Navier- Stokes equations. *J Comput Phys*, 1989, 85: 257～283

22 Eric Y T. A second-corder projection method for the incompressible navier-stokes equations in arbitrary domains. *J Comput Phys*, 1994, 115: 147～152

23 Minion M L. A projection method for locally refined grids. *J Comput Phys*, 1996, 127: 158～177

24 AlmgrenA S, Bell J B, Szymczak W G. A numerical method for the incompressible Navier-Stokes equations based on an approximate projection. *SIAM J Sci Comput*, 1996, 17(2):

358～369
25 Almgren A S, Bell J B, Crutchfield W Y. Approximate projection methods: Part I, inviscid analysis. *SIAM J Sci Comput,* 2000, 22(4): 1139～1159
26 Brown D L, Cortez R, Minion M L. Accurate projection methods for the incompressible Navier- Stokes equations. *J Comput Phys,* 2001, 168: 464～499
27 Guermond J L, Shen J. Velocity-correction projection methods for incompressible flows. *SIAM J Numer Anal,* 2003, 41(1): 112～134
28 Issa R I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J Comput Phys,* 1985, 62: 40～65
29 Issa R I. The computation of compressible and incompressible recirculation flows by a non-iterative implicit scheme. *J Comput Phys,* 1986, 62: 66～82
30 Dukowicz J K, Dvinsky A S. Approximate factorization as a high order splitting for the implicit incompressible flow equations. *J Comput Phys,* 1992, 102: 336～347
31 Perot J B. An analysis of the fractional step method. *J Comput Phys,* 1993, 108: 51～58
32 Quarteroni A, Saleri F, Veneziani A. Factorization methods for the numerical approximation of Navier-Stokes equations. *Comput Methods Appl Mech Eng,* 2000, 188: 505～526
33 Henriksen M O, Holmen J H. Algebraic splitting for incompressible Navier-Stokes equations. *J Comput Phys,* 2002, 175: 438～453
34 黄兰洁，伍亚丹．不可压 Navier-Stokes 方程的隐式投影法．计算数学， 1993, 15(1): 77～89
35 黄兰洁，伍亚丹．非定常不可压 Navier-Stokes 方程的高效和稳健的差分格式 I. 数值计算与计算机应用， 1997, 18(1): 53～63
36 黄兰洁，伍亚丹．非定常不可压 Navier-Stokes 方程的高效和稳健的差分格式 II. 计算数学， 1997, 19(1): 58～72
37 Huang L C, Wu Y D. The component-consistent pressure correction projection method for the incompressible Navier-Stokes equation. *Computer and Math with Applic,* 1996, 31: 1～21
38 George A, Huang L C, Tang W P, Wu Y D. Numerical simulation of unsteady incompressible flow ($Re \leq 9\,500$) on the curvilinear half-staggered mesh. *SIAM J Sci Comput,* 2000, 21(6): 2331～2351
39 Huang L C. The numerical solution of the unstead incompressible Navier-Stokes equations on the curvilinear half-staggered mesh. *J Comput Math,* 2000, 18: 521～540
40 Huang L C. On discrete projection and numerical boundary conditions for the numerical solution of unsteady incompressible Navier-Stokes equations. *J Comput Math,* 2002, 20: 35～56
41 Gresho P M. On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element methods that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 1, theory. *Int J Numer Methods Fluids,* 1990, 11: 587～620
42 Gresho P M, Chan S T. On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 2: implementation. *Int J Numer Method Fluids,* 1990, 11: 621～659
43 Liu M E, Ren Y X, Zhang H X. A class of fully second order accurate projection methods for solving the incompressible Navier-Stokes equations. *J Comput Phys,* 2004, 200: 325～346
44 刘淼儿．数值求解不可压缩流动的投影方法： [博士论文]. 北京：清华大学， 2004
45 Liu M E, Ren Y X, Zhang H X. A class of fully third-order accurate projection methods for solving the incompressible Navier-Stokes equations. *Acta Mech Sinica,* 2005, 21(6): 542～549
46 Minion M L. Semi-implicit projection methods for incompressible flow based on spectral deferred corrections. *Appl Numer Math,* 2004, 48: 369～387
47 Turek S. On discrete projection methods for the incompressible Navier-stokes equations: an algorithmical approach. *Comput Methods Appl Mech Eng,* 1997, 143: 271～288
48 Hou T Y, Wetton B T R. Second-order convergence of a projection scheme for the incompressible Navier-Stokes equations with boundaries. *SIAM J Numer Anal,* 1993, 30(3): 609～629
49 Shen J. On error estimates of the projection methods for the Navier-Stokes equations: first-order schemes. *SIAM J Numer Anal,* 1992, 29(1): 57～77
50 Shen J. On error estimates of the projection methods for the Navier-Stokes equations: second-order schemes. *Math Comput,* 1996, 85: 1039～1065
51 Wetton B T R. Analysis of the spatial error for a class of finite difference methods for viscous incompressible flow. *SIAM J Numer Anal,* 1997, 34(2): 723～755
52 Wetton B T R. Error Analysis for Chorin's original fully discrete projection method and regularizations in space and time. *SIAM J Numer Anal,* 1997, 34(5): 1683～1697
53 Strikwerda J C, Lee Y S. The accuracy of the fractional step method. *SIAM J Numer Anal,* 1999, 37: 37～47
54 Minev P D. A stabilized incremental projection scheme for the incompressible Navier-Stokes equations. *Int J Numer Methods Fluids,* 2001, 36: 441～464
55 Pyo J H, Shen J, Normal mode analysis of second-order projection methods for incompressible flows. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B,* 2005, 5: 817～840
56 Guermond J L, Shen J. On he error estimates for the rotational pressure-correction projection methods. http://www.math.purdue.edu/shen/pub. 2003

REVIEW ON THE PROJECTION METHODS IN THE NUMERICAL SOLUTION OF THE INCOMPRESSIBLE FLOW

LIU Miao'er[1,†] REN Yuxin[2] ZHANG Hanxin[3]

[1] CNOOC Research Center, Beijing 100027, China

[2] Tsinghua University, Beijing 100084, China

[3] National Key Laboratory for CFD, Beijing 100083, China

Abstract Because of the decoupling of the velocity and the pressure computation, the projection method is much more efficient than the fully coupled procedures. This notable advantage has attracted great attention, and many improved projection methods have been developed during the past 20 years. The projection methods are currently among the most popular methods for solving viscous incompressible flow based on the primitive variable formulations. According to their processes of construction, the projection methods are classified into three types in the present paper, namely, the Helmholtz-Hodge decomposition projection methods, the operator splitting projection methods and the local continuous projection methods. Their development and solution procedures are introduced in details. From the solution procedures, it is found that the velocity-pressure decoupling makes it difficult to analyze the accuracy of the projection method, which has often been a subject for debating. Generally speaking, high order convergence in time for the velocity can be readily obtained, while the computed pressure is typically only first order accurate in time. However, by comparing and analyzing the three types of the projection methods, we show that the local continuous projection methods make it possible to develop high order accurate projection methods both theoretically and practically, which may clarify some misunderstandings about the accuracy of projection methods.

Keywords incompressible flow, navier-stokes equations, projection method, temporal accuracy, review

† E-mail: liume@cnooc.com.cn