

# 基于区间分析的工程结构不确定性研究现状与展望

苏静波<sup>†</sup> 邵国建

河海大学土木工程学院, 南京 210098

**摘要** 随机分析方法、模糊分析方法是已经广泛使用的工程结构不确定性分析方法, 近年来区间分析方法逐渐为人们所熟知并成为是一种新的工程结构不确定性分析方法, 它主要用来研究具有区间特性的工程结构. 区间分析方法在统计信息不足以描述不确定参数的概率分布或隶属函数、工程单位仅提供不确定参数的区间范围而想获得结构响应的区间范围时就发挥了其优点. 综述了区间分析方法及其在工程结构不确定性分析中的应用状况, 将基于区间分析的工程结构不确定性问题研究归结为以下 4 个方面: 不确定性结构系统的区间有限元分析; 基于区间的非概率可靠性分析; 工程结构区间反演分析; 基于区间参数的结构优化设计. 分析评价了国内外在这几个方面的研究成果及其最新进展, 同时指出目前研究中存在的问题和研究的方向.

**关键词** 不确定性, 区间分析, 区间有限元, 区间可靠性, 区间反演, 区间优化设计

## 1 引言

通常的结构分析模型是建立在确定性物理意义上的, 即把分析过程中各种因素作为确定性物理量来进行处理. 但是, 实际工程结构分析中存在着各种各样的不确定性, 如果硬将这些不确定性因素作为确定性信息来处理, 有时会得出矛盾的或很不合理的结果<sup>[1]</sup>, 这就使得在工程结构分析过程中不得不考虑这些不确定性因素.

处理不确定性的方法主要有 3 种: (1) 随机模型<sup>[2~4]</sup>, 以此为基础建立了比较完善的随机有限元理论, 主要用来解决具有随机性的问题, 目前已广泛应用于结构的概率可靠性设计中; (2) 模糊模型<sup>[5~8]</sup>, 它是在美国著名控制论专家 Zadeh 提出的模糊集合的基础上发展起来的, 利用模糊统计来研究不确定性, 主要用来解决工程分析中的模糊性信息, 目前此模型研究发展速度较快; (3) 区间分析模型<sup>[9~12]</sup>, 以区间分析方法来研究不确定性, 目前还处于探索阶段, 还需要进一步深入地研究.

3 种分析模型分别适用于解决不同类型的 uncertainty 问题. 区间分析方法在统计信息不足以描述不确定参数的概率分布或隶属函数、工程单位仅提供不确定参数的区间范围而想获得结构响应的区间范围时就发挥了其优点, 这就为区间分析方法开辟了

一定的应用空间. 本文阐述了区间分析方法及其在工程结构中的应用, 并对其存在的问题、发展前景及发展方向提出自己的看法.

## 2 区间分析方法

区间分析方法是自 20 世纪 50 年代末 Moore 提出区间算法的概念<sup>[13]</sup>之后发展起来的. 区间分析方法早期用来处理计算机内浮点算法<sup>[14]</sup>, 然而它在工程实际中具有广泛的存在背景. 在地下工程中, 工程单位提供的岩土体力学参数如弹性模量、泊松比、黏聚力、内摩擦角等常在一定的区间范围内; 在结构设计中<sup>[15]</sup>, 某零件的长度要求为  $x$ , 容差为  $\pm\Delta x$ , 则该零件按精度要求加工出来的实际长度为  $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ ; 另外, 在信息化施工中, 经常要测量工程结构某些部位的位移  $u$  (或应力  $\sigma$ ), 由于仪器精度和测量人员测试技术而产生的测量误差为  $\Delta\delta$ , 则实际测量获得的位移可表示为  $[u - \Delta\delta, u + \Delta\delta]$ . 目前关于区间分析方法<sup>[16,17]</sup>研究主要有 3 个方面: 区间数的运算方法、区间优化方法和区间方程组的解法.

由于区间数的运算不像实数运算那样, 它仅满足交换律、结合律, 而对于另外一些准则如分配律、抵消律等仅表现为弱的形式<sup>[18,19]</sup>; 另外, 区间数之间的相关性而导致区间运算的扩张, 这使得区间分析

收稿日期: 2004-03-09, 修回日期: 2005-05-19

<sup>†</sup> E-mail: jbsu@sohu.com

方法在工程结构分析中的进一步应用受到一定的限制。区间优化方法的研究主要表现在求解非线性方程组的解以及非线性约束优化问题上<sup>[20~23]</sup>, 区间算法可以克服常规数学规划方法中往往只能得到局部最优解的缺陷, 能得到所求问题的全部极值以及全局极值, 因此在工程结构区间优化分析中有着广泛的发展前景<sup>[24]</sup>。

区间分析的另一主要研究方面为区间方程组的解法。设区间方程组为

$$A^I X^I = B^I \quad (1)$$

其中,  $A^I$  为系数区间矩阵,  $B^I$  为右端项区间列阵,  $X^I$  为区间解向量。目前对区间方程组的常用解法主要有下面几种方法。

#### (1) 区间高斯消去法

基于线性方程组高斯消去法的思想, Rao<sup>[11]</sup> 提出了区间高斯消元法求解区间方程组 (1) 的方法。研究表明, 仅在系数区间矩阵对角线元素占优时, 区间 Gauss 法能给出较好的结果<sup>[25]</sup>。但通常情况下, 用 Gauss 消去法解区间系数方程组, 有时会得到过大的误差界, 特别是对于较小的尾数长度和较多的未知数时, 其解是不稳定的。

#### (2) 符号对应法

Rohn<sup>[26]</sup> 介绍了一种新的求解区间方程组的方法。该方法要求区间方程组系数区间矩阵为正则矩阵, 且对于方程阶数非常大的情况, 求解比较困难和复杂。

#### (3) 区间迭代方法

Hansen 研究的一种区间迭代法, 在实际计算中, 只有当系数区间矩阵的区间宽度比较小时, 求解过程才能收敛<sup>[17]</sup>; 对于区间宽度比较大时, 收敛条件很难满足, 从而限制了该方法的使用。

上述几种解法是早期提出的求解方法。在区间有限元方法用于工程结构分析的求解过程中, 还提出了截断方法、摄动方法、组合法以及优化方法等适用于工程结构区间分析的求解区间方程组的方法, 这些解法将在第 3 部分进行阐述。

区间分析方法在工程结构分析中的应用, 可分为工程结构的区间有限元分析、基于区间的非概率可靠性分析、区间反演分析和工程结构区间优化设计分析等。

### 3 基于区间分析的区间有限元方法

区间分析与有限元方法相结合就形成了区间有限元方法。从求解工程结构响应区间的着眼点来看, 区间有限元分析方法可分为两类: 基于不确定性区间参数的区间有限元分析方法和基于有限元区间控制

方程的分析方法。从工程结构输入区间参数与输出区间响应的关系可分为: 线性区间分析方法和非线性区间分析方法。根据工程结构的工作性态分为: 区间静力分析方法和区间动力分析方法。本文主要从求解工程结构区间响应的着眼点来对区间有限元分析方法进行分类评述。

#### (1) 基于区间控制方程的区间有限元方法

在工程结构区间有限元求解过程中, 通过区间控制方程的求解从而得出问题的解区间。禹智涛等<sup>[7]</sup> 在进行模糊有限元分析的过程中, 基于区间分解定理提出了求解有限元区间控制方程的方法, 该方法可以将有限元区间控制方程转化为两个普通的线性方程组来进行求解, 大大简化了区间数之间的运算。但是, 该方法忽略了以分配律代替区间数运算的亚分配律而引起的误差。Rao 等<sup>[11]</sup> 通过区间方程组中所有区间元素上下边界的组合, 研究了区间方程组的直接组合法, 但此解法得出的区间小于原问题的真实解区间, 并且当自由度较多时, 其计算量将是非常庞大的。吴晓等<sup>[27]</sup> 提出了基于泛灰数及其运算性质<sup>[28]</sup> 的不确定性区间分析方法, 该方法将有限元区间控制方程转化为泛灰区间方程组, 然后可以像求解线性方程组那样直接对泛灰区间方程组进行求解。虽然该方法求解比较简单, 但是由泛灰区间的运算性质可知, 泛灰区间的运算会导致区间的收缩<sup>[29]</sup>, 最终得出的解区间比实际问题的区间范围要小。这几种方法将区间控制方程组进行特定的处理, 然后由线性 (或泛灰线性) 方程组的解法求解出原问题的解区间, 从而简化了区间数的运算; 但是, 简化的本身就带有一定的近似, 因此不可避免地产生一定的误差, 并且有时误差可能会很大。

Markov<sup>[30]</sup> 提出了求解区间线性方程的 Jacobi 迭代方法, 并对其收敛性进行了研究, 但该方法对区间刚度矩阵有特定的要求。Dessombz<sup>[31]</sup> 提出了另外一种解决有限元区间控制方程的迭代方法, 但该方法偏于保守。国内, 郭书祥等<sup>[32]</sup> 提出了基于区间运算特性的区间有限元的迭代算法, 用该方法进行计算时只需满足迭代的收敛条件即可。但对于不确定性参数的离差较大时, 该方法就无法收敛。区间数运算会导致区间的扩张是区间迭代方法的致命弱点, 尤其当区间变量个数较多以及有限元区间控制方程比较复杂时, 响应量的变化区间就会很大。为了限制区间运算的扩张, Rao<sup>[11]</sup> 提出了区间截断的方法, 该方法可以较好地处理区间运算中的扩张。由于该方法在端点不能自动退化, 吕震宙等<sup>[33]</sup> 提出了改进的区间截断方法。虽然截断方法可以较好地处理区间运算中的扩张, 但是截断准则不容易确定, 计算结果受截断准则的影响较大。

陈怀海<sup>[15]</sup> 提出了基于区间线性方程组的直接

优化求解方法, 该优化问题将区间线性方程组的所有区间数的变化区间取为边约束, 然后基于 Matlab 语言及其优化工具箱进行计算分析. 该方法对于所求问题自由度较小情况下计算比较方便且收敛较快, 其计算结果的可靠性比较高; 但是对于比较复杂的岩土工程自由度较多的情况, 由于运算速度和优化方法的制约而较难付诸实施.

基于 Neumann 展开与摄动理论相结合的线性方程组的解法, 邱志平<sup>[34]</sup>提出了基于区间线性控制方程的区间摄动方法, 由区间摄动法的收敛条件可知, 当区间离散程度较大时可能不收敛; 因此又提出了子区间摄动方法, 子区间摄动方法可以保证在参数区间离散程度较大的情况下收敛, 可以获得较好的结果. 这在工程结构区间有限元分析中就比较实用, 基于此方法夏仕锋<sup>[35]</sup>获得了一系列具体的区间有限元计算成果. 不管是摄动方法还是子区间摄动方法均用到了区间数学中的自然区间扩张, 因此计算结果一般都比实际解区间要稍大一些, 得出的解区间偏于保守.

综合上述各种方法, 邱志平<sup>[34]</sup>提出的子区间摄动方法可以通过子区间数目的增大获得较为准确的结构响应, 可视为基于区间控制方程的区间有限元计算方法中较好的方法.

#### (2) 基于不确定区间参数的区间有限元分析方法

郭书祥等<sup>[36]</sup>指出由有限元区间控制方程所求得的解区间与基于不确定性区间参数的有限元的解区间是不等价的, 主要原因在于区间控制方程形成时没有考虑区间数之间的相关性, 使得由区间控制方程得出的解区间产生了扩张. 由此, 国内外研究者也提出了基于不确定性区间参数的有限元分析方法.

继 Rao 等<sup>[11]</sup>提出的基于区间控制方程的组合解法后, McWilliam<sup>[37]</sup>和郭书祥等<sup>[36]</sup>提出了基于参数考虑的组合方法, 并且通过考虑响应结果关于不确定参数的单调性问题来减少需要组合的次数, 因此该方法又称为单调性法<sup>[38]</sup>; 当所有不确定参数的单调性确定时, 仅需要两次有限元控制方程的求解就可以得出原问题的解区间; 因此, 该方法比较适合有具体工程背景的情况. 刘世军<sup>[38]</sup>提出了基于不确定性区间参数的优化方法, 该优化方法除了考虑不确定参数的区间约束外, 还考虑了有限元控制方程约束. 优化分析方法既可以用于弹性分析中, 也可以用于弹塑性分析中. 但当计算范围的自由度和不确定性参数较多时, 计算量是巨大的; 优化计算得出的区间范围理论上应该小于或等于问题真正的区间范围. 当单调性得到满足时组合方法往往可以得到问题的准确解区间, 但是一般工程问题不确定性参数较多, 单调性难于满足; 而优化方法当自由度较多时计算量较大, 如果将两者结合, 将可以大大减少计算量, 并且可以得到满意的解区间.

邱志平继提出区间控制方程组的摄动方法后, 又提出基于不确定区间参数的摄动方法<sup>[12,39]</sup>, 其核心思想是将刚度矩阵和载荷向量按照结构有限元和子结构理论进行分解, 然后用摄动方法进行求解; 但这种方法忽略了刚度矩阵和载荷向量中不确定性参数的相互作用. McWilliam<sup>[37]</sup>提出了改进的区间摄动法, 可以部分考虑这种相互作用. 刘世军<sup>[38]</sup>将区间刚度矩阵和载荷向量在均值处进行 Taylor 展开, 然后用摄动方法进行求解. 由于区间参数摄动方法要求刚度矩阵的变化范围较小, 而实际工程中不确定参数的变化范围一般又比较大, 这时采用考虑参数区间分区摄动的方法来处理. 该方法适合于岩土工程中区间数离散程度较大情况, 并且可以得到较准确的解区间. 陈塑寰、杨晓伟等<sup>[40,41]</sup>从单元的角度出发, 基于摄动的思想推出了基于单元的区间有限元计算方法, 该方法对划分单元比较多而含有不确定参数的单元较少的不确定问题具有非常快的计算速度.

虽然单调性方法可以得出结构响应的准确解, 然而由于其特定的应用背景而受到较大的限制; 优化方法对于所求结构区间响应数目较多时计算速度就大为降低; 而基于单元的区间摄动方法可以针对含有不确定参数的单元进行分析, 可以联合区间有限元与常规有限元进行分析, 当考虑参数区间的细分后, 既可以达到较好的精度, 也具有较高的计算效率.

另外, Koyloulglu 等<sup>[42]</sup>用三角不等式和线性规划方法来分析线弹性梁的响应区间; 郭书祥等<sup>[43]</sup>基于区间数的运算特性提出了求解区间有限元控制方程的方法, 将组合方法与迭代方法相结合提出了组合迭代方法<sup>[36]</sup>. 邱志平<sup>[44]</sup>对区间分析方法与凸模型分析方法得出的结构静态响应进行了对比. 近年来, 具有区间参数结构的动力响应问题研究颇多, 邱志平等<sup>[45~49]</sup>利用区间摄动方法分析结构的动力响应, 吴杰等<sup>[50]</sup>、王登刚<sup>[51]</sup>、Moens 等<sup>[52]</sup>利用区间优化方法研究结构的动力响应.

## 4 基于区间分析的非概率可靠性分析

随机可靠性理论是目前用于求解不确定性问题的常用方法, 但随机可靠性方法对已知数据的依赖性较强, 而实际工程中可得数据的有限性, 在一定程度上限制了随机可靠性方法在实际中的应用<sup>[53]</sup>. Ben-Haim<sup>[9]</sup>于 1994 年基于区间分析思想首次提出了非概率可靠性的概念. 基于区间分析的非概率可靠性分析主要有以下几种:

(1) Ben-Haim<sup>[9,54,55]</sup>的非概率可靠性模型是以结构系统能容许的不确定性干扰的最大程度来确定的. 该模型认为结构系统在失效前如果能承受较大

数量的不确定性, 则系统是可靠的; 相反, 如果结构系统对于不确定性是脆弱的, 则认为该系统是不可靠的。

(2) 郭书祥等<sup>[56]</sup>用概率可靠性方法类似的处理, 由结构的失效准则确定出功能函数, 然后由区间运算得出功能函数的均值和离差, 用均值和离差的比值作为可靠性与否的评价标准. 该准则认为此比值比1大的越多, 说明结构越可靠. 继而从几何上说明, 可靠性指标为标准化区间变量的扩展空间中从坐标原点到失效面的最短距离. 然而, 该模型无法对可靠性指标在区间 $[-1, 1]$ 这个盲区进行分析, 认为可靠性指标在区间 $[-1, 1]$ 上均表示结构不可靠.

(3) 吕震宙等<sup>[33]</sup>基于模糊隶属函数以及概率可靠性思想, 建立了另一种非概率可靠性模型. 将不确定参数看作其区间上的均匀分布函数, 通过此函数与隶属函数乘积在不确定域上的积分来确定结构系统可靠性指标.

(4) 郭书祥等<sup>[57]</sup>建立了概率与非概率混合可靠性模型, 该模型将功能函数定义为随机变量与区间变量混合的函数. 通过两级功能方程的逐次建立及可靠性分析, 给出结构可靠性的概率度量.

尽管已提出若干种基于区间分析的非概率可靠性模型, 但至今仍没有统一的判别结构非概率可靠性的标准, 无法像随机可靠性那样来判断结构的失效与否. 这是区间可靠性方法无法付诸于工程实际的原因. 此外, 对于复杂的岩土工程问题来说, 其可靠性的分析是非常复杂的, 如何基于区间分析思想建立其失效模式以及用功能函数来分析其区间可靠性, 如何将区间可靠性模型与概率可靠性模型联合应用有待于深入研究.

总之, 非概率可靠性模型对已知数据的要求相对较低, 当缺乏足够数据准确定义概率模型时, 非概率可靠性计算方法是传统可靠性计算的一种较好的选择.

## 5 基于区间模型的反演分析

在工程的设计和施工方案中, 采用的材料参数往往是通过现场或室内试验得出或根据以往的经验得出, 而现场或室内试验又往往受到经费和工作条件等客观因素的限制, 一般难以客观地反映整个工程的实际情况, 所以有必要在工程方案的具体实施过程中, 通过系统响应的实时观测资料来反演得出材料参数, 并对原设计和施工方案进行实时监控和动态设计施工<sup>[58]</sup>; 另一方面, 基于反分析结果对计算模型或参数进行修正, 对工程结构进行更准确的评价和实时安全监控预报, 也可对已建结构物进行实时的安全监控、可靠度评估和预报<sup>[59]</sup>.

不确定性反分析可采用区间分析方法, 由于它只需要较少的数据信息(上下界)就可以来描述参数或量测信息的不确定性, 比较符合客观实际, 减少了人为假设的影响, 提高了计算结果的可靠性, 为工程实际提供了简单可行的方法. 由此, 国内外学者建立了基于区间分析方法的区间反演分析模型. 日本学者 Juhachi 和 Satoru<sup>[60]</sup>首先于 1980 年利用带有误差的位移来反演接触面的应力分布, 具有了一定的区间反演思想. Nakagiri 和 Suzuki<sup>[61]</sup>于 1999 年比较详细地论述了区间有限元反演分析的思想, 文中在假设劲度矩阵是确定值的情况下, 通过拉格朗日乘子方法辨识了在不定位移下方板平面结点荷载的分散程度; 并通过载荷对不定位移的敏感性分析来评价反演载荷不确定性的影响. 王登刚等<sup>[62,63]</sup>建立了同时用于反演巷道围岩的初始应力和弹性模量的反演模型以及混凝土坝振动参数的区间逆分析模型, 并用约束变尺度方法求解了两种反演模型; 但是此反演模型对初值比较敏感, 实际计算时经常需采用不同的初始点进行计算, 然后取其最大最小值, 计算量比较大. 刘世军等<sup>[64]</sup>建立了基于参数的摄动方法的摄动反演模型, 该模型先经过一次确定性反分析获得不确定参数的均值, 然后再由摄动公式依次反求出不确定参数的离差, 并利用该模型对岩石力学参数弹性模量和泊松比进行了反演分析; 但该方法需对参数求偏导, 计算量也比较大.

虽然上述反演方法应用于工程实际, 并取得了一定的成果. 但由于实际工程问题的复杂性, 如何建立比较合理简单的区间反演模型, 以及区间反演结果好坏的评价标准仍需进一步的研究. 对于反演计算效率问题, 借助于大型有限元分析软件计算速度快的特点进行也是一种趋势.

## 6 基于区间分析的工程结构优化设计

工程结构的设计受控于材料特性、几何参数、作用载荷及其它参量的不确定性, 传统的方法是通过安全因子来处理不确定性. 近年来, 大多采用概率可靠性优化设计. 然而, 由于概率方法的缺陷, 基于区间分析方法的工程结构优化设计逐渐被重视并付诸于工程实际.

由于区间分析方法能得到全局最优解<sup>[20]</sup>, 克服了常规数学规划法中只能得到局部最优解的缺陷, 蔡新等<sup>[24]</sup>将其应用于土石坝结构的优化设计中, 建立了以工程造价为目标函数的区间优化分析模型; 该模型收敛性好, 计算量小, 简单有效. Elishakoff<sup>[65]</sup>和 Lombardi<sup>[66,67]</sup>等提出了工程结构设计的反优化思想, 它实际上属于两级优化问题, 在上一级优化设计中获取最优设计, 在下一级通过反优化不确定性,

找出一已知设计的最不利响应;该优化设计思想被成功地应用于桁架结构的优化设计中。Ganzerli 等<sup>[68]</sup>将凸集模型用于结构的优化设计中,应用叠加方法直接获得结构响应区间,无需进行反优化计算。郭书祥等<sup>[69~71]</sup>基于其建立的非概率可靠性模型建立了结构优化设计分析模型及稳健可靠性设计方法,并对轴承及桁架结构进行了优化设计。另外程远胜等<sup>[72,73]</sup>、李永华<sup>[74]</sup>也基于非概率可靠性模型建立了结构的优化设计模型。

在实际工程结构设计中,需要合理地定量处理各种影响工程结构性能的不确定性,区间分析方法更具潜力。如何将区间分析方法应用于复杂的岩土工程问题设计分析,是一个很有挑战性的研究方向。

## 7 区间分析方法的发展前景及发展方向

区间分析方法是在区间数学的基础上发展起来的一种新的工程结构不确定性分析方法。它基于较少的数据(不确定参数的上下界)就可以解决一系列不确定性问题,得到令人满意的结果,可以作为随机不确定模型的有益补充,具有远大的发展前景。

笔者认为,区间分析方法还须在以下几个方面加以发展,以使其更能满足实际工程的需要。

(1) 区间分析中存在的主要问题是区间数运算会导致区间扩张的问题,已有的截断方法虽然可以解决这一问题,但其截断准则是人为规定的,具有较大的随意性;如何正确合理地解决好区间扩张的问题是求解成败的关键,也是目前需要着重研究的问题。

(2) 目前出现了各种各样的区间计算处理方法,但是区间运算的精度问题仍然没有引起大家的注意,这也是区间算法还没有大量付诸于工程实际的原因。因此,区间运算的精度问题应该是以后研究的注意点。

采用摄动方法进行一阶 Taylor 展开可以减弱区间数之间的相关性,随着子区间数目的增大 Taylor 展开的精度也是可以得到满足的,因此笔者认为子区间与摄动方法的结合可以较好的解决区间扩张的问题与算法的精度问题。

(3) 目前区间分析方法主要集中于解决一些自由度较少的杆件结构,而对于比较复杂的自由度较多的地下结构来说,目前研究的还很少。地下结构中经常提供的力学参数如弹性模量、泊松比、黏聚力、内摩擦角等常在一定的区间范围内;有时结构几何参数如衬砌厚度、锚杆长度等也可能在一定区间范围内变化,有着广泛的存在背景。因此,地下结构等复杂结构中的区间分析方法应当是以后的一个研究方向。

(4) 区间分析方法由于区间扩张以及计算精度问题使得非线性的迭代还存在一定的难度,目前主要停

留在结构线弹性有限元的分析上,因此有必要考虑材料的非线性,形成完整的结构非线性区间有限元分析体系。

(5) 非概率的可靠性已经提出了几种计算模型,这些模型获得的可靠度值与传统的概率可靠性模型获得的可靠度值之间有何关系,怎么去建立统一的判断结构失效的标准,是非概率可靠性需要进一步研究的内容。此外,对于复杂的岩土工程问题来说,其可靠性的分析是非常复杂的,如何基于区间分析思想建立其失效模式以及用功能函数来分析其区间可靠性,如何将区间可靠性模型与概率可靠性模型联合应用,这些均有待于深入研究。

(6) 目前的反演计算是基于确定性有限元计算基础上的优化分析计算,由于实际工程问题的复杂性,如何建立比较合理简单的区间反演模型,以及区间反演结果好坏的评价标准,这些仍需进一步的研究。对于反演计算效率问题,借助于大型有限元分析软件计算速度快特点进行研究也是一种趋势。

(7) 区间有限元方法可以作为参数敏感性分析的一种手段,给定参数相当的微小变化区间,通过考察点的区间响应来决定参数敏感性的大小。

另外,对于具有区间参数结构的固有频率的计算,也是目前比较热门的研究方向。

## 参 考 文 献

- 1 王光远. 论不确定性结构力学的发展. 力学进展, 2002, 32(2): 205~211
- 2 Cambou B. Application of first order uncertainty analysis in the finite element method in linear elasticity. In: Proc Second Int Conf on Applications of Statistics and Probability in Soil and Struct Engng. London, England, 1971. 117~122
- 3 Contreras H. The stochastic finite-element method. *Computers & Structures*, 1980, 26(12): 341~348
- 4 刘宁, 吕泰仁. 随机有限元及其工程应用. 力学进展, 1995, 25(1): 114~126
- 5 Moens D, Vandepitte D. Fuzzy finite element method for frequency response function analysis of uncertain structures. *AIAA Journal*, 2002, 40(1): 126~136
- 6 Rao S S, Sawyer J P. Fuzzy finite element approach for the analysis of imprecisely defined systems. *AIAA Journal*, 1995, 33(12): 2364~2370
- 7 禹智涛, 吕恩琳, 王彩华. 结构模糊有限元平衡方程的一种解法. 重庆大学学报, 1996, 19(1): 53~58
- 8 Cherki A, Plessis G, Lallemand B, et al. Fuzzy behavior of mechanical systems with uncertain boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 189: 863~873
- 9 Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability. *Structure Safety*, 1994, 14(4): 227~245
- 10 Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from A M Freudenthal's criticisms to modern convex modeling. *Computers & Structures*, 1995, 56(6): 871~895

- 11 Rao S S, Berke L. Analysis of uncertain structural systems using interval analysis. *AIAA Journal*, 1997, 35(4): 725~735
- 12 邱志平, 顾元宪. 有界不确定参数结构位移范围的区间摄动法. *应用力学学报*, 1999, 16(1): 1~10
- 13 Moore R, Yang C. Interval analysis. Technical Document, Lockheed Missiles and Space Division, Number LMSD-285875, 1959
- 14 胡承毅, 徐山鹰, 杨晓光. 区间算法简介. *系统工程理论与实践*, 2003, 23(4): 59~62
- 15 陈怀海. 非确定结构系统区间分析的直接优化法. *南京航空航天大学学报*, 1999, 31(2): 146~150
- 16 Moore R E. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Philadelphia: Society for Industrial & Applied Mathematics, 1979
- 17 沈祖和. 区间分析方法及其应用. *应用数学和计算数学*, 1983, 2: 34~58
- 18 Moore R E. *Interval Analysis*. New York: Englewood, Prentice-Hall, 1966
- 19 刘山洪, 魏建东, 杨永贤. 用区间有限元计算桥梁结构荷载组合效应. *重庆交通学院学报*, 2001, 20(2): 9~12
- 20 张乃良, 王海鹰, 刘蕴华. 非线性规划的区间方法. *河海大学学报*, 1992, 20(3): 97~103
- 21 曹德欣, 沈祖和. 一类非光滑优化问题的区间算法. *高等学校计算数学学报*, 1998, 3(1): 23~33
- 22 Shen P P, Zhang K C. An interval method for non-smooth global optimization problem. *OR Transactions*, 2002, 6(2): 9~18
- 23 王海军, 曹德欣, 李苏北, 邓喀中. 非线性等式约束全局优化问题的区间算法. *中国矿业大学学报*, 2003, 32(2): 204~208
- 24 蔡新, 吴威, 吴黎华, 郭兴文. 土石坝结构区间优化设计. *河海大学学报*, 1998, 26(3): 1~5
- 25 Beech H, Nichel E. *Interval Mathematics, Lecture Notes in Computer Science 29*. New York: Springer-Verlag, 1975
- 26 Rohn J. Systems of linear interval equations. *Linear Algebra and its Applications*, 1989, 126: 39~78
- 27 吴晓, 罗佑新, 文会军, 李敏. 非确定结构系统区间分析的泛灰求解方法. *计算力学学报*, 2003, 20(3): 329~334
- 28 王清印. *灰色数学基础*. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996
- 29 仝凌云, 杨钊. 区间数和泛灰数在区间分析中的比较. *河北工业大学学报*, 2001, 30(4): 93~96
- 30 Markov S. An iterative method for algebraic solution to interval equations. *Applied Numerical Mathematics*, 1999, 30: 225~239
- 31 Dessombz O, Thouverez F, Laine J P, Jezequel L. Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239(5): 949~968
- 32 郭书祥, 吕震宙. 区间有限元静力控制方程的一种迭代解法. *西北工业大学学报*, 2002, 20(1): 20~23
- 33 吕震宙, 冯蕴雯, 岳珠峰. 改进的区间截断法及基于区间分析的非概率可靠性分析方法. *计算力学学报*, 2002, 19(3): 260~264
- 34 Qiu Z P, Elishakoff I. Anti-optimization of structures with large uncertain but non-random parameters via interval analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 152(3-4): 361~372
- 35 夏仕锋. 基于区间数学的结构不确定性分析方法的研究: [硕士学位论文]. 南京: 河海大学, 2000
- 36 郭书祥, 吕震宙. 线性区间有限元静力控制方程的组合解法. *计算力学学报*, 2003, 20(1): 34~38
- 37 McWilliam S. Anti-optimization of uncertain structures using interval analysis. *Computer and Structures*, 2001(79): 421~430
- 38 刘世军. 岩石力学反演分析及工程应用: [博士学位论文]. 南京: 河海大学, 2003
- 39 邱志平, 顾元宪. 有界不确定性参数结构静力位移范围的区间参数摄动法. *兵工学报*, 1998, 19(3): 255~258
- 40 Chen S H, Lian H D, Yang X W. Interval static displacement analysis for structures with interval parameters. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53: 393~407
- 41 杨晓伟, 陈塑寰, 滕绍勇. 基于单元的静力区间有限元法. *计算力学学报*, 2002, 19(2): 179~183
- 42 Koylouglu H U, Cakmak A S, Nielsen S R K. Interval algebra to deal with pattern loading and structural uncertainties. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, 121(11): 1149~1157
- 43 郭书祥, 吕震宙. 区间运算和区间有限元. *应用数学和力学*, 2001, 22(12): 1249~1254
- 44 Qiu Z P. Comparison of static response of structures using convex models and interval analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56: 1735~1753
- 45 Qiu Z P, Chen S H, Liu Z S. Matrix perturbation method for the vibration problem of structures with interval parameters. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, 15(6): 551~560
- 46 邱志平, 顾元宪, 王寿梅. 有界参数结构特征值的上下界定理. *力学学报*, 1999, 31(4): 466~474
- 47 邱志平, 王晓军, 马一. 结构复固有频率区域的区间摄动法. *北京航空航天大学学报*, 2003, 29(5): 406~409
- 48 Qiu Z P, Wang X J. Comparison of dynamic response of structures with uncertain-but-bounded parameters using non-probabilistic interval analysis method and probabilistic approach. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40: 5423~5439
- 49 王晓军, 邱志平. 含不确定参数弹簧质量系统振动反问题的区间分析法. *固体力学学报*, 2004, 25(4): 461~466
- 50 吴杰, 陈塑寰. 区间参数振动系统的动力优化. *力学学报*, 2003, 35(3): 373~376
- 51 王登刚. 计算具有区间参数结构的固有频率的优化方法. *力学学报*, 2004, 36(3): 364~372
- 52 Moens D, Vandepitte D. An interval finite element approach for the calculation of envelope frequency response functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61: 2480~2507
- 53 郭书祥. 非随机不确定结构的可靠性方法和优化设计研究: [博士学位论文]. 西安: 西北工业大学, 2002
- 54 Ben-Haim Y. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models. *Structure Safety*, 1995, 17(2): 91~109
- 55 Ben-Haim Y. *Robust Reliability in the Mechanical Sciences*. Berlin: Springer-Verlag, 1996
- 56 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型. *计算力学学报*, 2001, 18(1): 56~60
- 57 郭书祥, 吕震宙. 区间可靠性分析的和非概率混合模型. *机械强度*, 2002, 24(4): 524~526

- 58 Gioda G, Sakurai S. Back analysis procedure for the interpretation field measurements in geomechanics. *Int J for numerical and analysis methods in geomechanics*, 1987, 11: 555~583
- 59 Foschi R O, Li H. Inverse reliability method and application in offshore engineering. In: Schueller, Shinozuka, Yao, eds. *Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'97)*, Balkma, Rotterdam, 1998. 551~557
- 60 Juhachi O, Satoru M. On inverse analytical technique to obtain contact stress distributions-techniques using measurement values with errors (in Japanese). *Trans Japan Soc, Mech Engrg Ser A*, 1980, 55: 827~877
- 61 Nakagiri S, Suzuki K. Finite element interval analysis of external loads identified by displacement input with uncertainty. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 168(1): 63~72
- 62 王登刚, 刘迎曦, 李守巨, 刚宪约. 巷道围岩初始应力场和弹性模量的区间反演方法. *岩石力学与工程学报*, 2002, 21(3): 305~308
- 63 王登刚, 刘迎曦, 李守巨. 混凝土坝振动参数区间逆分析. *大连理工大学学报*, 2002, 42(5): 522~526
- 64 刘世君, 徐卫亚, 王红春, 邵建富. 岩石力学参数的区间参数摄动反分析方法. *岩土工程学报*, 2002, 24(6): 760~763
- 65 Elishakoff I, Haftka R T, Fang J. Structural design under bounded uncertainty-optimization with anti-optimization. *Computers & Structures*, 1994, 57(6): 1401~1405
- 66 Lombardi M. Optimization of uncertain structures using non-probabilistic models. *Computers & Structures*, 1998, 67(1-3): 99~103
- 67 Lombardi M, Haftka R T. Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 157(1-2): 19~31
- 68 Ganzerli S, Pantelides C P. Load and resistance convex models for optimum design. *Structural Optimization*, 1999, 17(2): 259~268
- 69 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 机械静强度可靠性设计的非概率方法. *机械科学与技术*, 2000, 19(增刊): 106~107
- 70 郭书祥, 吕震宙. 基于非概率模型的结构稳健可靠性设计方法. *航空学报*, 2001, 22(5): 451~453
- 71 郭书祥, 吕震宙. 基于非概率模型的结构可靠性优化设计. *计算力学学报*, 2002, 19(2): 198~201
- 72 程远胜, 曾光武. 结构非概率可靠性优化设计. *华中科技大学学报*, 2002, 30(3): 30~32
- 73 程远胜, 曾光武. 非概率不确定性及其对船舶坐墩配墩优化的影响. *工程力学*, 2003, 20(3): 129~133
- 74 李永华, 黄洪钟, 马启明. 轴静强度的非概率可靠性设计. *可靠性设计与工艺控制*, 2003, (3): 24~27

## CURRENT RESEARCH AND PROSPECTS ON INTERVAL ANALYSIS IN ENGINEERING STRUCTURE UNCERTAINTY ANALYSIS

SU Jingbo<sup>†</sup>      SHAO Guojian

College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China

**Abstract** Stochastic analysis method and fuzzy analysis method are widely used in uncertainty analysis of engineering structures. Recently, interval analysis method is gradually known and becomes a new uncertainty analysis method. Interval analysis method is mainly used for engineering structures with interval properties. Interval analysis method shows its merits when the statistical information does not available for the parameters' probability distributions or related functions except the intervals of the parameters. In this paper, interval analysis method and its applications in engineering structure uncertainty analysis are overviewed. The applications are summarized into four parts, that is, interval finite element analysis in uncertainty of engineering structures; the probability based on interval analysis; interval inverse analysis method of engineering structures; structural optimum design based on interval parameters. The research results and recent advances in these parts are analyzed, and the existing problems and future trends in these fields are discussed.

**Keywords** uncertainty, interval analysis, interval finite element, probability based on interval analysis, interval inverse, interval optimum

---

<sup>†</sup>E-mail: jbsu@sohu.com