不变变分问题

Emmy Noether

(此文献给 F. Klein, 为博士研究 50 周年纪念日作)

(1918 年 6 月 26 日　　F. Klein 推荐)

编者按语: 众多学者在研究对称性与守恒量问题时, 都在引用德国数学家 Emmy Noether (1882 ∼ 1935) 1918 年的奠基性论文 Invariante Variationsprobleme (不变变分问题). 论文是用德文写的. 我们从 Лолак 1959 年主编的《力学的变分原理》(俄文) 中找到论文的俄译本. 本刊刊出俄译本的译文, 供广大研究者参考. 原文没有摘要和关键词. 下面的摘要和关键词是译者加上去的.

摘　要　研究 Lie 意义下的允许连续群的变分问题. 基于形式变分学方法与 Lie 群理论方法的联系, 得到以下两个定理. 定理 1: 如果积分 $I=\int\cdots\int f\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots\right)\mathrm{d}x$ 相对某有限连续群 D_ρ 是不变的, 则 Lagrange 表示 ψ 的 ρ 个线性独立组合将变为散度; 反之, 由后一条件得到积分 I 相对某群 D_ρ 的不变性. 对无限多个参数的极限情形, 定理也对. 定理 2: 如果积分 I 相对无限连续群 $D_{\infty\rho}$ 是不变的, 在此群中会出现直至 σ 阶导数的导数, 那么 Lagrange 表示 ψ 及其至 σ 阶导数之间有 ρ 个恒等关系成立; 这里反述也对. 定理 1 在 $\psi=0$ 时给出 ρ 个第一积分. 定理 2 表明, Lagrange 方程总数中的 ρ 个方程是其余方程的结果.

关键词　不变性, 变分问题, Lie 群, Lagrange 表示, 散度, 积分

1　预备知识与定理的表述

这里所谈到的是允许连续群 (Lie 意义下) 的变分问题; 由此导出的关于相应微分方程的结果在第 1 节表达的定理中找到它最一般的表达式并在后几节中给出证明. 对于这些由变分问题产生的微分方程, 可以认为要比作为 Lie 研究工具的相对微分方程的任意可允群更为精确的表达. 这样, 下面的描述是基于形式变分学方法与 Lie 群理论方法的联系. 对特殊群和特殊变分问题, 这种方法联系不是新的; 我已提到 Hamel 和 Herglotz 致力的特殊有限群, Lorentz 和他的学生们 (如 Fokker), Weiler 和 Klein 致力的特殊无限群.　Klein 的第 2 篇论文和本文特别的彼此相互影响; 为此, 我愿意在 Klein 的论文中给出末尾的注释.

以下出现的所有函数都假设在所论域上是解析的, 或者至少是连续有界的, 通常是连续可微的、单值的.

众所周知, ‘变换群’ 理解为这样的变换组, 在变换时每一个变换都对应有同组内的逆变换, 而由组内任意两个变换组成的变换也在给定组内. 一个群称为有限连续群, 如果其变换包括在解析地依赖于 ρ 个实参数 p (即这些 p 参数不可能作为参数最小数目的 ρ 个函数) 的最一般的变换中.

依此, 无限连续群 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 理解为这样的群, 即对它的最一般的变换依赖于 ρ 个实任意函数 $p(x)$ 及其导数, 或解析地, 或至少这种依赖性用允许有限个连续导数的连续函数来表达. 依赖于无限多个参数, 但不依赖于任意函数的群处于中间情况. 最后, 依赖于任意函数, 也依赖于参数的群称为混合群.

设 $x_1,\cdots,x_n$ 为独立变量,　$u_1(x),\cdots,u_\mu(x)$ 为它们的函数. 如果 x 和 u 发生某个群变换, 那么由变换假设的可逆性, 被变换了的量将精确地包含 n 个独立量 $y_1,\cdots,y_n$; 其余的量依赖于前者, 记作

$v_1(y),\cdots,v_n(y)$. 在变换中可遇到 u 对 x 的导数, 即 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots$. 某函数称为群不变的, 如果成立关系

$$P\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots\right)=P\left(y,v,\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\cdots\right)^*$$

其中可注意的是, 积分 I 是群不变的, 如果成立关系

$$I=\int\cdots\int f\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots\right)\mathrm{d}x=\int\cdots\int f\left(y,v,\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cdots\right)\mathrm{d}y \tag{1}$$

这里积分遍及 x 的任意实域和 y 的相应域上.

另一方面, 对某个任意的不必是不变的积分 I, 我得到一次变分 δI, 并利用分部积分法按变分法变换它. 如果认为, 在边界上 δu 连同所有遇到的导数都为零, 那么得到

$$\delta I=\int\cdots\int \delta f\mathrm{d}x=\int\cdots\int\left[\sum\psi_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\right)\delta u_i\right]\mathrm{d}x \tag{2}$$

这里 ψ 标记 Lagrange 表示, 即对相应变分问题

$$\delta I=0$$

的 Lagrange 方程的左端. 这个积分关系对应 δu 与其导数间不含积分的等式; 这个等式用写出边界上相应值的项来得到. 正如分部积分证明的, 这些项就是散度的积分, 即表达式

$$\operatorname{div}A=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

的积分, 并且在表达式 A 中 δu 及其导数线性地出现. 因此, 得到

$$\sum\psi_i\delta u_i=\delta f+\operatorname{div}A \tag{3}$$

其中可注意的是, 如果 f 仅包含 u 的一阶导数, 那么在单重积分情形, 等式 (3) 与 Heun 称之为 'Lagrange 中心方程'

$$\sum\psi_i\delta u_i=\delta f-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial u_i'}\delta u_i\right),\quad\left(u_i'=\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x}\right) \tag{4}$$

的方程相重合, 此时对 n 重积分, 方程 (3) 变为下式

$$\sum\psi_i\delta u_i=\delta f-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial\frac{\partial u_i}{\partial x_1}}\delta u_i\right)-\cdots-\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial\frac{\partial u_i}{\partial x_n}}\delta u_i\right) \tag{5}$$

对单重积分, 对 u 的 κ 次导数, 方程 (3) 取形式

$$\begin{aligned}\sum\psi_i\delta u_i=&\ \delta f-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sum\left[\binom{1}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(1)}}\delta u_i+\binom{2}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}}\delta u_i^{(1)}+\cdots+\binom{\kappa}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(\kappa)}}\delta u_i^{(\kappa-1)}\right]\right\}+\\&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left\{\sum\left[\binom{2}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}}\delta u_i+\binom{3}{2}\frac{\delta f}{\partial u_i^{(3)}}\delta u_i^{(1)}+\cdots+\binom{\kappa}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(\kappa)}}\delta u_i^{(\kappa-2)}\right]\right\}+\\&\cdots+(-1)^\kappa\frac{\mathrm{d}^\kappa}{\mathrm{d}x^\kappa}\left\{\sum\binom{\kappa}{\kappa}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(\kappa)}}\delta u_i\right\}\end{aligned} \tag{6}$$

相应的等式在 n 重积分下成立; 其中, A 包含 δu 至 $(\kappa-1)$ 阶导数. 用方程 (4), (5), (6) 事实上可确定 Lagrange 表示 ψ_i 的情况由以下得知: 用右端组合可消去 δu 的所有高阶导数, 此时另一方面, 分部积分单值地导出的关系 (2) 得以满足.

将表述如下两个定理:

1. 如果积分 I 相对某群 $\mathcal{D}_\rho$ 是不变的, 那么 Lagrange 表示的 ρ 个线性独立组合将变为散度, 反之, 由后一条件得到 I 相对某群 $\mathcal{D}_\rho$ 的不变性. 对无限多个参数的极限情形, 定理也对.

2. 如果积分 I 相对群 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 是不变的, 在此群中会遇到直至 σ 阶导数的导数, 那么在 Lagrange 表示及其至 σ 阶导数之间有 ρ 个恒等关系成立; 这里也能反演.

对混合群这两个定理也成立; 因此, 无论依赖性还是不依赖于它们的散度关系 (Divergenzrelationen) 都存在.

如果由这些等式引向相应的变分问题, 即如果取 $\psi=0$, 那么对散度成为全微分的一维空间情形, 定理 1 表明存在 ρ 个第 1 积分, 在所有情形第一积分之间可存在非线性依赖性; 在多维情形得到散度关系, 现在它们常确定为 '守恒定理'; 定理 2 是说, Lagrange 方程总数中的 ρ 个方程是其余方程的结果.

定理 2 的最简单例子, 不用说, 乃是 Weierstrass 参数表示; 这里在一阶齐次下积分显然是不变的, 如果用 x 的任意函数取代独立变量 x, 而保持函数 u 不变 $[y=p(x),v_i(y)=u_i(x)]$. 因此, 出现一个任意函

* 应为 $\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2},\cdots$, 原文似有印误 —— 译者注

数，但没有导数；这对应 Lagrange 表示本身间的已知线性依赖性

$$\sum \psi_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x} = 0$$

另一例子是物理学家的‘广义相对论’; 这里涉及 x 的所有变换群

$$y_i = p_i(x)$$

此时 u (用 $g_{\mu\nu}$ 和 q 表示) 受到变换，这些变换归为二次和线性型系数的首项并包含任意函数 $p(x)$ 的一阶导数．这对应 Lagrange 表示及其一阶导数间的已知 n 个相关性．

其中可注意的是, 如果特指在变换中不许有 $u(x)$ 导数的群，此外需变换的独立量仅依赖于 x 而不依赖于 u, 那么 (将在第 5 节中证明) 由积分 I 的不变性得到 $\sum \psi_i \delta u_i$ 的相对不变性, 以及定理 1 中提到的散度的相对不变性, 既然参数发生相应的变换．由此还得知前面所指的第一积分允许有群．对定理 2 恰好得到借助任意函数组成的依赖性的左端的相对不变性；由此还得到一个函数, 它的散度恒为零并允许有群, 这个群在物理学家的相对论中实现这些依赖性与能量定律之间的联系．最后，定理 2 用群论方法给出与此相关的 Hilbert 关于‘广义相对性’中涉及能量的某些定理不成立的论断的证明．由这些补充说明，定理 1 包含力学中所有关于第一积分的定理，同时定理 2 从‘广义相对论’的群论观点来看，可认为是最具普遍性的.

2 散度关系和依赖性

设 $\mathcal{D}$ 是某个有限或无限连续群；此时需要达到的是恒等变换对应参数 ε 或相应任意函数 $p(x)$ 的零值．因此，最一般的变换将有形式

$$\begin{aligned} y_i &= A_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots\right) = x_i + \Delta x_i + \cdots \\ v_i(y_i) &= B_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots\right) = u_i + \Delta u_i + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

这里 $\Delta x_i, \Delta u_i$ 表记对 ε, 相当 $p(x)$ 及其导数的最低次项；由此得知，这里它们线性地出现．下面可查明这不是共有的限制.

现设积分 I 相对 $\mathcal{D}$ 是不变的，因此将满足关系 (1). 其中可注意的是，此时 I 相对包括在 $\mathcal{D}$ 中的无限小变换

$$y_i = x_i + \Delta x_i$$

$$v_i(y) = u_i + \Delta u_i$$

也是不变的；对此情形关系 (1) 变为

$$0 = \Delta I = \int \cdots \int f\left(y, v(y), \frac{\partial v}{\partial y}, \cdots\right)\mathrm{d}y - \int \cdots \int f\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots\right)\mathrm{d}x$$

其中第 1 个积分遍及对应域 x 的域 $x + \Delta x$ 上．不过，这个积分可借助下述对无限小 Δx 所具有的变换

$$\int \cdots \int f\left(y, v(y), \frac{\partial v}{\partial y}, \cdots\right)\mathrm{d}y = \int \cdots \int f\left(x, v(u), \frac{\partial v}{\partial x}, \cdots\right)\mathrm{d}x + \int \cdots \int \operatorname{div}(f \cdot \Delta x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

而变换为域 x 上的积分．因此，如果代替无限小变换 Δu 写出变分

$$\bar{\delta} u_i = v_i(x) - u_i(x) = \Delta u_i - \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}\Delta x_\lambda \tag{9}$$

那么方程 (7) 和 (8) 引向下述形式

$$0 = \int \cdots \int \{\delta f + \operatorname{div}(f \cdot \Delta x)\}\mathrm{d}x \tag{10}$$

右端是依赖变量和独立变量等时变分的已知公式．因为关系 (10) 在任意域上积分都满足，那么被积表达式应恒为零；这样，Lie 微分方程在 I 不变情形取形式

$$\bar{\delta} f + \operatorname{div}(f \cdot \Delta x) = 0 \tag{11}$$

如果这里按式 (3) 将 δf 用 Lagrange 表示代入，那么得到

$$\sum \psi_i \bar{\delta} u_i = \operatorname{div} B \qquad (B = A - f \cdot \Delta x) \tag{12}$$

而这个关系对每个不变积分 I 相对所有出现于其中的自变量都是恒等的；这就是对 I 的 Lie 微分方程的待求形式.

开始认为 $\mathcal{D}$ 是有限连续群；因为据假设， Δu 和 Δx 相对参数 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\rho$ 是线性的，那么据式 (9), 对变分 δu 及其导数也对；这样， A 和 B 对 ε 是线性的．因此，如果取

$$B = B^{(1)}\varepsilon_1 + \cdots + B^{(\rho)}\varepsilon_\rho$$

$$\bar{\delta} u = \bar{\delta} u^{(1)}\varepsilon_1 + \cdots + \bar{\delta} u^{(\rho)}\varepsilon_\rho$$

这里 $\bar{\delta} u^{(1)}, \cdots$ 是 $x, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ 的函数，那么由方程 (12) 得到散度的待求关系

$$\begin{aligned} &\sum \psi_i \bar{\delta} u_i^{(1)} = \operatorname{div} B^{(1)}, \cdots, \\ &\sum \psi_i \bar{\delta} u_i^{(\rho)} = \operatorname{div} B^{(\rho)} \end{aligned} \tag{13}$$

这样， Lagrange 表示的 ρ 个线性独立组合过渡到散度；线性独立性可这样得到：按等式 (9) 由条件 $\overline{\delta}u=0, \Delta x=0$ 可得 $\Delta u=0, \Delta x=0$, 而因此在无限小变换之间存在相关性. 但按条件相关性对无论怎样的参数值都不成立, 因为用无限小变换的积分重新得到的群 $\mathcal{D}_\rho$ 依赖于比 ρ 要小的实参数. 另一可能性 $\overline{\delta}u=0, \operatorname{div}(f\cdot\Delta x)=0$ 应除去. 这些结果在无限多个参数的极限情形仍保持.

现设 $\mathcal{D}$ 为无限连续群 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$; 此时 $\overline{\delta}u$ 及其导数，因此 B, 相对任意函数 $p(x)$ 及其导数还将是线性的；假设代入 $\overline{\delta}u$ 的值，独立于 (12), 得到

$$\sum\psi_i\overline{\delta}u_i=\sum_{\lambda,i}\psi_i\Big(a_i^{(\lambda)}(x,u,\cdots)p^{(\lambda)}(x)+ b_i^{(\lambda)}(x,u,\cdots,)\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x}+\cdots+ c_i^{(\lambda)}(x,u,\cdots)\frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma}\Big\}$$

现在根据等式

$$\varphi(x,u,\cdots)\frac{\partial^\tau p(x)}{\partial x^\tau}=(-1)^\tau\frac{\partial^\tau\varphi}{\partial x^\tau}p(x)\operatorname{mod}\operatorname{div}$$

类似于分部积分公式， p 的导数用 p 本身和散度替代，它们对 p 及其导数仍然是线性的；因此得到

$$\sum\psi_i\delta u_i=\sum_\lambda\Big\{(a_i^{(\lambda)}\psi_i)-\frac{\partial}{\partial x}(b_i^{(\lambda)}\psi_i)+ \cdots+(-1)^\sigma\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}(c_i^{(\lambda)}\psi_i)\Big\}p^{(\lambda)}+\operatorname{div}\Gamma \tag{14}$$

与 (12) 联立，有

$$\sum\Big\{(a_i^{(\lambda)}\psi_i)-\frac{\partial}{\partial x}(b_i^{(\lambda)}\psi_i)+\cdots+ (-1)^\sigma\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}(c_i^{(\lambda)}\psi_i)\Big\}p^{(\lambda)}=\operatorname{div}(B-\Gamma) \tag{15}$$

现在某域上组成 (15) 的 n 重积分；选函数 $p(x)$ 使它们连同出现于 $(B-\Gamma)$ 中的所有导数在边界上为零. 因为散度的积分归为沿域边界的积分，那么，对仅限制本身连同充分多的导数在边界上为零的任意函数 $p(x)$, 方程 (15) 左端的积分也为零；由此按已知方法得知，积分号下表达式对每个 $p(x)$ 为零，即成立 ρ 个如下关系

$$\sum\Big\{(a_i^{(\lambda)}\psi_i)-\frac{\partial}{\partial x}(b_i^{(\lambda)}\psi_i)+\cdots+ (-1)^\sigma\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}(c_i^{(\lambda)}\psi_i)\Big\}=0,\quad(\lambda=1,2,\cdots,\rho) \tag{16}$$

这就是在积分 I 相对 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 不变下 Lagrange 表示及其导数间的待求关系；线性独立性如上已找到，因为反演将返回等式 (12), 可得到由无限小变换返回到有限的结论, 这将在第 4 节详细展开. 因此, 对 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 在无限小变换中经常出现 ρ 个任意变换. 由方程 (15) 和 (16) 还得到

$$\operatorname{div}(B-\Gamma)=0$$

如果涉及 '混合群', 假设 Δx 和 Δu 相对 ε 和 $p(x)$ 是线性的，那么可以看出，一次可让所有 $p(x)$ 为零，另一次让所有 ε 为零，在此情形仍成立散度关系 (13) 以及相关性 (16).

3 有限群情形下的反演

为证明反演, 首先基本上将前面引出的结论反过来看. 由关系 (13) 存在，在乘以 ε 并相加之后可得知等式 (12) 的正确性，按等式 (3) 得到关系

$$\overline{\delta}f+\operatorname{div}(A-B)=0$$

这意味着，如果取

$$\Delta x=\frac{1}{f}(A-B)$$

那么可导致等式 (11); 最后, 由此用积分得到等式 (7)

$$\Delta I=0$$

即积分 I 相对由 $\Delta x,\Delta u$ 确定的无限小变换的不变性，且 Δu 按等式 (9) 由 Δx 和 $\overline{\delta}u$ 确定，而 Δu 相对参数仍是线性的. 但众所周知，等式

$$\Delta I=0$$

导致 I 相对有限变换的不变性，这些变换用联立方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\Delta x_i,\quad\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\Delta u_i$$

$$\text{当 } t=0\begin{cases}x_i=y\\u_i=v\end{cases} \tag{17}$$

的积分来得到 *.

这些有限变换包含 ρ 个参数 $a_1,\cdots,a_\rho$, 即组合 $t\varepsilon_1,\cdots,t\varepsilon_\rho$. 由应有 ρ 个且仅有 ρ 个独立散度关系的假设，进而得知，有限变换，既然它们不含导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$,

* 原文为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, 疑为印误 —— 译者注

总组成群. 反之, 至少一个由 Lie 括号方法 (Lie'schen Klammerprozess) 组成的无限小变换不是 ρ 个其余的线性组合，而因为 I 允许这个变换，那么存在大于 ρ 的关于散度线性独立关系，或者这无限小变换有特殊形式使得 $\overline{\delta}u=0$, $\operatorname{div}(f\cdot\Delta x)=0$, 但此时 Δx 和 Δy 与假设相矛盾而依赖于导数. 问题是能否是这种情形，即在 Δx 或 Δu 中出现导数，仍是悬案；此时前述 Δx 与使 $\operatorname{div}(f\cdot\Delta x)=0$ 的 Δx 发生了联系使得重新得到群, 但按条件, 这样附加的参数不应考虑. 这就证明了反演.

由此反演还得到，事实上我们有理由选 Δx 和 Δu 相对参数是线性的. 实际上，如果 Δx 和 Δu 是对 ε 的高阶形式，那么由于 ε 阶积的线性独立性，相应的关系 (13) 在大多数下可得到，而由此在反演之后得到积分 I 相对其无限小变换包含参数的群是不变的. 如果这个群应十分准确地包含 ρ 个参数，那么因为有对 ε 的高阶项而原先得到的散度关系之间的线性相关性必然存在.

还需注意，当 Δx 和 Δu 包含 u 的导数时，有限变换可依赖于 u 的无限多个导数；实际上，当 $\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ 确定时，在此情形系统 (17) 的积分引向方程

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_\kappa}\right)=\frac{\partial\Delta u}{\partial x_\kappa}-\sum_\lambda\frac{\partial u}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\Delta x_\lambda}{\partial x_\kappa}$$

因此 u 的导数数目, 一般说来随各阶而增大. 这样, 例如

$$f=\frac{1}{2}u'^2,\quad \psi=-u''$$

$$\psi\cdot x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u-u'x),\quad \overline{\delta}u=x\cdot\varepsilon$$

$$\Delta x=\frac{-2u}{u'^2}\varepsilon,\quad \Delta u=\left(x-\frac{2u}{u'}\right)\varepsilon$$

因散度的 Lagrange 表示恒为零，那么反演证明如下: 如果 I 允许群 $\mathcal{D}_\rho$, 那么每个仅在积分时沿边界不同于 I 的积分，即散度的积分，也允许有带同样 $\overline{\delta}u_i$ 的群 $\mathcal{D}_\rho$, 其无限小变换一般说将包含 u 的导数. 这样，例如依照前例

$$f^*=\frac{1}{2}\left\{u''-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u^2}{x}\right)\right\}$$

允许有无限小变换

$$\Delta u=x\varepsilon,\quad \Delta x=0$$

此时在对应于 f 的无限小变换中出现 u 的导数.

如果转向变分问题，即如取 $\psi_i=0$, 那么关系 (13) 导致方程

$$\operatorname{div}B^{(1)}=0,\cdots,\operatorname{div}B^{(\rho)}=0$$

它们通常称为 '守恒律'. 在一维情形下，由此得到

$$B^{(1)}=\mathrm{const},\cdots,B^{(\rho)}=\mathrm{const}$$

这里 B 包含 u 的不高于 $2\kappa-1$ 阶导数 (据 (6)), 因为 Δu 和 Δx 不包含比出现于 f 中 κ 阶更高阶的导数. 因在 ψ 中一般说会遇到 2κ 阶导数，那么因此有 ρ 个第一积分. 在它们中间可存在非线性依赖性，由前例 f 可再证明. 线性独立的 $\Delta u=\varepsilon_1$, $\Delta x=\varepsilon_2$ 对应线性独立关系

$$u''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u',\quad u''\cdot u'=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u')^2$$

此时在第一积分

$$u'=\mathrm{const},\quad u'^2=\mathrm{const}$$

之间存在非线性依赖性. 因此涉及基本情形，当 $\Delta u,\Delta x$ 不含 u 的导数.

4 无限群情形下的反演

首先证明，Δx 和 Δu 的线性假设不是任何限制；这不用反演便可由这样的事实得知：$\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 形式地依赖 ρ 个且仅 ρ 个任意函数. 即，可证明，在非线性情形当施加变换时, 对低次项求和, 任意函数的数目就会增大. 实际上，设

$$y=A\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots,p\right)=$$
$$x+\sum a(x,u,\cdots)p^\nu+b(x,u,\cdots)p^{\nu-1}\frac{\partial p}{\partial x}+$$
$$cp^{\nu-2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\cdots+d\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^\nu+\cdots$$
$$p^\nu=(p^{(1)})^{\nu_1}+\cdots+(p^{(\rho)})^{\nu_\rho}$$

相应地

$$v=B\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots,p\right)$$

此时加上

$$z=A\left(y,v,\frac{\partial v}{\partial y},\cdots,q\right)$$

对低次项得到

$$z=x+\sum a(p^\nu+q^\nu)+$$
$$b\left\{p^{\nu-1}\frac{\partial p}{\partial x}+q^{\nu-1}\frac{\partial q}{\partial x}\right\}+$$
$$c\left\{p^{\nu-2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+q^{\nu-2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right\}+\cdots$$

如果这里异于 a 和 b 的任何系数不等于零，因此对任何 $\sigma>1$ 实际上会遇到项

$$p^{\nu-\sigma}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\sigma}+q^{\nu-\sigma}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^{\sigma}$$

那么它不可以作为一个单值函数的导数或者作为这样的阶项来研究；因此，任意函数的数目与假设相比较增大了. 如果异于 a 和 b 的所有系数为零，那么依赖于指数 $\nu_1,\cdots,\nu_\rho$ 可有两种情形：或者第 2 项是第 1 项的导数 (例如，对 $\mathcal{D}_{\infty 1}$ 总成立), 因此实际上得到线性性，或者任意函数的数目增大. 这样，由于函数 $p(x)$ 的线性性，无限小变换满足线性偏微分方程组，而因为群的存在条件满足，那么按 Lie 的定义，它们组成 '无限小变换的无限群'.

这里类似于有限群情形来得到反演. 依赖性 (16) 的存在，在乘以 $p^{(\lambda)}(x)$ 并借助恒等变换 (14), 引向方程

$$\sum\psi_i\bar{\delta}u_i=\operatorname{div}\varGamma$$

如同在第 3 节中，由此得到 Δx 和 Δu 的定义和积分 I 相对这些无限小变换的不变性，而这些无限小变换实际上线性地依赖于 ρ 个任意函数和它们直到 σ 阶的导数. 这些无限小变换, 如果它们不含导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\cdots$, 一定组成群，正如第 3 节中由这样事实得知：否则在相加时会引出更多的任意函数，此时按假设应仅有 ρ 个依赖性 (16); 因此，这些变换组成 '无限小变换的无限群'. 但这样的群由 Lie 意义下 '有限变换的无限群 $\mathcal{D}$' 所定义的最一般的无限小变换组成. 每个有限变换由无限小变换用积分联立方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\Delta x_i,\quad \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\Delta u_i$$

$$\text{当 } t=0\begin{cases}x_i=y_i\\ u_i=v_i\end{cases}$$

来得到，并且还需将任意函数 $p(x)$ 当作依赖于 t 来研究. 就是说， $\mathcal{D}$ 实际上依赖于 ρ 个任意函数；其中，只要设 $p(x)$ 不依赖于 t, 就足以使得这种依赖性相对任意函数 $q(x)=t\cdot p(x)$ 是解析的. 如果出现导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\cdots$, 那么在作出结论之前，补充无限小变换 $\bar{\delta}u=0$, $\operatorname{div}(f\cdot\Delta x)=0$ 应是必要的.

与 Lie 引出的例子相关，还要指出足够一般情形，其中勉强得到显式，而在显式中出现任意函数不高于 σ 阶的导数；在此情形仍然可完全得到反演. 这就是，这些无限小变换群，它们对应 x 的所有变换以及由此 '发生的' u 的变换的群，即 u 的这些变换，在变换时 Δu, 因此 u 仅依赖于 Δx 中出现的任意函数；因此还假设在 Δu 中导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\cdots$ 不出现. 于是有

$$\Delta x_i=p^{(i)}(x)$$

$$\Delta u_i=\sum_{\lambda=1}^{n}\left\{a^{(\lambda)}(x,u)p^{(\lambda)}+b^{(\lambda)}\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x}+\cdots+c^{(\lambda)}\frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma}\right\}$$

因为由无限小变换 $\Delta x=px$ 得到带任意 $g(y)$ 的每个变换 $x=y+g(y)$, 那么尤其是需建立 $p(x)$ 对 t 的依赖性使之得到单项群

$$x_i=y_i+t\cdot g_i(y)\tag{18}$$

此群在 $t=0$ 时成为恒等式，而对 $t=1$ 时引向待求变换 $x=y+g(y)$.

实际上，由方程 (18) 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=g_i(y)=p^{(i)}(x,t)\tag{19}$$

这里 $p(x,t)$ 用表达式 (18) 反演的方法由 $g(y)$ 确定，反之，在补充条件当 $t=0$ 时 $x_i=y_i$ 下，由式 (19) 可得到方程 (18); 这条件单值地确定积分. 借助方程 (18), Δu 中出现的 x 可用 '积分常数' y 和 t 表示出来；此时 $g(y)$ 恰好进入直至 σ 阶导数的记号下；因此在表达式

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\sum\frac{\partial g}{\partial y_\kappa}\frac{\partial y_\kappa}{\partial x}$$

中， $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ 用 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ 表示，一般说 $\dfrac{\partial^\sigma p}{\partial x^\sigma}$ 表为 $\dfrac{\partial g}{\partial y},\cdots,\dfrac{\partial x}{\partial y},\cdots,\dfrac{\partial^\sigma x}{\partial y^\sigma}$ 的函数. 于是，得到为确定 u 的方程组

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=F_i\left\{g(y),\frac{\partial g}{\partial y},\cdots,\frac{\partial^\sigma g}{\partial y^\sigma},u,t\right\}$$

$$(\text{当 } t=0,\ u_i=v_i),$$

其中仅 t 和 u 是变量，而 $g(y)$ 作为系数；因此，积分给出

$$u_i=v_i+B_i\left(v,g(y),\frac{\partial g}{\partial y},\cdots,\frac{\partial^\sigma g}{\partial y^\sigma},t\right)_{t=1}$$

即仅依赖于任意函数的 σ 阶导数的变换. 根据式 (18) 这些变换包括当 $g(y)=0$ 时的恒等式，那么这些变换组成群，因为所指方法给出每个变换 $x=y+g(y)$, 由此得到的对 u 的变换也被单值地确定；因此，群 $\mathcal{D}$ 被完全确定.

由反演还得知，如果我们得到仅依赖于 x 而不依赖于 $u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\cdots$ 的任意函数，那么这不意味任何限制. 后一情形在恒等变换式 (14) 中，而因此在式 (15) 中，除 $p^{(\lambda)}$ 外还出现 $\dfrac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial u},\dfrac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial(\partial u/\partial x)},\cdots$. 因此，如

果继续认为 $p^{(\lambda)}$ 相对带 x 的任意函数的 $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ 的零阶，一阶，$\cdots$ 作为系数，那么在多数情形重又出现关系式 (16); 但是，这些关系根据所论反演用联合仅依赖于 x 的任意函数的办法将导致前述情形. 这样可精确地证明，依赖性和不依赖于它们的散度关系的同时出现对应混合群.

5 关系式各自组成部分的不变性

如果专指群 $\mathcal{D}$, 通常限于最简单情形：变换中不出现 u 的导数，且变换的独立变量仅依赖 x 而不依赖 u, 那么可得出公式中各自组成部分不变性的结论. 首先用已知推理方法得到积分

$$\int \cdots \int \left(\sum \psi_i \delta u_i\right) \mathrm{d}x$$

的相对不变性，而因此得到表达式

$$\sum \psi_i \delta u_i$$

的相对不变性，δ 理解为某个变分. 事实上，一方面有

$$\delta I = \int \cdots \int \delta f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots\right) \mathrm{d}x = \int \cdots \int \delta f\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \cdots\right) \mathrm{d}y$$

另一方面，在边界上值 $\delta u, \delta\dfrac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ 等于零，而由于量 $\delta u, \delta\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 变换的线性齐次性，它们对应边界上为零的量 $\delta v, \delta\dfrac{\partial v}{\partial y}, \cdots$

$$\int \cdots \int \delta f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots\right) \mathrm{d}x = \int \cdots \int (\sum \psi_i(u, \cdots) \delta u_i) \mathrm{d}x$$

$$\int \cdots \int \delta f\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \cdots\right) \mathrm{d}y = \int \cdots \int (\sum \psi_i(v, \cdots) \delta v_i) \mathrm{d}y$$

因此，对在边界上为零的值 $\delta u, \delta\dfrac{\partial u}{\partial x}, \cdots$, 我们有

$$\int \cdots \int (\sum \psi_i(u, \cdots) \delta u_i) \mathrm{d}x = \int \cdots \int (\sum \psi_i(v, \cdots) \delta v_i) \mathrm{d}y = \int \cdots \int (\sum \psi_i(v, \cdots) \delta v_i) \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_\kappa}\right| \mathrm{d}x$$

如果在第 3 个积分中将 $y, v, \delta v$ 用 $x, u, \delta u$ 表示，并让它等于第 1 个积分，那么对在边界为零而在其他方面任意的 δu 就有关系

$$\int \cdots \int \left(\sum \chi_i(u, \cdots) \delta u_i\right) \mathrm{d}x = 0$$

众所周知，由此得对任意 δu 的被积函数为零; 因此，我们有对 δu 的恒等关系

$$\sum \psi_i(u, \cdots) \delta u_i = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_\kappa}\right| \left(\sum \psi_i(v, \cdots) \delta v_i\right)$$

它建立了表达式 $\sum \psi_i \delta u_i$ 的相对不变性，而因此建立了积分

$$\int \cdots \int (\sum \psi_i \delta u_i) \mathrm{d}x$$

的不变性.

为将其应用于导出散度关系和依赖性，需再证明，由 $\Delta u, \Delta x$ 引出的 $\overline{\delta} u$ 实际上要满足对 δu 的变换规律，既然 $\overline{\delta} v$ 中的参数或相应的任意函数可如此确定以使它们对应相对 y, v 的无限小变换的相似群. 如果用 $\mathcal{I}_q$ 表记由 x, u 到 y, v 的变换，用 $\mathcal{I}_p$ 表记 x, u 自身组成的变换，那么与其相似的变换由公式

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_q \mathcal{I}_p \mathcal{I}_q^{-1}$$

给出，因此这里 $\mathcal{I}$ 的参数或相应的任意函数借助 p 和 q 来确定. 用公式表示为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_p : \xi = x + \Delta x(x, p) \\
&\quad u^* = u + \Delta u(x, u, p) \\
&\mathcal{I}_q : y = A(x, q), \quad v = B(x, u, q) \\
&\mathcal{I}_q \mathcal{I}_p : \eta = A(x + \Delta x(x, p), q) \\
&\quad v^* = B(x + \Delta x(p), u + \Delta u(p), q)
\end{aligned}$$

但由此得

$$\mathcal{I}_r = \mathcal{I}_q \mathcal{I}_p \mathcal{I}_q^{-1}$$

因此

$$\eta = y + \Delta y(r), \quad v^* = v + \Delta v(r)$$

并且由于反演，$\mathcal{I}_q$ 可作为 y 的函数来研究，并仅考虑无限小项，因而成立等式

$$\begin{aligned}
&\eta = y + \Delta y(r) = y + \sum \frac{\partial A(x, q)}{\partial x} \Delta x(p) \\
&v^* = v + \Delta v(r) = v + \sum \frac{\partial B(x, u, q)}{\partial x} \Delta x(p) + \\
&\quad \sum \frac{\partial B(x, u, q)}{\partial u} \Delta u(p)
\end{aligned} \tag{20}$$

这里如果 $\xi = x + \Delta x$ 用 $\xi - \Delta\xi$ 替代，因 ξ 重又过渡到 x, 因此 Δx 为零，那么按公式 (20) 的第一个，η 也过渡到 $y = \eta - \Delta\eta$; 如果用这种代入，$\Delta u(p)$ 变为 $\overline{\delta}u(p)$, 那么 $\Delta v(r)$ 也变为 $\overline{\delta}v(r)$, 式 (20) 的第二个给出

$$v + \overline{\delta}v(u, v, \cdots, r) = v + \sum \frac{\partial B(x, u, q)}{\partial u}\overline{\delta}u(p)$$

$$\overline{\delta}v(y, v, \cdots, r) = \sum \frac{\partial B}{\partial u_\kappa}\delta u_\kappa(x, u, p)$$

因此, 对变分的变换公式实际上得以满足, 既然仅 $\overline{\delta}v$ 假设依赖于参数或相应地依赖于任意函数 r.

其中可注意的是，由此得到，表达式 $\sum\psi_i\delta u_i$ 的相对不变性以及 (考虑到式 (12), 那么散度关系对 y, v 也满足) 量 $\operatorname{div} B$ 的相对不变性；进而，据式 (14) 和式 (13), 得到 $\operatorname{div}\mathit{\Gamma}$ 以及与 $p^{(\lambda)}$ 相关联的依赖性左端的相对不变性, 这里通常在变换公式中需用 r 代替满足函数 $p(x)$ (及相应参数). 由此还得到 $\operatorname{div}(B - \mathit{\Gamma})$ 的相对不变性，即不恒为零的函数组 $B - \mathit{\Gamma}$, 其散度恒为零.

由 $\operatorname{div} B$ 在一维情形对有限群的不变性, 还可得出第一积分相对不变性的结论. 对应无限小变换的参数变换，据式 (20) 将是线性齐次的，由所有变换的反演，ε 也用变换了的参数 ε^* 线性齐次地表出. 这个反演无疑地保持，如果取 $\psi = 0$, 因为在公式 (20) 中不出现 u 的导数.

如果在方程

$$\operatorname{div} B(x, u, \cdots, \varepsilon) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\operatorname{div} B(y, v, \cdots, \varepsilon^*)$$

中让 ε^* 的系数相等，那么函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}B^{(\lambda)}(y, v, \cdots)$$

也是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B^{(\lambda)}(x, u, \cdots)$$

的线性齐次函数，因此由等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B^{(\lambda)}(x, u, \cdots) = 0$$

或

$$B^{(\lambda)}(x, u, \cdots) = \mathrm{const}$$

也得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}B^{(\lambda)}(y, v, \cdots) = 0$$

或

$$B^{(\lambda)}(y, v, \cdots) = \mathrm{const}$$

这样, 对应某个群 $\mathcal{D}_\rho$ 的 ρ 个第一积分也允许群, 因此下一步的积分可简化. 最简单的例子就是，当函数 f 不依赖于 x 或不依赖于 u, 对应无限小变换 $\Delta x = \varepsilon$, $\Delta u = 0$ 或相应地 $\Delta x = 0$, $\Delta u = \varepsilon$. 此时 $\overline{\delta}u$ 变为等于 $\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 或相应地 ε, 因为 B 由 f 和 $\overline{\delta}u$ 用微分和有理运算得到，那么因此它也不依赖 x 或相应地 u, 并允许相应的群.

6 Hilbert 的结论

最后，由前述还得到 Hilbert 关于能量本征定律与 '广义相对论' 无关联的结论的证明 (Klein 的第 1 篇论文 Göttingen Nachr, 1917, 回答了第 1 段). 也就是在一般提法下用群论观点.

设积分 I 允许群 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$, 并设 $\mathcal{D}_\sigma$ 为由前述群用使任意函数有特殊形式构造出的某有限群；因此，$\mathcal{D}_\sigma$ 是 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 的子群. 此时无限群 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 对应依赖性 (16), 而有限群 $\mathcal{D}_\sigma$ 对应散度关系 (13); 反之，由某个散度关系的存在引起 I 相对某有限群的不变性，这有限群在且仅在那种情形才与 $\mathcal{D}_\sigma$ 重合，即当 $\overline{\delta}u$ 为由 $\mathcal{D}_\sigma$ 得到的 δu 的线性组合. 因此，对 $\mathcal{D}_\sigma$ 的不变性不能导出异于 (13) 的某些散度关系. 但因由依赖性 (16) 的存在得到 I 对群 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 在任何形式的 $p(x)$ 下的无限小变换 $\Delta x, \Delta u$ 的不变性，那么其中也得到用函数特殊形式的方法引起的对群 $\mathcal{D}_\sigma$ 的无限小变换的不变性，而因此得到群 $\mathcal{D}$ 本身的不变性. 散度关系

$$\sum\psi_i\overline{\delta}u_i^{(\lambda)} = \operatorname{div} B^{(\lambda)}$$

应是依赖性 (16) 的结果，它们可写成

$$\sum\psi_i a_i^{(\lambda)} = \operatorname{div}\chi^{(\lambda)}$$

这里 $\chi^{(\lambda)}$ 是 Lagrange 表示及其导数的线性组合. 因 ψ 无论在 (13) 还是在 (16) 中线性地出现，那么其中散度关系应是关系 (16) 的线性组合；因此得

$$\operatorname{div} B^{(\lambda)} = \operatorname{div}\left(\sum\alpha\chi^{(\kappa)}\right)$$

而 $B^{(\lambda)}$ 本身用 χ 线性地表示, 即用 Lagrange 表示及其导数以及其散度为零的函数线性地表出, 例如，甚至如 $B - \mathit{\Gamma}$ (第 2 节末), 对它有 $\operatorname{div}(B - \mathit{\Gamma}) = 0$ 而这里散度同时具有自身不变性. 其中 $B^{(\lambda)}$ 用给定方法由 Lagrange 表示及其导数组成的散度关系，其将称之为 '非本征的', 所有其余的称为 '本征的'.

反之，如果对散度的关系是依赖性 (16) 的线性组合, 即它们是 '非本征的', 那么由对 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 的不变性得到对 $\mathcal{D}_\sigma$ 的不变性；$\mathcal{D}_\sigma$ 成为 $\mathcal{D}_{\infty\rho}$ 的子群. 对应某有限群 $\mathcal{D}_\sigma$ 的散度关系，当且仅当散度关系是 '非本征的', 即群 $\mathcal{D}_\sigma$ 是某无限群的子群，积分 I 相对它是不变的.

用群的专门化方法得到 Hilbert 的第 1 个结论. '混合群' 我们理解为有限群

$$y_i = x_i + \varepsilon_i, \quad v_i(y) = u_i(x)$$

因此

$$\Delta x_i = \varepsilon_i, \quad \Delta u_i = 0, \quad \bar{\delta} u_i = -\sum_\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}\varepsilon_\lambda$$

相对混合群的不变性显然意味着在积分

$$I = \int \cdots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots\right) \mathrm{d}x$$

中 x 不明显出现于 f 中. 相应的 n 个散度关系

$$\sum \psi_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} = \operatorname{div} B^{(\lambda)}, \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

我们称之为 '能量关系', 因为与变分问题相应的 '守恒律'

$$\operatorname{div} B^{(\lambda)} = 0$$

对应 '能量定律', 而 $B^{(\lambda)}$ 为 '能量分量'. 这样, 下述结论是对的: 如果 I 允许混合群, 那么能量关系仅在那种情形才是非本征的, 即积分 I 相对将混合群作为子群的无限群是不变的.

所有对 x 的变换以及由此产生的对 $u(x)$ 的变换的群, 是这类无限群的例子, 在变换中仅出现任意函数 $p(x)$ 的导数; 混合群可用专门取 $p^{(i)}(x) = \varepsilon_i$ 的办法得到; 但仍有待解决的问题, 与对 I 补充边界上积分所产生的群相联, 这些最一般的群是否给出了. 当量 u 受到 '全微分形式' 系数变换时, 即形式

$$\sum a \mathrm{d}^\lambda x_i + \sum b \mathrm{d}^{\lambda-1} x_i \mathrm{d}x_\kappa + \cdots$$

它除 $\mathrm{d}x$ 外还包含高阶微分, 给定类型的导出变换将会发生; 更专门的变换, 其中 $p(x)$ 仅以一阶导数出现, 会给出常微分形式的系数变换

$$\sum c \mathrm{d}x_i \cdots \mathrm{d}x_\lambda$$

而通常仅研究这些变换.

给定类型的另一个群, 由于出现对数项不能成为系数变换, 是这样的

$$y = x - p(x)$$

$$v_i = u_i + \ln[1 + p'(x)] = u_i + \ln \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\Delta x = p(x), \quad \Delta u_i = p'(x)$$

$$\bar{\delta} u_i = p'(x) - u_i' p(x)$$

这里依赖性 (16) 将是

$$\sum_i \left(\psi_i u_i' + \frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

能量本征关系取形式

$$\sum \left(\psi_i u_i' + \frac{\mathrm{d}(\psi_i + \mathrm{const})}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

群的最简单不变积分是

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^{-2u_1}}{u_1' - u_2'} \mathrm{d}x$$

最一般的积分 I 由 Lie 微分方程 (11)

$$\bar{\delta} f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot \Delta x) = 0$$

的积分来确定, 因为认为函数 f 仅依赖于 u 的一阶导数, 用代入 Δx 和 Δu 的方法, 可将其表为

$$\frac{\partial f}{\partial x} p(x) + \left\{\sum \frac{\partial f}{\partial u_i} - \frac{\partial f}{\partial u_i'} u_i' + f\right\} p'(x) +$$

$$\left\{\sum \frac{\partial f}{\partial u_i''}\right\} p''(x) = 0$$

(对 $p(x), p'(x), p''(x)$ 恒等的). 此方程组对两个函数 $u(x)$ 的情形已有解, 这个解实际上包含任意函数, 即

$$f = (u_1' - u_2') \varPhi\left(u_1 - u_2, \frac{\mathrm{e}^{-u_1}}{u_1' - u_2'}\right)$$

其中 $\varPhi$ 表记所指自变量的任意函数.

众所周知, Hilbert 做出结论: 能量本征定律的不成立正是 '广义相对论' 的特征迹象. 为了使这个结论在字面上说得有理, 必须对 '广义相对论' 这个述语比通常给出的更广泛的理解, 即将其扩充到上述所论依赖于 n 个任意函数的群.

(北京理工大学 梅凤翔译自 Эмми Нетер. Инвариантные Вариационные Эадачи. Москва: ГИФМЯ, 1959, 611~630 清华大学 王照林 校)