齿轮系统非线性振动研究进展*

王建军 [1,†] 李其汉 [1] 李润方 [2]
[1] 北京航空航天大学能源与动力学院，北京 100083
[2] 重庆大学机械传动国家重点实验室，重庆 400044

摘 要 围绕圆柱齿轮系统的参数振动和间隙非线性振动问题，较为详细地评述了 20 年来国际上的研究进展情况. 文中首先说明了齿轮系统啮合过程非线性振动的基本概念，包括基本的力学模型、数学模型、不同类型的分析系统和求解方法；然后分别评述了时变轮齿啮合刚度参数振动问题和齿侧间隙非线性振动问题的研究进展. 此后讨论了同时包含齿侧间隙和时变啮合刚度时齿轮非线性振动问题方面的研究. 最后，建议了齿轮系统非线性振动方面今后的研究重点.

关键词 齿轮传动系统，参数振动，间隙非线性振动

1 引 言

齿轮传动系统是各类机械系统和机械装备的主要传动系统，齿轮系统振动特性直接影响机械系统和机械装备的性能和工作可靠性. 因此，长期以来人们对齿轮系统的振动特性进行了大量的理论分析和试验研究，取得了许多重要的研究成果. 早期人们对齿轮系统的研究主要是建立在线性振动分析理论的基础上的. 这方面的研究进展和分析理论可参考文献 [1,2].

近 20 年来，国内外学者以系统非线性振动理论为基础，以齿轮啮合过程的时变啮合刚度和齿侧间隙等非线性因素为核心，对齿轮系统非线性振动问题进行了大量研究 [3~6]. 国内学者对圆柱齿轮传动系统 [7] 、圆锥齿轮传动系统 [8] 和行星齿轮传动系统 [9,10] 的参数振动 [11,12] 、间隙非线性振动问题 [13,14] 进行了许多研究，主要集中在建模方法、求解方法和系统特性等方面. 因篇幅所限，本文将主要评述国外这方面的研究进展情况，以供国内研究参考.

文中首先说明圆柱齿轮系统非线性振动的基本概念；然后在第 3 节讨论考虑轮齿时变刚度齿轮系统具有参数振动特征的动力学问题的有关研究，包括新型的啮合动态模型、齿廓修正、重叠系数和齿面摩擦等因素对系统动态特性的影响等；第 4 节评述了仅考虑齿侧间隙时的齿轮系统非线性振动问题的研究；在第 5 节则重点讨论近年来国外对同时考虑时变啮合刚度和齿侧间隙时，齿轮系统非线性振动问题理论分析和试验研究方面的进展情况；文章的最后建议了今后对齿轮系统非线性振动问题的研究重点，以供参考.

2 齿轮系统非线性振动的基本问题

不失一般性本节以一对齿轮付的非线性振动问题为例说明齿轮系统非线性振动问题的分析模型、求解方法等.

2.1 力学模型和数学模型

对具有轮齿间隙和时变啮合刚度的齿轮付，当轴承支承和传动轴的刚度较大时，其扭转振动模型可以简化为图 1(a) 所示的形式，其等效的数学模型为 [15]

$$\ddot{\hat{x}} + 2\zeta\dot{\hat{x}} + \hat{k}(\tau)\hat{g}(\hat{x}(\tau)) = \hat{f}(\tau) \tag{1}$$

其中

$$\hat{g}(\hat{x}(\tau)) = \begin{cases} \hat{x}(\tau) - 1 & \hat{x}(\tau) > 1 \\ 0 & |\hat{x}(\tau)| \le 1 \\ \hat{x}(\tau) + 1 & \hat{x}(\tau) < -1 \end{cases} \tag{2}$$

经简化又可转化为图 1(b) 所示的具有时变刚度的振 - 冲模型 [3]. 这样，齿轮系统振动问题主要包含

收稿日期：2003-10-04，修回日期：2004-09-01
* 国家自然科学基金 (10172014) 资助项目
† E-mail: wangjjb@263.net

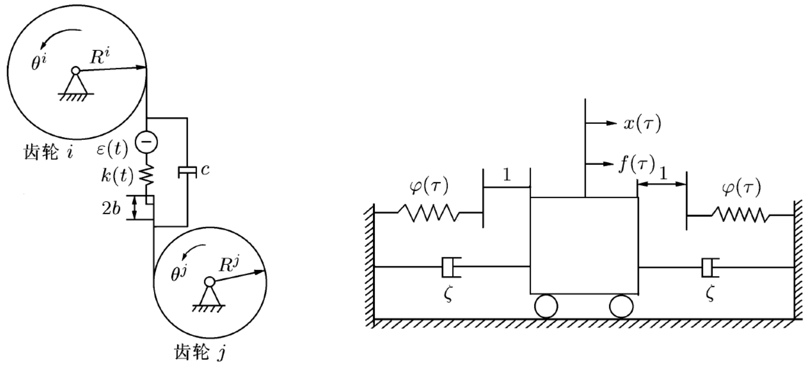

图 1

时变啮合刚度和齿侧间隙两方面的非线性因素, 非线性振动问题的研究也主要在三方面展开： (1) 仅考虑轮齿啮合的时变刚度. 此时齿轮系统的弹性系数周期性变化时，系统将发生参数振动； (2) 仅考虑齿侧间隙非线性； (3) 同时考虑时变的啮合刚度和齿侧间隙两方面的非线性因素. 这三方面的研究形成了目前齿轮系统非线性振动问题研究的主体. 本文将分别在以下的第 3~5 节中对它们的研究进展进行讨论和评述.

2.2 分析模型的类型

迄今为止，人们已经提出了许多形式的齿轮系统分析模型. 根据模型中对啮合过程所涉及的不同非线性因素，模型可以有 4 种形式： (1) 线性时不变模型 (linear time-invariant models, LTIM). 这类模型不考虑啮合刚度时变特性、齿侧间隙和啮合误差等非线性因素. 这方面的研究在文献 [1,2] 中进行了详细的评述、这类模型目前仍在计算齿轮系统固有频率时得到应用 [16,17]; (2) 线性时变模型 (linear time-varying models, LTVM). 这类模型仅考虑系统中时变的刚度，如轮齿啮合刚度和滚动轴承支承刚度的时变特性 [17~20]. (3) 非线性时不变模型 (nonlinear time-invariant models, NTIM). 这类模型仅考虑系统中间隙非线性，而不考虑时变刚度. 间隙可以是齿侧间隙或 / 和滚动轴承间隙 [21~24]; (4) 非线性时变模型 (nonlinear time-varying models, NTVM). 这类模型同时考虑啮合刚度和齿侧间隙等时变因素和间隙非线性因素等 [21~24].

另一方面, 根据模型的自由度数，分析模型又可以有多种形式： (1) 仅含有一对齿轮付的单自由度模型 [25~31]. 这是最简单的分析模型，主要用来研究齿轮付的扭转振动； (2) 单对齿轮付的多自由度模型，这类模型考虑的齿轮付一般具有较为复杂的啮合过程 [32,33], 常用来研究一对齿轮付的弯、扭、摆等的耦合振动；(3) 不考虑传动轴和轴承的多对齿轮付啮合的多自由度模型 [34,35]. 这类模型主要研究在传动轴和轴承刚度较大时多对齿轮付传动系统的振动特性，如齿轮系统的间隙非线性振动和变速箱传动中齿轮的拍击 (the gear rattle) 问题等 [36~39]; (4) 考虑箱体、传动轴、轴承和多对齿轮付的多自由度模型 [40~44]. 这类模型主要用于对齿轮传动装置 (包括传动系统和结构系统) 的振动和噪声特性进行较为全面研究, 特别是在航空器机械动力传输系统的研究中应用较为广泛.

2.3 计算方法

目前, 用于齿轮系统非线性振动问题的计算方法主要有数值方法和解析方法. 数值方法包括数字仿真和模拟仿真. 数字仿真是数值计算方法，可以用来模拟系统的稳定和瞬时响应, 应用较为普遍. 解析法主要包括分段线性方法；谐波平衡法；模态分析法；摄动法和打靶法等.

3 参数振动齿轮系统振动问题

3.1 齿轮系统的参数振动动力稳定性

齿轮系统的啮合刚度是周期性变化的, 因此齿轮系统的振动问题是具有时变刚度的参数振动问题.

参数振动问题研究的主要问题之一是动力稳定问题. 具有时变系数最重要的方程是 Hill 方程 [45,46] 和 Mathieu 方程 [46,47]. 它们分别相应于直齿轮付和斜齿轮付的振动方程，因此齿轮系统参数振动动力稳定问题可以利用 Hill 方程和 Mathieu 方程的动力稳定分析理论进行研究. 目前进行这方面研究的主要方法有：无穷行列式方法 (the method of infinite determinants)[48] 、摄动方法 (the perturbation method)[46] 、Galerkin 方法 (the Galerkin method)[49] 和经典 Floquet 方法 (the classic Floquet method)[50] 等.

齿轮系统的动力稳定问题人们已经进行了许多研究 [18,19,41,42,51~56]. 在 1967 年， Bollinger 和 Harker[51,52] 通过设定轮齿刚度正弦变化，研究了刚度变动幅值对齿轮系统振动稳定区域的影响. 1978 年，Benton 和 Seireg[18] 研究了受正弦外激励并且轮

齿刚度为正弦和矩形变动时齿轮系统的稳态响应和不稳定性. Matsuhisa, Miyaji 和 Sato[57] 也研究了啮合刚度为正弦和矩形变动时, 具有时变阻尼的齿轮系统动态响应稳定区域问题. Toridon 和 Gauvin[53] 通过啮合刚度矩形变动时两级齿轮付传动系统的研究, 分析了时变刚度幅值和两对齿轮付时变刚度相位对系统动力稳定性的影响. 这些研究一般没有涉及啮合重叠系数对系统动力稳定性的影响问题.

1981 年, Benton 和 Seireg[19] 通过设定啮合刚度为矩形波动, 研究了齿轮系统动力稳定区与重叠系数和转速的关系. 1984 年, Iwatsubo, Arii 和 Kawai[58] 研究了弯 - 扭耦合齿轮振动系统动态稳定区域与重叠系数和转速之间的函数关系, 其中假设啮合刚度为矩形周期变化.

1997 年, Amabili 和 Rivola[59] 在研究中考虑了时变刚度以及相应的比例粘滞阻尼、轮齿啮合误差. 他们的研究表明, 动态稳定区域与重叠系数有关. 他们的研究考虑了三种重叠系数的影响.

最近, Raghothama 和 Narrayanan[60] 应用 Floquet 理论分析了齿轮 - 转子 - 轴承系统 (a geared-rotor-bearing system) 的稳定性. 他们将 Floquet 理论与文献 [61] 的弧长参数延展算法 (an arc length parametric continuation procedure) 相结合, 研究了系统通向混沌的双周期分叉特性 (the period doubling bifurcation leads ultimately to chaos). 如图 2 所示, 表明了通向混沌的双周期分叉道路.

另一方面, 对于多级齿轮传动系统, 其数学模型是系数周期性变化的微分方程组, 相应的研究会更加困难. 进行这方面的研究可以参考文献 [62~66] 的理论和方法.

2000 年, Seyranian, Solem 和 Pedersen[67] 提出了一种运用 Floquet 理论分析多自由度周期系统的

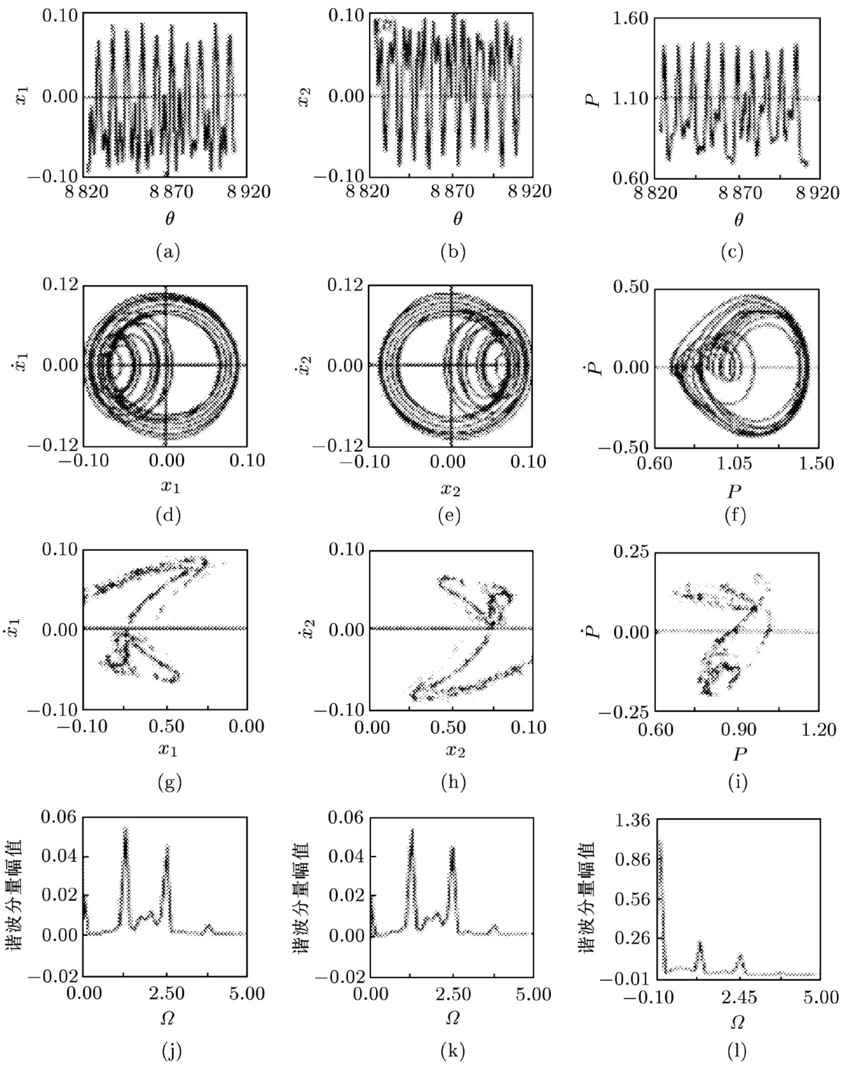

图 2

灵敏度法. 这种方法是以 Sinha 和 Wu[68] 提出的用 Floquet 理论进行灵敏度分析的数值积分算法为基础的.

3.2 一对齿轮付系统的研究

这方面问题的研究一直是齿轮系统振动问题研究的中心问题. 近年来, 有关研究主要有以下的进展.

(1) 齿轮啮合过程的动态模拟模型

考虑到以前的齿轮啮合模型的不足, 通过将齿轮啮合中的力和力矩处理为多维空间矢量, Blankenship 和 Singh[32] 提出了一种 "新齿轮啮合动态模型"(new gear mesh interface dynamic model). 模型具有 6 个自由度, 系统的多维空间矢量都可以表示出来, 可以更精确地分析齿轮系统动力学特性. 后来, Blankenship 和 Singh[33] 又将此模型扩展到斜齿轮系统, 如图 3.

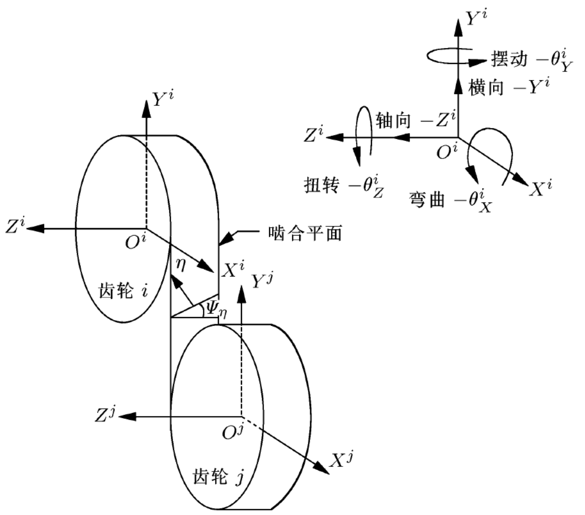

图 3

(2) 关于齿廓修形

齿廓修形是一种减少齿轮啮合激励的重要方法, 有助于改善齿轮系统的动态特性 [69,70].

1989 年, Lin, Townsend 和 Oswald[71,72] 研究了由 Lin 和 Houston[73] 提出的齿轮系统分析模型的齿廓修形问题. 他们的研究表明齿廓修形可以有效地减少轮齿最大动载荷, 线性或抛物线的齿廓修形最有利于改善齿轮传动系统的性能.

1996 年, Yoon 和 Rao[74] 认为, 早期研究所建议的线性或抛物线的齿廓修形曲线, 对于减少静传递误差存在若干限制, 对于减少齿轮动载荷也仅在较小的速度和外载荷范围内有效. 因此, 他们研究了凸立方曲线齿廓修形 (a cubic spine tooth modification) 直齿轮的动态特性. 他们认为, 凸立方曲线是二阶连续的, 有助于减少动载荷和增大适用范围.

同年, Kahraman 和 Blankenship[75] 进行了相应的试验研究.

(3) 关于重叠系数 (involute contact ratio, ICR)

由于轮齿啮合的刚度激励是齿轮系统振动的主要原因, 因此重叠系数变化对齿轮系统刚度激励和系统振动特性影响的研究, 一直受到人们的重视. 许多研究 [19,69,70,76] 表明, 齿轮啮合的重叠系数会对系统的振动响应和性质有重要影响. 考虑到改变齿顶高长度是在不增加轮齿应力时最有效控制重叠系数的方法 [77], Liou 等 [78] 利用 NASA 的齿轮动力学程序系统 DANST[72,79,80] 进行了计算机仿真, 研究了直齿轮重叠系数与其动载荷的关系. 研究中保持系统扭矩等参数不变, 不考虑齿廓修形, 通过改变齿顶高使齿轮重叠系数位于 1.20~1.24 之间, 以含盖低重叠系数 (low-contact-ratio) 齿轮和高重叠系数 (high-contact- ratio) 齿轮. 他们的研究表明, 对于低重叠系数的齿轮 ($ICR < 2.0$), 系统的动态效应随重叠系数的增加而减小, 对于高重叠系数齿轮 ($ICR > 2.0$), 两者关系变得复杂. 一般说来, 重叠系数大时其动态效应总是低于重叠系数小时, 而重叠系数在 2.0 附近时系统的动载荷最小. 此外对于高重叠系数的情况, 重叠系数选择要考虑系统的转速.

为了找到最佳重叠系数和适用于各共振频率的重叠系数, Kahraman 和 Blankenship[81] 研究了齿轮啮合刚度的傅立叶系数. 通过实验和分析发现: 当重叠系数 $\varepsilon = m + n/r$ 时, 在 r 阶共振频率附近可以得到最小的振动响应振幅 (其中 m 是重叠系数的整数部分, n 是从 $0 \sim r$ 的整数部分). 此前, Maatar 和 Velex[82] 也进行过类似的分析研究.

然而, Anderson[83] 认为, 由于 Kahraman 和 Blankenship[81] 仅分析了啮合刚度的周期谐波, 没有考虑其它因素, 故而其分析是近似的. 因此, 他通过对系统微分方程动态解的研究求得了动态传递误差 (the dynamic transmission error, DET). 他的研究表明, 考虑动态传输误差来选择重叠系数的原则与仅考虑啮合刚度 Fourier 系数时是不相同的. 更重要的是, 他的分析得到了一种较为简单的解析方法, 可以用来确定在不稳定响应频率附近不会轮齿分离的重叠系数.

同时, 人们也通过实验研究了重叠系数对齿轮系统动态性能的影响.

1980 年, Kubo 和 Kiyono[83] 以 $ICR = 1.56$ 的直齿轮付应变测试 (strain gage measurement) 结果为基础, 分析了系统动态啮合载荷的频谱. 1986 年, Umezawa 、 Suzuki 和 Suto[85] 则通过对单对斜齿轮付转动加速度的测量, 研究了周向重叠系数 (involute contact ratio) 与轴向重叠系数 (helical overlap ratio) 的综合影响.

1996 年, Kahraman 和 Blankenship[86] 以动态

传递误差表征齿轮系统动态特性, 通过实验研究了直齿轮付的受迫响应, 说明了啮合刚度的时变幅值和重叠系数对系统动态特性有极重要的影响.

近来, 通过特殊设计的齿轮试验装置 (gear test rig) 测量 8 对齿轮付在重叠系数为 $1 \le \varepsilon \le 2$ 时的动态传递误差, Kahraman 和 Blankenship[81] 研究了重叠系数对齿轮系统扭转振动特性的影响. 研究表明, 不同的重叠系数将引起不同的振动振幅. 他们详细说明了 ICR 与直齿轮付动态性能间的关系, 确定了 ICR 对测得的修形和非修形齿轮 DET 谐波振幅的影响, 得到了对设计低噪声齿轮付的指导原则 (the guidelines).

Kahraman 和 Blankenship[81] 在得到了以上结论的同时进一步指出, 他们的结论只适用系统处于线性状态并未发生轮齿分离的频率范围内. 如果 Kahraman 和 Blankenship[87,88] 给出的分离准则 (the separation criterion) 得到满足, 而且系统工作在 r 阶超谐波共振频率附近时, 轮齿将发生分离. 这时, 系统不再是线性状态, 前面提出的设计指导原则也不再适用. 这方面内容, 可以参考文献 [15, 23, 87]. 本文第 5 节将进行相关讨论.

关于啮合重叠系数对齿轮系统动态稳定特性的影响, 有关的文献为 [19, 58, 59].

(4) 关于齿面摩擦

众所周知, 精确估算齿轮的啮合摩擦力始终是一个难题, Matin[89] 对此进行了详细的评述, 给出了计算摩擦系数的若干经验公式. 但这些公式的具体适用范围没有清楚界定. 在这方面的试验研究包括由轮盘试验机 (disc machine)[90~92] 、中低速齿轮试验台 (gear sets at low-medium speeds)[93,94] 和高转速齿轮试验台 (gear sets at high speeds) 所进行的研究 [95].

另一方面, 以弹性动力 (elastohydrodynamic, EHD) 润滑理论为基础, 文献 [96] 给出了在混合润滑状态和部分 EHD 状态时齿面摩擦系数的半经验公式 (some semi-analytical formulation).

此外, 多数齿轮动力学模型均不考虑摩擦力而将传递误差 (transmission error, TE) 看成是主要的有时是唯一的产生振动和噪音的激励源. 但实际中, 以最小 TE 波动为准则设计的齿轮并不一定获得所希望的减振和降噪的效果 [97,98], 从而说明齿面摩擦应在分析中得到重视.

1985 年, Iida 等 [99] 利用仅具有齿面滑动方向自由度的简单齿轮振动模型, 研究了轮齿摩擦对系统动态特性的影响. 他们发现齿面的时变摩擦力将增大系统的激励和阻尼. 1994 年, Shing 等 [100] 研究了直齿轮扭转模型中齿侧间隙与摩擦力的影响. 1996 年, Borner 和 Houser[98] 定性地分析了轮齿摩擦产生噪音的问题, 他们的研究表明, 轮齿摩擦力是产生齿轮结构振动 (structure-borne vibration) 和结构声的主要参数. 1997 年, Hochmann[101] 通过对啮合刚度和阻尼的 Fourier 级数展开, 研究了周期性摩擦力对齿轮系统扭转动态性能的影响. 此外, Vedmar 和 Henriksson[102] 也利用扭转模型研究了齿面摩擦力的影响.

与上述利用简单分析模型的研究相比, 在 2000 年 Velex 和 Cahouet[103] 将齿面摩擦力引入包含了非线性时变刚度、齿廓偏差、装配误差等因素的三维振动模型中. 通过比较测得的和计算得到的轴承支承力, 表明了所建立的分析模型可以较为准确的再现轮齿摩擦对系统特性的影响.

最近, Vaishya 和 Singh[104] 也提出了一种同时考虑啮合过程的时变啮合刚度、黏性阻尼和滑动摩擦的齿轮系统振动分析模型, 用于研究时变参数、滑动摩擦和传递误差的综合激励效应.

3.3 具有多级齿轮付的系统

最早对多级齿轮系统进行研究的是 Toriden 和 Gauvin[53], Iida 和 Tamura[105], Choy, Tu, Savage 和 Townsend[106], Iida 和 Tamura[105], Iida 和 Tamura 和 Yamamoto[107] 研究了两级齿轮传动系统弯 - 扭耦合振动的模态特性. Umezawa, Ajima 和 Houjoph[108], Velex 和 Saada[109] 应用有限元法研究了两级齿轮传动系统的振动. Linke 和 Borner[110] 在考虑时变啮合刚度的基础上, 分析齿轮系统各级啮合间可能的相互影响.

在上述的研究中, 文献 [105, 107, 108] 研究的是一般的两级直齿轮传动系统, 文献 [98] 研究了相应的斜齿轮系统, 而文 [110] 则讨论的是具有惰轮的两级传动系统.

1994 年, Kahraman[34] 对具有惰轮的两级斜齿轮传动系统进行了研究, 系统模型中考虑了滚动轴承的弹性. 他们建立的模型是包括了轴向、周向、径向和摆动的具有 6 个自由度的三维齿轮振动分析模型. 随后, Lim 和 Houser[111] 提出了具有三方向移动和一个方向扭转自由度的一种特殊形式的双啮合齿轮振动模型 (a dual-mesh counter-shaft models). Vinayak[112], Vinayak, Singh 和 Padmanabhan[17] 建立更精确的这类双啮合模型. 1999 年, Raclot 和 Velex[113] 分别对单级和多级齿轮传动系统进行了研究, 考虑了系统在参数激励和外激励作用下, 轮廓修形和安装误差对振动特性的影响.

前述的研究大多局限于单级和两级齿轮传动系统. Lim 和 Li[114] 提出了描述如图 4 所示的多级齿轮传动系统的振动方程. 在他们的模型中, 考虑了 3 个移动自由度和 3 个转动自由度以及 Blankenship 和 Singh[32,33] 提出的轮齿啮合模型.

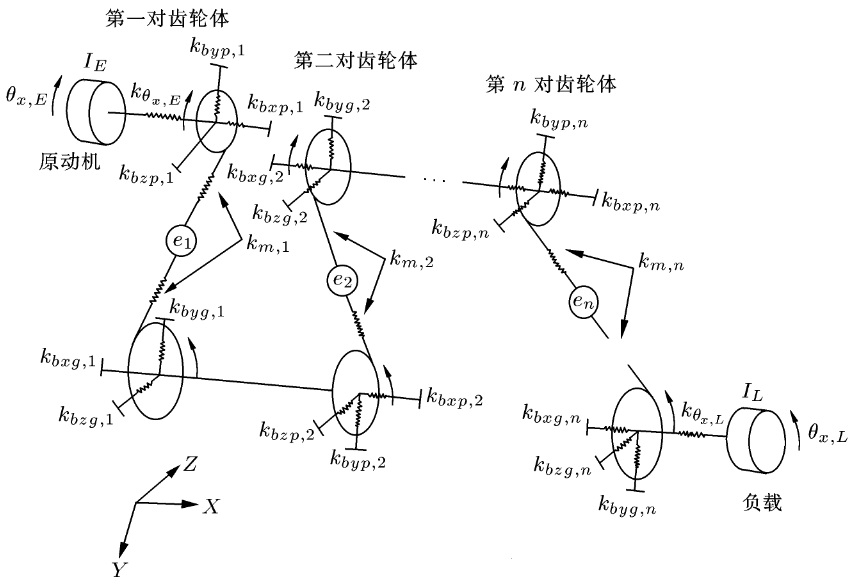

图 4

2000 年， Huang 和 Liu[115] 将直齿轮轮齿模拟为变截面 Timoshenko 梁，用动刚度方法建立其振动分析模型. 研究中考虑了时变啮合刚度，计算了直齿轮的瞬态响应. 利用 Timoshenko 梁理论进行齿轮系统振动研究的还有文献 [116].

另一方面，现代的航空飞行器和汽车的传动装置中大量使用质量优化的轻而薄的多级齿轮传动系统. 但这种柔性轮体齿轮的固有频率往往位于齿轮的啮合率范围内，会产生较为严重的系统噪音、振动以及其他动力学问题 [117～120]. 但是，由于过去的齿轮动力学研究主要考虑刚性轮体的齿轮系统问题 [1,121]，因此促使人们开始研究考虑轮体弹性的齿轮系统振动问题. Vinayak, Singh 和 Padmananabhan[17] 的研究包括了传动轴和轴承的弹性，但齿轮轮体仍处理为刚性的. 为此，在 1998 年，Vinayak 和 Singh[16] 将刚体齿轮系统的多体动力学分析方法 (the multi-body dynamics modeling strategy for rigid gears) 推广用于考虑弹性轮体的多级齿轮传动系统的研究，他们的力学模型如图 5 所示. 他们利用已经研究的方法 [17,122] 建立了具有时变参数的非线性微分方程组.

最近， Parker, Vijayakar, Imajo[123] 利用有限元 / 接触力学模型 (a finite element/ contact mechanics model) 研究了考虑轮体弹性的直齿轮系统的动态响应. 由于在此研究中他们考虑了轮齿分离的间隙非线性，其研究工作的详细讨论将在下节中进行. 类似的研究在行星齿轮系统中也得到了重视，如 1994 年 Kahraman[124], 1995 年 Saada 和 Velex[125], 1996 年 Velex 和 Flamand[126] 和 2000 年 Parker, Agashe 和 Vijayakar[127] 的研究工作.

对于多级传动方面的研究， Rook 和 Singh[35] 对具有单间隙或多间隙的多级啮合系统进行了动态分析. 具体内容也将在下一节中介绍.

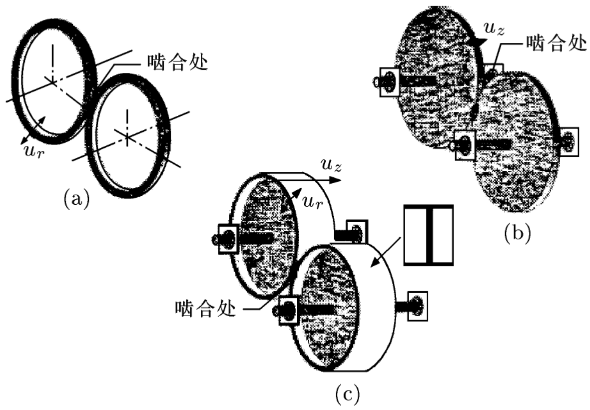

图 5

4 具有齿侧间隙的齿轮系统

本节讨论振 - 冲问题、具有齿侧间隙和时不变啮合刚度的齿轮系统振动问题的研究进展.

4.1 振 - 冲 (vibro-impact) 问题

齿轮付，为考虑润滑和制造误差，往往设计有齿侧间隙. 系统在空载或轻载的状态下，间隙所引发的振动会产生轮齿分离冲击，从而产生强烈的振动、噪音以及附加的动载荷，从而严重影响齿轮系统的稳定性和寿命.

对具有间隙的振动系统，人们提出两种振 - 冲模型进行研究. 一种是 “刚性模型”(the rigid impact model)[128～137]. 这种模型假设冲击物体为刚性. 并通过一个补偿系数 (a coefficient of restitution) 来描述能量的损失 [138]. 虽然这个方法不能够直接用于

齿轮系统的分析，但是其中的一些观点和结论对于齿轮系统的研究是很有价值的. 另一种模型是“弹性冲击”模型 (the elastic impact model)[139~144]. 这种模型可以揭示齿轮系统非线性间隙振动的一些重要特性. 模型中考虑了两种阻尼：黏性阻尼 (viscous damping)[139,140] 和冲击阻尼 (impact damping)[145].

4.2 齿轮系统的研究进展

具有齿侧间隙和时不变啮合刚度的单自由度和多自由度齿轮系统振动问题的早期研究，在 Comparim 和 Singh[146] 、 Kahraman 和 Singh[25] 等的文章中进行了较为详细说明.

从中不难看出，从 1962 年开始关于间隙直齿轮付动态特性的实验研究 [15,147~149] 取得了许多成果. 这些实验研究虽然局限于一定的范围内，但已清楚地证明了齿轮振动问题不能只简单地作为线性模型处理.

关于非线性间隙齿轮系统的研究是 Nakamura[26] 最早开始的. 随后, Dubowsky 和 Freudenstein[139,140] 研究了具有间隙的机械系统. 他们建立了一个线性冲击付模型 (a linear impact pair model), 通过对模型的求解，得到了受正弦间隙激励的质量块动态响应. 这种模型实际上就是前述的振 - 冲模型 (a vibro-impact model). 在 1977 年， Azar 和 Crossley[27] 以 Dubowsky 的模型为基础，利用数值模拟求解了直齿轮系统非线性间隙振动问题. 采用的模型与 Dubowsky 模型相类似，但考虑了齿轮的惯性、轮齿的分离、时变刚度以及轮齿的摩擦和齿廓修形等. 他们的研究表明，齿轮付在轻载状态时，如果当齿轮啮合频率等于传动轴扭转振动固有频率一半时，齿轮的间隙将导致强烈的振动.

1978 年， Wang[28] 利用分段线性数值方法研究了高速轻载精密齿轮的动载荷. 其分析模型不仅考虑了间隙非线性，也考虑了时变啮合刚度、由偏心引起的低频误差等. 在另一篇文章 [29] 中，他完成了相应的试验验证. Hayashi, Nishi,Ohno 和 Crossley[150] 分别对振 - 冲付和非线性间隙齿轮付进行了实验研究，结果表明这两者在性质上是相同的.

有些研究在其非线性模型中考虑了静传递误差激励 [26,27,151].

实际上, 由于齿轮付或冲击付中的非线性间隙本质上都是不连续且不可微的, 它们在微分方程中表现出了很强的非线性，因此，自 20 世纪 80 年代，许多从事齿轮系统和振动冲击系统动力学研究的学者都认识到这个问题, 从而要么采用数值仿真和模拟仿真方法, 要么采用分段线性方法对这类问题进行研究. 例如，Yang 和 Lin[31], Ozguven 和 Houser[151] 用数值方法研究单自由度扭转齿轮模型. Galhoud 、Masri 和 Anderson[152] 则利用分段线性技术研究了含有间隙的两自由度系统，求得了受迫谐波响应. Winter 和 Kojima[153] 也使用同样的技术研究了具有侧隙的齿轮系统. 但是应该主要到, 这些数值方法和分段线性方法无法得到像次谐波响应和混沌响应 (subharmonic and chaotic response) 这类重要的非线性特性.

1989 年 Comparin 和 Singh[135] 在研究外激励作用下间隙冲击付 (an impact pair with backlash) 的过程中讨论了这些问题, 他们认为此前对齿轮系统振动问题的研究均不能直接解决这些问题.

在 1990 年， Kahraman 和 Singh[25] 分别使用数值分析方法和谐波平衡方法研究了内外激励作用时具有齿侧间隙的一对直齿轮付的非线性频响特性，研究了内谐波激励 (the internal sinusoidal excitation) 的稳态解和给定频率的多重解问题. 他们注意到，若小阻尼系统的平均载荷很小时，则会出现混沌响应和次谐波响应，得到了判断轮齿分离和反振 (tooth separation and back collision) 的判定条件.

同年 Comparin 和 Singh[154] 将上述的研究工作推广用于具有间隙的多自由度系统频响特性分析 (the frequency response characteristics). 他们采用谐波平衡法 (the harmonic balance method) 和描述函数法 (the description function approach)[155] 研究了具有 3 个耦合非线性振子 (three coupled nonlinear oscillators) 的多自由度系统无阻尼振动的近似解析解，提出了确定主频激励和谐波激励 (primary resonance and a harmonic excitation) 时解的存在和稳定性的一般性公式.

后来， 1991 年， Kahraman 和 Singh[40] 进一步应用上述的研究，建立了图 6 所示的三自由度齿

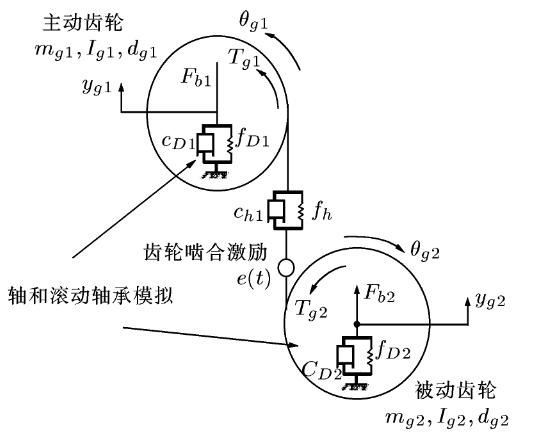

图 6

轮 - 转子 - 轴承系统 (a gear-rotor-bearing system) 的动力学模型. 模型包含了滚动轴承的径向间隙和直齿轮侧间隙等非线性因素, 假设齿轮刚度为线性时不变的. 他们用解析法和数值法分析了模型的非线性频域

特性，讨论了非线性模态耦合 (non-linear modal interaction)、内部静传递误差激励和外部扭转激励间的差别等重要问题. 研究了像轴承刚度与啮合刚度之比、载荷静态分量与交变分量之比、轴承载荷和预加载荷之比等参数对系统非线性振动特性的影响. 并建立了对稳态解答 (混沌解、准周期解和次谐波解) 进行分类的准则, 得到了齿轮系统通向混沌的两种典型的道路.

1992 年， Padmanabhan 和 Singh[156] 以先前的研究 [154] 为基础，建立了一个具有非线性间隙的两自由度齿轮模型. 此模型是为求解各共振点的相互影响而提出的. 在分析中他们首先利用数值模拟法证明谐波、周期及混沌解的存在, 然后用谐波平衡法得到激励频率的近似解，并应用该近似解区分弱非线性、中等程度非线性和强非线性频响耦合 (weak, moderate and strong non-linear spectral interaction), 讨论了阻尼比、平均载荷、交变载荷以及共振频率间的带宽 (frequency spacing between the resonances) 的影响. 但是，由于他们的研究是以 Dabowsky 和 Freudenstein[139] 的黏性阻尼模型为基础的，分析仅考虑了单谐波项，分析结果有一定局限性.

1995 年， Rook 和 Singh[35] 研究了具有多间隙反转惰轮啮合齿轮系统 (a generic reverse-idler gear system) 的非线性动力学特性，这种系统在轻载时会产生拍击 (rattle) 和振 - 冲现象 (vibro-impact). 通过对非线性响应的分析, 他们引入了有效刚度和变频固有频率 (the response-variant natural frequency) 的概念, 并利用这些概念研究了在同时存在两种非线性时系统中的频响耦合 (the spectral interaction).

另一方面, 非线性齿轮系统所涉及的重要问题之一是汽车变速系统的拍击问题 (gear rattle in manual automotive transmission), 有关的研究涉及具有齿侧间隙的齿轮系统和多级离合器刚度 (gear system with backlash and multi-stage clutch stiffness)[157~159]. 在这方面的研究也涉及到具有低频轻载时齿轮的拍击问题 [31,160,161].

1989 年, Singh, Xie 和 Comparin[37] 为了研究汽车变速系统齿轮的空档拍击问题 (automotive transmission neutral rattle problem), 建立了如图 7 所示的四自由度非线性模型. Padmanabhan 和 Singh[156] 也以该模型为例解释了他们的研究结果.

后来， Karagiannis 和 Pfeiffer[162], Pfeiffer 和 Kunert[163] 也根据多体动力学原理，建立了齿轮拍击模型 (gear rattle model). 他们利用反射系数 (a coefficient of restitution) 模拟冲击条件，由谐调算法 (a patching scheme) 计算解答. 他们还通过 Fokker-Planck 方程验证了混沌现象的存在. 1991 年， Kataoka, Ohno 和 Sugimoto[164] 采用谐波平衡法计算了系统的扭转冲击力 (torque impulses), 以及两级离合器刚度比 (the two-stage clutch stiffness ratio) 对该力的影响.

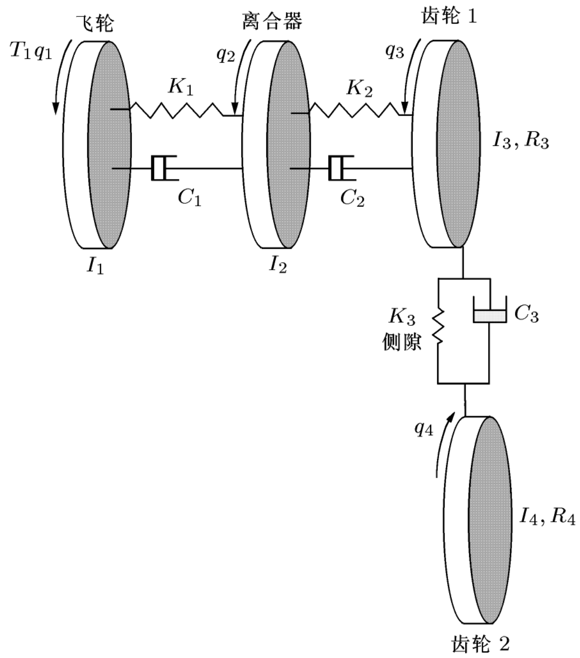

图 7

从 1992 年至 1995 年， Barlow, Padmanabhan 和 Singh[39], Padmanabhan, Rook 和 Singh[38], Padmanabhan, Barlow, Rook 和 Singh[36] 讨论了这种系统求解过程所遇到的数值计算方面的有关问题.

5 关于具有多重非线性的齿轮系统

上两节主要涉及具有单一非线性因素的齿轮系统. 本节讨论同时含有时变啮合刚度、轮齿侧隙和传递误差等多种非线性因素的齿轮系统振动问题的研究进展.

5.1 20 世纪 80 年代的研究成果

20 世纪 80 年代初， Winter 和 Kojima[153], Kasuba 和 Ewans[76] 对同时含有时变刚度和轮齿间隙齿轮系统的振动问题进行了研究. 在 1984 年， Kucukay[41,42] 研究了轮齿间隙对高速齿轮系统的影响. 他考虑了轮齿啮合的时变刚度，研究了时变刚度参数激励的动力稳定性问题. 后来， Theissen[165] 讨论了在交变载荷作用下, 具有齿侧间隙的齿轮动态载荷问题.

1985 年，以文献 [139, 140, 27] 的工作为基础, Yang 和 Lin[30] 给出了一种具有侧隙的直齿轮付振动分析模型，其特点是他们提出的模型是旋转型的，而且考虑了齿廓曲线形式、材料弹性、能量损失和时变啮合刚度等因素的影响. 此后，他们 [31] 又扩展了这种模型，进一步包含了轮齿弯曲变形、轴向压缩变形

和齿面摩擦等因素.

1988 年，Neriya、Bhat 和 Sankar[43] 在考虑非线性间隙影响以及啮合刚度时变特性的基础上，对多自由度齿轮系统的动态响应进行了研究. 同年，Ozguven 和 Houser[151] 建立了一对齿轮付单自由度非线性分析模型，采用分段线性方法计算了啮合过程、轮齿力、动载系数和动态传递误差等. 他们分析了时变啮合刚度、阻尼、齿轮误差、齿廓修形和轮齿间隙的影响. 研究表明，由时变啮合刚度产生的位移激励比因刚度不同造成的系统固有频率的改变对系统的影响更大. 但是，Ozguven[166] 指出这种方法的有效性取决于其选取的参数. 为此他建议应对其进行详细的研究.

上述讨论的研究主要涉及直齿轮，对于斜齿轮这方面的研究可参阅文献 [41~43].

5.2 20 世纪 90 年代的研究成果

1991 年，以 Gregory, Harris 和 Munro[167], Retting[168], Terauchi, Hidaka 和 Hagashima[169], Sato, Kamada 和 Takatsu[170] 的早期研究为基础，Sato,Yamamoto 和 Kawakami[171] 建立了具有时变啮合刚度和齿侧间隙的非线性振动分析模型. 并利用打靶法 (a shooting method) 深入研究了周期解的分岔和混沌过渡等现象.

同年，Ozguven[172] 建立了如图 8 所示的 6 自由度直齿轮系统非线性振动分析模型. 由于模型考虑了轴和轴承的动力学性质，所以可以研究齿轮系统耦合动力学特性. 而且该模型同时考虑了时变啮合刚度、阻尼、侧隙和轮齿分离、单边和双边冲击 (single- and double-side impacts)、齿轮误差和齿廓修形等. 在这方面，Ozguven 和 Houser[140] 也曾通过考虑内激励，提出了相应的"静态传递误差分析模型"(the static transmission error method).

1991 年，Kahraman 和 Singh[21] 建立了一个非线性齿轮 - 转子 - 轴承系统分析模型，模型中包含了轮齿间隙和啮合刚度的影响，进行了齿轮系统的频响特性分析. 在分析过程中，他们先将具有轮齿间隙的单自由度直齿轮模型扩展为具有正弦和周期啮合刚度的三自由度模型，模型中的间隙参数包括了齿侧间隙和滚动轴承间隙. 他们用数值方法研究了啮合刚度和非线性间隙间的耦合效应. 分析表明，当啮合刚度和轴承间隙的非线性耦合较弱时，时变刚度和齿侧间隙之间将出现强烈的耦合作用.

为了获得具有参数激励和间隙非线性的预加载荷齿轮系统的稳态受迫响应，Kahraman 和 Singh[21], Sato, Yamamoto 和 Kawakami[171] 用数值方法求解了只受一个外部交变力作用的非线性齿轮模型. 并在此基础上发展了一种一般性的解析法 (a generalized analytical method)[87]. 在他们的研究中，由于重点是系统的稳态解，因此采用了多项谐波平衡方法 (a multi-term HBM) 对系统进行分析. 研究中应用直接 Hewton-Raphson 方法求解推得的非线性代数方程，其中的解析 Jacobian 矩阵 (a closed form Jacobian matrix) 是用类似于 Kim 和 Noah[173] 的频域方法 (a frequency domain method) 求解的.

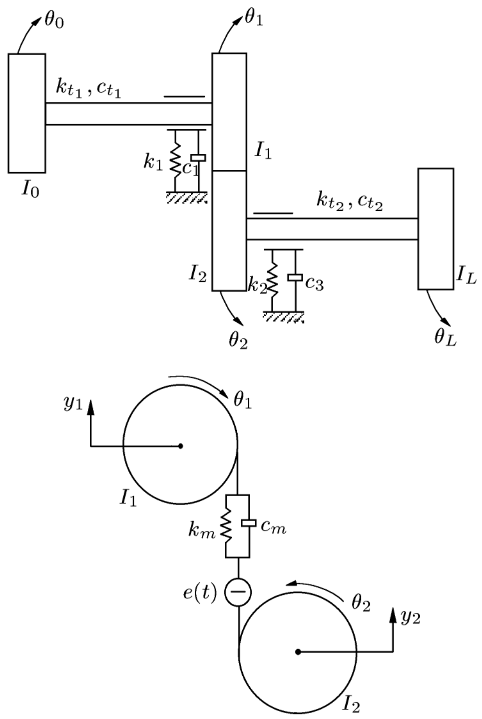

图 8

1996 年，Kahraman 和 Blankenship[23] 研究了具有时变刚度和死区型间隙非线性的机械振动系统 (a mechanical oscillator with time-varying stiffness and a dead zone type clearance non-linearity). 他们利用解析法研究了系统在同等的参数激励和外载荷激励作用下，间隙非线性系统的稳态受迫振动响应.

Padmanabhan 和 Singh[174] 采用参数延展技术 (a parametric continuation technique) 和谐波平衡法 (the harmonic balance method)，研究了具有参数激励和外激励共同作用的非线性振动系统，描述了平均载荷对具有非线性间隙的 Hill 振子 (the Hill oscillator) 动态特性的影响. 重点关注的问题有：(1) 平均载荷与动态响应幅值间的关系；(2) 参数激励与非线性间隙对响应的影响关系；(3) 时变系统与非时变系统的比较等.

1997 年 Kahraman 和 Blankenship[15] 对具有时变啮合刚度、齿侧间隙和外力激励的齿轮系统进行了实验研究. 实验中可以看到大量的非线性现象，如受迫振动中的软型骨架线和跳跃不连续 (a softening-type of backbone and jump discontinuities in the forced response curves)、多重稳态运动 (multiple coexisting stable motions) 、次谐和超谐共振 (sub and super harmonic resonances) 、分叉 (fold bifurcations) 、长周期次谐波运动 (long-period sub-harmonic motions) 和混沌运动 (chaotic motions) 等. 图 9~ 图 11 是测得的典型受迫响应及混沌运动. 它们表明了在具有非线性间隙和时变参数的机械系统中存在混沌现象. 这与文献 [23, 87] 的预测是一致的.

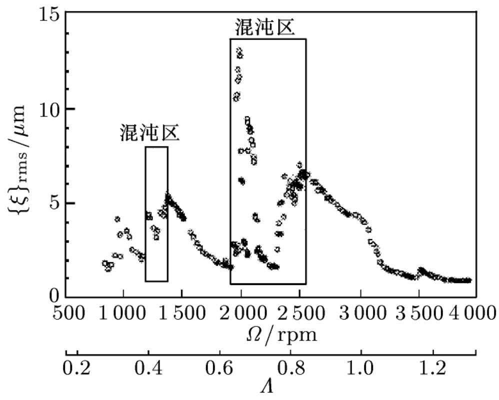

图 9

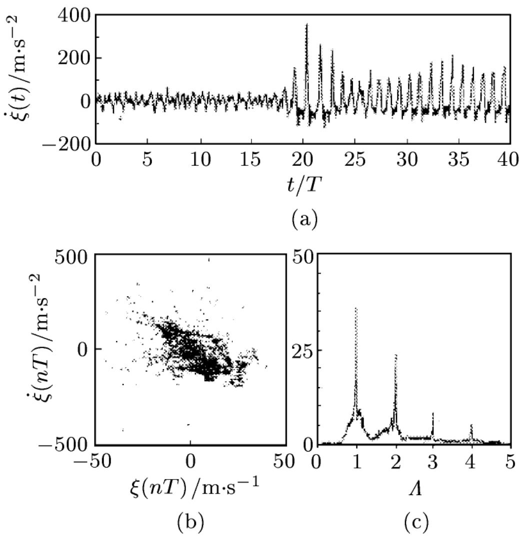

图 10

1999 年， Roghothama 和 Narayanan[60] 利用增量谐波平衡法 (the incremental harmonic balance method, IHBM)[175,176], 研究了具有时变刚度和轮齿间隙的非线性齿轮 - 转子 - 轴承系统的周期运动. 他们采用以弧长延展技术为特征的轨迹跟踪算法 (a path following procedure using an arc length continuation technique) 确定了系统的分岔图. 从中可以看出, 在不同的激振频率范围中, 通向混沌的道路有一个双周期轨道和一个准周期轨道 (a period doubling route and a quasiperiodic route to chaos). 他们用数值法研究了混沌运动, 计算了 Lyapunow 指数. 研究表明, 利用 IHB 法求得的系统周期解和次谐波解与数值分析法的结果是一致的.

2000 年, Theodossiadas 和 Natsiavas[24] 对系统的强非线性振动方程进行了研究. 他们的研究分两部分. 第一部分采用解析法确定了齿轮系统的周期性稳态响应. 对于含有轮齿间隙和时变刚度的齿轮系统, 在假设周期外激励和啮合刚度的情况下, 通过适当的分析过程 (包括分段线性方法和具有周期时变参数的振子) 识别出周期响应可能的类型. 这部分的研究同时还包括对一些简单但重要的齿轮付分析模型的响应和稳定性的分析研究. 文章的第二部分进行了数值求解. 证明了前述解析解法的可靠性和有效性. 他们的研究表明, 系统参数的某种组合效应可能导致更复杂、更无规则的响应, 包括混沌响应.

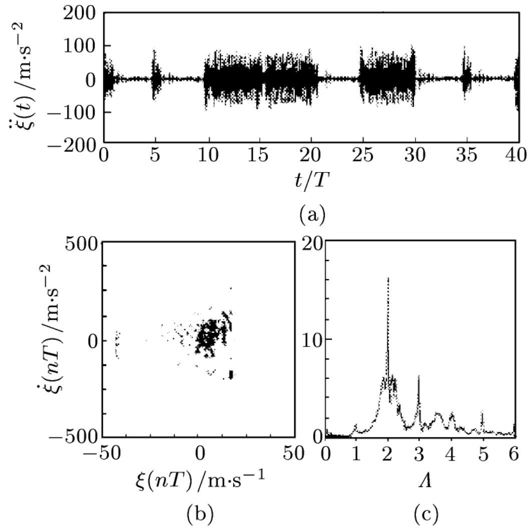

图 11

近来, Parker, Vijayaker 和 Imajo[123] 利用有限元 / 接触力学模型 [127] 分析了具有时变刚度和轮齿间隙的直齿轮付动态响应. 该模型的主要特点是, 在轮齿啮合过程中, 可以每一增量步的详细分析得到动态啮合力. 图 12 表示了相应的接触区、接触点对和

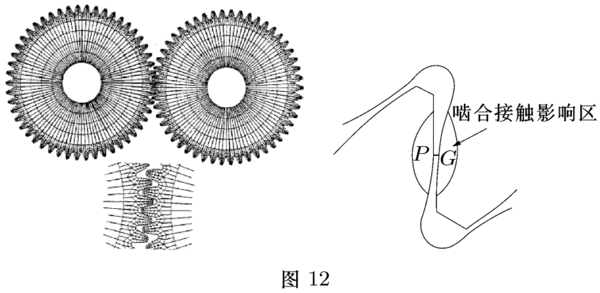

图 12

有限元网格. 其次, 该模型不需对时变刚度和传动误差等激励进行设定. 利用此模型他们对较大的转速和载荷范围的系统特性进行了研究. 研究表明: 即使对于高精度齿轮在较大工作负荷时, 轮齿脱啮也是主要的非线性振动激励源. 这一结论是与以前的分析结果不相同的. 从而也进一步表明了齿轮系统非线性振动

的复杂特性，仍需进行深入研究.

6 结 语

根据以上讨论,我们建议今后的研究应关注以下几个问题：

(1) 建立一个多间隙、多时变参数的动力学模型. 一个齿轮系统可能包含多对齿轮付和多个轴承,存在多间隙、多时变刚度和传动误差等非线性因素. 因此,需要建立多间隙、多时变参数的齿轮系统分析模型,并且应注意研究这些非线性因素对系统动态特性的综合影响.

(2) 考虑其它非线性因素的齿轮系统非线性振动问题. 齿轮系统除了间隙、时变刚度和传动误差等非线性因素外，还存在着许多其它的非线性因素，如啮合齿面间的摩擦、质量偏心、挤压油膜支承 [177～179] 以及采用滑动轴承所产生的涡动 [180] 等. 为研究它们对动态特性的影响. 就必须将这些因素包含在系统的动态模型内.

(3) 全面地研究了齿轮系统的非线性振动特性 [181,182]，虽然对于齿轮系统的非线性振动已进行了大量研究. 但为了设计出低噪音、低振动、轻质量和高可靠性的齿轮系统,还要对系统进行更全面的研究.

(4) 研究与齿轮系统非线性振动相联系的问题,虽然以前大多数的工作都是集中于解决直接影响齿轮系统的动力学问题上，但同时我们也不能忽视与其相关问题的研究，如：振动设计、故障诊断和载荷识别等.

(5) 利用统计能量法研究高速齿轮系统的线性和非线性振动特性. 由于高转速下，齿轮变速系统的振动响应通常包含一些高的频率,因而统计能量法将更适宜相应的研究.

参 考 文 献

1 Ozguven H N, Houser D R. Mathematical models used in gear dynamics——a review. *J Sound Vib,* 1988, 121 (3): 383～411

2 李润方，王建军. 齿轮系统动力学. 北京：科学出版社， 1997

3 Wang Jianjun, Li Runfang, Peng Xianghe. A survey to nonlinear vibration of gear transmission system. *Appl Mech Rev,* 2003, 56(3): 309～329

4 王建军，李润方. 齿轮系统振动力学的基本理论. 中国机械工程, 1998, (12): 55～58

5 王建军，李润方. 齿轮系统间隙非线性振动研究综述. 非线性动力学学报， 1995, 2(3): 214～219

6 杨宏斌，邓效忠，等. 齿轮非线性振动研究综述. 中国机械工程. 1999,10(7): 807～809

7 王建军，陆明万，张雄. 齿轮系统间隙非线性振动基本理论. 非线性动力学学报， 1995, 34(增)

8 王三民，沈允文，董海军等. 含间隙和时变啮合刚度的弧齿锥齿轮传动系统非线性振动特性研究. 机械工程学报， 2003, 39(2): 28～32

9 孙涛，沈允文，孙智民等. 行星齿轮传动非线性动力学方程求解与动态特性分析. 机械工程学报， 2002, 38(3): 11～15

10 孙智民，沈允文，王三民等. 行星齿轮传动系统分叉与混沌的研究. 机械工程学报， 2001, 37(12): 11～15

11 王建军，李润方. 齿轮系统参数振动问题研究. 振动与冲击， 1997, 4: 69～73

12 王建军，李其汉. 单自由度参数振动系统非线性响应的若干特征. 应用力学学报， 2003, l.20(2): 147～151

13 王建军，陆明万，张雄. 汽车变速系统拍击动力学基本理论. 机械科学与技术， 1997, 16(3): 391～397

14 林腾蛟，李润方，陶泽光等. 齿轮传动三维间隙非线性冲击 - 动力接触特性数值仿真. 机械工程学报， 2000, 36(6): 55～58

15 Kahraman A, Blankenship G W. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters. *ASME Appl Mech,* 1997, 64: 217～226

16 Vinayak H, Singh R. Multi-body dynamics and modal analysis of compliant gear bodies. *J Sound Vib,* 1998, 210(2): 171～214

17 Vinayak H, Singh R, Padmanabhan C. Linear dynamic analysis of multi-mesh transmissions containing external rigid gears. *J Sound Vib,* 1995, 185(1): 1～32

18 Benton M, Seireg A. Simulation of resonances and instability conditions in pinion-geared systems. *ASME Mech Des,* 1978, 100: 26～32

19 Benton M, Seireg A. Factors influencing instability and resonance in Geared systems. *ASME Mech Des,* 1981, 103: 372～378

20 Wang K L, Cheng H S. A numerical solution to the dynamic load, film thickness, and surface temperatures in spur gears, part I——analysis. *ASME Mech Des,* 1981, 103: 177～187

21 Kahraman A, Singh R. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system. *J Sound Vib,* 1991, 146 (1): 135～156

22 Cai Y. Simulation on the rotational vibration of helical gears in consideration of the tooth separation phenomenon (a new stiffness function of helical involute tooth pair). *ASME Mech Des,* 1995, 117: 460～469

23 Kahraman A, Blankenship G W. Interactions between commensurate parametric and forcing excitations in a system with clearance. *J Sound Vib,* 1996, 194 (3): 317～336

24 Theodossiades S, Natsiavas S. Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash. *J Sound Vib,* 2000, 229(2): 287～310

25 Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a spur gear pair. *J Sound Vib,* 1990, 142 (1): 49～75

26 Nakamura K. Tooth separations and abnormal noise on power transmission gears. *Bull JSME* 1967, 10: 846～854

27 Azar R C, Crossley F R E. Digital simulation of impact phenomenon in spur geared system. *ASME Eng Ind,* 1977, 99: 792～798

28 Wang C C. Rotational vibrationawith backlash part 1. *ASME Mech Des,* 1978, 100: 363～373

29 Wang C C. Rotational vibration with backlash part 2. *ASME Mech Des,* 1981, 103: 387～397

30 Yang D C H, Lin J Y. A rotary model for spur gear dynamics. ASME Paper, 85-DET-2, 1985

31 Yang D C H, Lin J Y. Herztian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics. *ASME Mach Transm Auto Des,* 1987, 109: 189～196

32 Blankenship G W, Singh R. A new gear mesh interface dynamic model to predict multi-dimensional force coupling and excitation. *Mech Mach Theory,* 1995, 30(1): 43～57

33 Blankenship G W, Singh R. Dynamic force transmissibility in helical gear pairs. *Mech Mach Theory,* 1995, 30(3): 323～339

34 Kahraman A. Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train. *ASME Mech Des,* 1994, 116: 706～712

35 Rook T E, Singh R. Dynamic analysis of a rever-idler gear pair with concurrent clearances. *J Sound Vib,* 1995, 182 (2): 303～322

36 Padmanabhan C, Barlow R C, Rook T E, Singh R. Computational issues associated with gear rattle analysis. *ASME Mech Des,* 1995, 117: 185～192

37 Singh R, Xie H, Comparin R J. Analysis of automobile neutral gear rattle. *J Sound Vib,* 1989, 131: 177～196

38 Padmanabhan C, Rook T E, Singh R. Computational issues associated with gear rattle analysis, part I problem formulation. In: Proc Sixth Inter Power Trans Gearing Conf, 1, 1992, 129～136

39 Barlow R, Padmanabhan C, Singh R. Computational issues associated with gear rattle analysis, part II evaluation criterion for numerical algorithms. In: Proc Sixth Inter Power Trans Gearing Conf, 1992, 2. 505～512

40 Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearance. *J Sound Vib* 1991, 144 (3): 469～506

41 Kucukay F. Dynamic behavior of high speed gears. *IMecH E*, C317/84, 1984

42 Kuenkay F. Dynamic loads in gear teeth. In: Proc Third Conf Vib Rotating Machinery, Instit Mech Eng, 1984. 73～79

43 Neriya S V, Bhat R B, Sankar T S. On the dynamic response of a helical geared system subjected to a static transmission error in the form of deterministic and filtered white noise inputs. *ASME Vibr Acous Stress Rel Des,* 1988, 110: 501～506

44 Fawzi M A, El-Saeidy. Effect of tooth backlash and ball bearing beadband clearance on vibration spectrum in spur gear boxes. *J Acoust Soc Am,* 1991, 89: 2766～2773

45 Hill G W. On the part of motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica,* 1886, 8: 1～36

46 Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations. New York: John Wiley & Sons, 1979

47 Mathieu E. memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *Journal of Matnemetiques Pures et Appliques,* 1868, 13: 137～203

48 Bolotin V V. The dynamic stability of elastic system. Holden-Day, S. Francisco, USA, 1964

49 Pedersen P. On the stability diagrams for damped Hill equations. *Quarterly of Applied Mathematics,* 1985, 42: 477～495

50 Cesari L. Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. New York: Springer Verlay, 1971

51 Bollinger J G, Harker R J. Unsachen and answirkangen dymischer zahnkrafte in stirnadgetrieben. *Indnstric Anzeigen*, March, 1967

52 Bollinger J G, Harker R J. Instability potential of high speed gearing. *J Industral Mathematicics Soc,* 1967, 17(2): 39～55

53 Toridon G V, Gauvin R. Dynamic stability of a two- stage gear train under the influence of variable meshing stiffness. *ASME Eng Ind,* 1977, 99: 785～791

54 Kumer A S, Sanker T S, Osman M O M. On dynamic tooth load and stability of a spur-geared system using the state-spacing approach. *ASME Mech Transmission Auto Des,* 1985, 107: 54～60

55 Zadoks R I, Midha A. Parametric stability of a two-degree-of freedom machine system, part I-equations of motion and stability. *ASME Mech Transmission Auto Des,* 1987, 109: 210～215

56 Zadoks R I, Midha A. Parametric stability of a two-degree-of freedom machine system, part II-stability analysis. *ASME Mech Transmission Auto Des,* 1987, 109: 216～223

57 Matsuhisa H, Miyaji Y, Sato S. Parametrically excited vibration with external constant load and damping. *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University,* 1982, 44: 158～167

58 Iwatsubo T, Arii S, Kawai R. The coupled lateral torsional vibration of a geared rotor system. In: Proc ImechE Vibration in Rotating Machinery Conf, paper C265/84, 1984. 59～66

59 Amabili M, Rivola A. Dynamic analysis of spur gear pairs: steady-state response and stability of the SDOF model with time-varying mesh damping. *Mech Syst Signal Process,* 1997, 11: 375～390

60 Raghothama A, Narayanan S. Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method. *J Sound Vib,* 1999, 226 (3): 469～492

61 Raghothama A. Bifurcation and chaos in gear and cam mechanisms with clearance type of nonlinearities. MS thesis. Indian Institute of Technology, Madras, 1993

62 Fu F C L, Nemat-Nasser S. Stability of solution of systems of Linear differential equations with harmonic coefficients. *AAIA* 1972,10(1): 30～36

63 Hansen J M. Stability diagrams for coupled, Mathieu- equations. *Ingenieur-Archiv* 1985, 55: 463～473

64 Lindh K G, Likins P W. Infinite determinant methods for stability analysis of periodic-coefficient differential equations. *AIAA* 1970, 8: 463～473

65 Weyh B, Kostyra H. Direct Floquet method for stability limits determination——I. theory. *Mechanism and Machine Theroy,* 1991, 26: 123～131

66 Kostyra H, Weyh B. Direct Floquet method for stability limits determination——II. Application and phenomena. *Mechanism and Machine Theroy,* 1991, 26: 123～131

67 Seyranian A P, Solem F, Pedersen P. Multi-parameter linear periodic systems: sensitivity analysis and applications. *J Sound Vib* 2000, 229 (1): 89～111

68 Sinha S C, Wu D H. An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *J Sound Vib,* 1991, 151: 91～117

69 Sato T, Umezawa K, Ishikawa J. Effects of contact ratio and profile correction on gear rotational vibration. *Bull JSME,* 1983, 26: 2010～2016

70 Terauchi Y, Nadano H, Nohara M. On the effect of the tooth profile modification on the dynamic load and the sound level of the spur gears. *Bull JSME*, 1982, 25: 1474～1481

71 Lin H H, Townsend D P, Oswald F B. Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications. In: Proc ASME 5th Inter Power Trans Gearing Conf. Chicago IL 1, 1989. 409～419

72 Lin H H, Townsend D P, Oswald F B. Profile modification to minimize spur gear dynamic loading. In: Proc ASME 5th Inter Power Trans Gearing Conf. Chicago IL, 1, 1989. 455～465

73 Lin H H, Houston R L. Dynamic loading on parallel shaft gears. NASA CR 179473, 1986

74 Yoon K Y, Rao S S. Dynamic load analysis of spur gears using a new tooth profile. *ASME Mech Des* 1996, 118: 1～6

75 Kahraman A, Blankenship G W. Gear dynamics experiments part-III: effect of involute tip relief. In: ASME Power Transmission and Gearing Conf. San Diego, California, 1996

76 Kasuba R, Ewans J W. An extended model for determining dynamic loads in spur gearing. *ASME Mech Des,* 1981, 100: 69～76

77 Staph H E. A parametric analysis of high-contact-ratio spur gears. *ASLE Transactions,* 1976, 19: 201～215

78 Liou C H, Lin H H, Oswald F B, Townsend D P. Effect of contact ratio on spur gear dynamic load with no tooth profile modifications. *ASME Mech Des,* 1996, 118: 439～443

79 Lin H H, Huston R L, Coy J J. On dynamic loads in parallel shaft transmissions: part I——modeling and analysis. *ASME Mech Trans Auto Des*, 1988, 110: 221～225

80 Oswald F B, Rebbechi B, Zakrajsek J J, Townsend D P. Comparison of analysis and experiment for dynamics of low contact ratio spur gears. NASA TM-103232, 1991

81 Kahraman A, Blankenship G W. Effect of involute contact ratio on spur gear dynamics. *ASME Mech Des,* 1999, 121: 112～118

82 Maatar M, Velex P. An analytical expression for the time-varying contact length in perfect cylindrical gears: some possible applications in gear dynamics. *ASME Mech Des,* 1996, 118: 586～589

83 Andersson A. An analytical study of the effect of the contact ratio on the spur gear dynamic response. *ASME Mech Des,* 2000, 122: 508～514

84 Kubo A, Kiyono S. Vibration excitation of cylindrical involute gears due to tooth form error. *Bull JSME*, 1980, 23: 1536～1543

85 Umezawa K, Suzuki T, Sato T. Vibration of power transmission helical gears (approximate equation of tooth stiffness). *Bull JSME*, 1986, 29: 1605～1611

86 Kahraman A, Blankenship G W. Gear dynamics experiments part-II: effect of involute contact ratio. In: ASME Power Transmission and Gearing Conf, San Diego, California, 1996

87 Blankenship G W, Kahraman A. Steady state forced response of a mechanical oscillator with combined parametric excitation and clearance type non-linearity. *J Sound Vib* 1995, 185 (5): 743～765

88 Blankenship G W, Kahraman A. Gear dynamics experiments part-I: characteristics of forced response. In: ASME Power Transmission and Gearing Conf. San Diego, California, 1996, 373～380

89 Martin K F. A review of friction predictions in gear teeth. *Wear*, 1978, 49: 201～238

90 Benedict G H, Kelley B W. Instantaneous coefficients of gear tooth friction. *ASLE Trans*, 1961, 4: 59～70

91 Flamand L, Berthe D, Godet M. Simulation of Hertzian contacts found in spur gears with a high performance disk machine. *ASME Mech Des,* 1981, 103: 204～209

92 Johnson K L, Spence D I. Determination of gear tooth friction by disc machine. *Tribol Int*, 1991, 24: 269～275

93 Radzimovsky E I, Miraferi A, Broom W E. Instantaneous efficiency and coefficient of friction of an involue gear drive. *ASME Eng Ind,* 1973, 95: 1131～1138

94 Yoshizaki M, Naruse C, Nemoto R, Haizuka S. Study on frictional loss of spur gears (concerning the influence of tooth form, load, tooth surface roughness and lubricating oil). *Tribol Trans*, 1991, 31: 138～146

95 Rebecchi B, Oswald F, Townsend D P. Measurement of gear tooth dynamic friction. In: Karveils A, ed. Proc 7th ASME Int Power Transmission and Gearing Conf, San Diego, 1996. 355～363

96 Wu S, Cheng H S. A friction model of partial-EHL contacts and its application to power loss in spur gears. *Tribol Trans,* 1991, 34: 397～407

97 Houser D R, Bolze V M, Graber J M. Static and dynamic transmission error measurements and predictions for spur and helical gear sets. In: Karveils A, ed. Proc 7th ASME Int Power Transmission and gearing Conf, San Diego, 1996. 365～372

98 Borner J, Houser D R. Friction and bending moments on gear noise excitations. *SAE Trans* 1996, 105: 1669～1676

99 Iida H, Tamura A, Yamada Y. Vibrational characteristics of friction between gear teeth. *Bull JSME* 1985, 28: 1512～1519

100 Shing T K, Tsai L W, Krishnaprasad P S. Dynamic model of a spur geared system with backlash and friction consideration. In: ASME Proc Machine Elements and Machine Dynamics Conf, DE- 71, 1994. 155～163

101 Hochmann D. Friction force excitations in spur and helical involute parallel axis gearing. [Ph D Dissertation]: The Ohio State Univ, Columbus, OH, 1997

102 Vedmar L, Henriksson B. A general approach for determining dynamic forces in spur gears. *ASME Mech Des*, 1998, 120: 593～598

103 Velex P, Cahouet V. Experimental and numerical investigations on the influence of tooth friction in spur and helical gear dynamics. *ASME Mech Des,* 2000, 122: 515～522

104 Vaishya M, Singh R. Analysis of periodically varying gear mesh systems with Coulomb friction using Floquet. *J Sound Vib,* 2001, 243: 525～545

105 Iida H, Tamura A. Coupled torsional-flexural vibration of shaft in a geared system. In: Proc Conf Vibr Rotating Mech, Institution of Mechanical Engineers, 1984. 67～72

106 Choy F K, Tu Y K, Savage M, Townsend D P. Vibration signature analysis of multistage gear transmissions. In: ASME Proc 5th Intern Power Trans Gearing Conf, Chicago, 1, 1989. 383～387

107 Iida H, Tamura A, Yamamoto H. Dynamic characteristics of a gear train system with softly supported shafts. *Bull JSME,* 1986, 29, 1811～1816

108 Umezawa K, Ajima T, Houjoph H. Vibrations of three axis geared systems. *Bull JSME,* 1986, 29: 950～957

109 Velex P, Saada A. A model for the dynamic behavior of multi-stage geared systems. In: Proc 8th Inter Federation theory Mach Mech World Congress, Prague, 2, 1991. 621～625

110 Linke H, Borner J. Dynamic loads on gear trains with idler gears. In: Proc JSME Inter Conf Motion Power Transm, Hiroshima, 1991. 31～36

111 Lim T C, Houser D R. Dynamic analysis of lay-shaft gears in automotive transmission. In: Proc SAE Noise and Vib Conf, 1997. 739～749

112 Vinayak H. Multi-body dynamics and modal analysis approaches for multi-mesh transmissions with compliant gear bodies. Ph D dissertation. The Ohio State Univ, 1995

113 Raclot J P, Velex P. Simulation of the dynamic behaviour of single and multi-stage geared systems with shape deviations and mounting errors by using a spectral method. *J Sound Vib,* 1999, 220(5): 861～903

114 Lim T C, Li J. Dynamic analysis of multi-mesh counter-shaft transmission. *J Sound Vib,* 1999, 219(5): 905～919

115 Huang K J, LiuT S. Dynamic analysis of a spur gear by the dynamic stiffness method. *J Sound Vib,* 2000, 234(2):

311～329

116 Amirouche F M, Tajiri G C, Valco M J. Mathematical model of a time and position variant external load on a gear tooth using the modified Timoshenko beam equation. *Int J Numer Method Eng,* 1995, 39: 2073～2094

117 Oda S, Koide T, Miyachika K. Dynamic behavior of thin-rimmed helical gears with various web. *Bull JSME,* 1985, 28: 2434～2441

118 Iwatsuk N, Hayashi I, Maki H. Estimation of noise power radiation from gear bodies. In: JSME Inter Conf Motion and Power Trans, Hiroshima, Japan, 1991. 49～53

119 Cornejo G, Rakhit A. Identification of spiking vibrations in gears and their effect on the performance of gearbox in high speed applications. ASME DE88, 1996. 195～203

120 Okamura H, Suzuki Y, Nakano N. Experiments and analysis of sound-damping rings for gears: application of snap rings. ASME DE 88, 1996. 345～354

121 Blankenship G W, Singh R. A comparative study of selected gear mesh interface dynamic models. In: ASME Proc 6th Inter Power Trans Gearing Conf, DE43, 1992. 137～146

122 Vinayak H, Singh R. Eigensolutions of annular-like elastic disks with intentionally removed or added material. *J Sound Vib,* 1996, 192: 741～769

123 Parker R G, Vijayakar S M, Imajo T. Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modeling and experimental comparisons. *J Sound Vib,* 2000, 237: 435～455

124 Kahraman A. Planetary gear train dynamics. *ASME Mech Des,* 1994, 116: 713～720

125 Saada A, Velex P. An extended model for the analysis of the dynamic behavior of planetary trains. *ASME Mech Dsi,* 1995, 117: 241～247

126 Velex P, Flamand. Dynamic response of planetary trains to mesh parametric excitations. *ASME Mech Des,* 1996, 118: 7～14

126 Parker R G, Agashe V, Vijayakar S M. Dynamic response of a planetary geared system using a finite element/contact mechanics model. *ASME Mech Design,* 2000, 122: 305～311

128 Bapat C N, Popplewell N, McLachlan K. Periodic motions of an impact pairs. *J Sound Vib,* 1983, 87: 19～40

129 Popplewell, Bapat C N, McLachlan K. Stable periodic vibroimpact of an oscillator. *J Sound Vib,* 1983, 87: 41～59

130 Shaw S W, Holmes P J. A periodic forced impact oscillator with large dissipation. *ASME Appl Mech,* 1983, 50: 849～857

131 Shaw S W. The dynamics of a harmonically excited system having rigid amplitude constrains part 1: subharmonic motions and local bifurcations. *ASME Appl Mech,* 1985, 52: 453～458

132 Shaw S W. The dynamics of a harmonically excited system having rigid amplitude constraints part 2: chaotic motions and global bifurcations. *ASME Appl Mech,* 1985, 52: 459～464

133 Palej P, Niziol J. On a direct method of analyzing impacting mechanical system. *J Sound Vib,* 1986, 108: 191～198

134 Bapat C N, Popplewell N. Several similar vibro-impact systems. *J Sound Vib,* 1987, 113: 17～28

135 Lee C H, Byrne K. Impact statistics for a simple random rattling system. *J Sound Vib,* 1987, 119: 529～543

136 Whiston G S. The vibro-impact response of a harmonically excited and preloaded one -dimensional linear oscillator. *J Sound Vib,* 1987, 115: 303～319

137 Whiston G S. Global dynamics of a vibro-impacting linear oscillator. *J Sound and Vib,* 1987, 118 (3): 395～429

138 Smith C E, Liu P P. Coefficients of resultation. *ASME Appl. Mech,* 1992, 59: 663～669

139 Dubowsky S, Freudenstein F. Dynamic analysis of mechanical systems with clearances, part 1, formulation of dynamic model. *ASME Eng Ind,* 1971, 93: 305～309

140 Dubowskey S, Freudenstein F. Dynamic analysis of mechanical systems with clearance, part2: dynamic response. *ASME Eng Ind,* 1971, 93: 310～316.

141 Veluswami M A, Crossley F R E. Multiple impacts of a ball between two plates, part1: some experiments observations. *ASME Eng Ind,* 1975, 97: 820～827

142 Veluswami M A, Crossley F R E. Multiple impact of a ball between two plates, part2: mathematical modeling. *ASME Eng Ind,* 1975, 97: 828～835

143 Shaw S W, Holmes P J. A periodically forced piecewise linear oscillator. *J Sound Vib,* 1983, 90: 129～155

144 Tomlinson G R, Lam J. Frequency response characteristics of structure with single and multiple clearance type nonlinearities. *J Sound Vib,* 1984, 96: 111～125

145 Hunt K H, Crossley F R E. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *ASME Eng Ind,* 1975, 42: 440～445

146 Comparin R J, Singh R. Non-linear frequency response characteristics of an impact pair. *J Sound Vib,* 1989, 134: 259～290

147 Munro R G. The dynamic behavior of spur gears. Ph D Dissertation, Cambridge University, 1962

148 Kubo A, Yamada K, Aida T, Sato S. Research on ultra high speed gear devices (reports 1-3). *Trans JSME,* 1972, 38: 2692～2715

149 Umezawa K, Sata T, Ishikawa J. Simulation of rotational vibration of spur gears. *Bull JSME,* 1984, 38: 102～109

150 Hayashi T, Nishi N, Ohno T, Crossley F R E. Multipe impacts of a cylinder between two planes and of the meshing teeth of a pair of gears. In: Pro. of the Fourth World Congress on Theory of Mechanics and Mechanisms, 1979. 350～353

151 Ozguven H N, Houser D R. Dynamic analysis of high speed gears by using loaded ststic transmission error. *J Sound Vib,* 1988, 125: 71～83

152 Galhoud L E, Masri S F, Anderson J C. Transfer function of a class of nonlinear multidegree of freedom oscillator. *ASME Appl Mech,* 1987, 54: 215～225

153 Winter H, Kojima M. A study on the dynamics of geared system——estimation of overload on gears in system. In: Proc Inter symposium Gearing & Power Trams, Tokyo, c-12, 1981

154 Comparin R J, Singh R. Frequency response characteristics of a multi-degree- of freedom system with clearances. *J Sound Vib,* 1990, 142(1): 101～124

155 Gelb A, Vander Velde W E. Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design. New York: McGraw-Hill, 1968

156 Padmanabhan C, Singh R. Spectral coupling issues in a two-degree-of freedom system with clearance non-linearities. *J Sound Vib,* 1992, 155 (2): 209～230

157 Comparin R J. A study of the frequency response of impact pairs with application to automative gear rattle. [Ph D Dissertation]: The Ohio State University, 1988

158 Comparin R J, Singh R. An analytical study of automobile neutral gear rattle. *ASME Mech Des,* 1990, 112: 237～245

159 Johnson O, Hirami N. Diagnosis and objective evaluation of gear rattle. SAE 911082, 1991

160 Sakai T, Doi Y, Yamatommo K, Ogasawara T, Narita M. Theoretical and experimental analysis of rattling noise of automotive gearbox. SAE Paper 810773, 1982
161 Ohnuma S, Shigetaro Y, Mineichi I, Fujimoto T. Research on the idling rattle of manual transmission. SAE Paper. 850979, 1985
162 Karagiannis K, Pfeiffer F. Theoretical and experimental investigations of gear-rattling. *Nonlinear Dynamics,* 1991, 2: 367～387
163 Pfeiffer F, Kunert A. Rattling models of deterministic to stochastic processes. *Nonlinear Dynamics,* 1990, 1: 63～74
164 Kataoka M, Ohno S, Sugimoto T. Forced torsional vibration of a two-degree-of-freedom system including a clearance and two-step-hardening spring. *JSME Int J Series III,* 1991, 34: 345-354
165 Theissen J. The effects of backlash on the dynamic load in gear transmission. *Gear,* 1991, 9 (in Chinese)
166 Ozguven H N. Further work on DYTEM computer code. Research Report, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1989
167 Gregory R W, Harris S L, Munro R G.. Dynamic behavior of spur gears. *Proc Inst Mech Eng*, 1963, 178: 207～226
168 Retting H. Zahnkrafte und schwingungen in stirnradgetrieben. *Konstroruktion,* 1965, 17: 41～53
169 Terauchi Y, Hidaka T, Nagashima M. Dynamic loads on spur gear teeth. *Trans JSME,* 1967, 33: 456～472
170 Sato K, Kamada O, Takatsu N. Jump phenomena in geared system to random excitation. *Bull JSME,* 1979, 28: 1271～1278
171 Sato K, Yamamoto S, Kawakami T. Bifurcation sets and chaotic states of a geared system subjected to harmonic excitation. *Computational Mechanics,* 1991, 7: 173～182
172 Ozguven H N. A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gear including shaft and bearing dynamics. *J Sound Vib,* 1991, 145 (2): 239～260
173 Kim Y B, Noah S T. Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise-linear characteristics: a general approach. *ASME Appl Mech,* 1991, 58: 545～553
174 Padmanabhan C, Singh R. Analysis of periodically forced nonlinear Hill's oscillator with application to a geared system. *J Acoust Soc Am,* 1996, 99 (1): 324～334
175 Wong C W, Zhang W S, Lau S L. Periodic forced vibration of unsymmetric piecewise-linear system by incremental harmonic balance method. *J Sound Vib,* 1991, 149: 91～105
176 Lau S L, Zhang W S. Non-linear vibrations of piecewise linear systems by incremental harmonic balance method. *ASME Appl Mech,* 1992, 59: 153～160
177 Chen C S, Natsiavas S, Nelson H D. Coupled lateral-torsional vibration of a gear-pair system supported by a squeeze film damper. *ASME Vib Acous,* 1998, 120: 860～867
178 Shiau T N, Rao J S, Chang J R, Choi S T. Dynamic behavior of geared rotors. *ASME Eng Gas Turbines Power* 1999, 121: 494～503
179 Mitchell L D, David J W. Proposed solution methodology for the dynamical coupled, nonlinear geared rotor mechanics equation. *ASME Vibr Stress Reli Des,* 1985, 107: 112～116
180 David J W. Dynamic coupling in geared rotor systems. ASME Paper 85- DET-11, 1985
181 Lin R M. Chaotic vibration of mechanical system with backlash. *Mechanical Systems and Signal Processing,* 1993, 7(3): 257～272
182 Liaw C Y, Koh C G. Dynamical stability and chaos of system with piecewise linear stiffness. *ASCE J of Engineering Mechanics*, 1993, 119(8): 1542～1557

RESEARCH ADVANCES FOR NONLINEAR VIBRATION OF GEAR TRANSMISSION SYSTEMS*

WANG Jianjun[1,†] LI Qihan[1] LI Runfang[2]

[1] Dept of Jet Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics Beijing 100083, China

[2] Chongqing University, Chongqing 400044, China

Abstract In this paper, the progress in nonlinear dynamics of gear driven systems in the past twenty years is discussed, especially the gear dynamic behavior with consideration of the backlash and time-varying mesh stiffness of tooth. The basic concepts, the mathematical models and the solution methods for the non-linear dynamics of geared systems are then reviewed. The critical issues in the further research on the nonlinear vibration in gear transmission systems are also discussed.

Keywords gear driven system, parametric vibration, nonlinear gear vibration with backlash

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10172014)

† E-mail: wangjjb@263.net