第 34 卷 第 4 期 力 学 进 展 Vol. 34 No. 4
2004 年 11 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Nov. 25, 2004

非线性有限元分析的非协调模式及存在的问题

王金彦 陈 军 李明辉
上海交通大学国家模具 CAD 工程研究中心，上海 200030

摘 要 利用非协调模式提高非线性有限元分析广泛采用的低阶单元的精度和性能，是国际计算力学界研究的热点和难点. 阐述了国际上在非线性有限元分析中已广泛采用的增广假设应变法方法 (the enhanced assumed strain, EAS) 的基本原理，详细讨论了非协调模式用于非线性有限元分析保证收敛、稳定的条件及增广假设应变场插值函数的构造方法. 介绍了国内学者关于几何非线性非协调模式的研究方法和研究成果：(1) 从 Hellinger-Reissner 广义变分原理出发，提出了几何非线性非协调模式的收敛条件，并采用非线性计算的若干简化措施建立几何非线性非协调元的简化模型；(2) 一类放松单元间协调要求的非线性广义变分原理，对几何非线性问题可以选择事先无协调约束的非协调函数建立非协调元，收敛性可以保证，并根据此非线性广义变分原理可建立 C^1 或 C^0 类几何非线性广义杂交元，C^1 或 C^0 类精化杂交元和精化直接刚度法. 指出了 EAS 方法用于非线性有限元分析存在的问题，即本构关系和求解方法的限制，并对非协调元应用于非线性有限元分析提出了展望.

关键词 非线性，非协调，EAS，收敛性，有限元

1 引 言

非协调元是在单元的位移场上附加非协调项，一般能提高单元的位移插值完备阶次，因而可以提高单元的计算精度. 但为了保证单元的收敛性，非协调元需通过分片试验. 最初的非协调元是基于位移场提出的，现在已发展为可以基于应变场或其它途径来构造.

在有限元法中，非协调元的研究成果在提高精度和改善单元性能方面令人瞩目. 它不仅可以克服构造 C^1 类协调元的困难，还可以改进 C^0 或 C^1 协调元的单元精度和性能. 目前非协调元在线性领域的应用已获得很大的成功，一个生成非协调元形函数的一般公式是由吴长春教授等建立的 [1,2]，并首先为 Wilson, Taylor, Simo 等引用和介绍；已经发展了不同的非协调元方法用于建立高品质的单元，包括基于位移模式的 Q6 元及 QM6 元 [3,4]，用于轴对称问题高精度的非协调元 [5]，基于各种杂交模式的非协调元 [6,7] 等.

非协调元在非线性领域的应用由于受到各种因素的制约，远没有在线性领域的应用成熟，但已成为国际计算力学界研究的热点. 20 世纪 90 年代初，J. C. Simo 等基于 Hu-Washizu 广义变分原理，发表了一系列论文 [8~10]，提出了所谓的 EAS 方法，奠定了 EAS 方法用于非线性有限元分析的理论基础. 文献 [8] 针对小变形问题，从 Hu-Washizu 三场变分原理出发，假设应变场为取决于位移的应变场附加一个独立假设的增广应变场 (非协调应变场)，假设应力场在积分意义下正交于附加增广应变场，从而使三场能量泛函退化为二场形式. 在这篇论文中，Simo 等系统地提出了非协调模式用于小变形分析保证稳定性及收敛性的 3 个条件，并把早期 Wilson 基于位移模式的非协调元 Q6 元及 Taylor 提出的非协调元 QM6 元看作 EAS 方法的特例，解释了 Wilson 非协调元用于不规则网格不收敛的原因. 文 [9] 可以看作文 [8] 在几何非线性问题上的推广，运用变形梯度的乘子分解，假设位移梯度场为取决于位移的梯度场附加一个独立假设的增广位移梯度场，第 I 类 Piola-Kirchhoff 应力场在积分意义下正交于此增广位移梯度场，从而使 Hu-Washizu 三场能量泛函退化为二场形式. 类似于小变形问题，文 [9] 给出了保证单元稳定性及收敛性的 3 个条件. 为便于将大变形分析的 EAS 方法应

收稿日期：2003-09-02，修回日期：2004-06-22

用于工程实际，Büchter 和 Ramm 提出了另外一种形式的变分基础 [11], 他们应用的是将 Green-Lagrange 应变张量分解为协调及增广部分，假设应力为第 II 类 Piola-Kirchhoff 应力. 在此基础上，各国科学家共同努力构造了广泛应用于工程结构分析和金属成形分析的新型壳单元模型 [12~17](如固壳元、 7 参数壳元) 和三维实体单元模型 [18].

吴长春教授等在 20 世纪 90 年代初从二场形式的 Hellinger-Reissner 广义变分原理出发，提出了几何非线性非协调模式的收敛条件 [19], 但在实际应用中要满足此条件是很困难的. 为建立有实用价值的单元模型，他们在前期工作的基础上提出了非线性计算的若干简化措施，给出了线性化的分片试验条件并以平面问题为例讨论了几何非线性非协调元的简化模型 [20]. 他们还进一步研究了 Mindlin 板几何非线性分析的非协调元 [21] 及材料发生塑性变形需满足不可压缩条件的非协调元 [22]. 陈万吉教授在 20 世纪 90 年代中期提出了放松单元间协调要求的非线性广义变分原理，可以建立 C^0 或 C^1 类几何非线性非协调模式，并能保证单元收敛性 [23]. 在此基础上他们进一步研究了几何非线性非协调广义杂交及精化杂交平面四节点单元 [24], 基于非协调模式的几何非线性广义杂交退化壳单元 [25], 几何非线性非协调圆柱壳单元 [26]. 总之，非协调模式在非线性有限元分析中的应用越来越受到重视, 无论从理论上还是从实践上都已发展到一定水平.

2 EAS 方法的理论基础

2.1 小变形问题

2.1.1 小变形问题的变分基础

Simo 等针对小变形材料非线性问题，给出了 EAS 方法的变分基础 [8]

$$\Pi(\boldsymbol{u},\varepsilon,\boldsymbol{\sigma}) = \int_B W_s(\varepsilon)\mathrm{d}V - \int_B \rho\boldsymbol{b}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V + \int_B \boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla^s\boldsymbol{u}-\varepsilon)\mathrm{d}V - \int_{\partial B_\sigma}\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}A \tag{1}$$

这里 $\varepsilon,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma}$ 分别为求解域内独立插值的应变场、位移场及应力场， W_s 为应变能， $\boldsymbol{b}^*,\boldsymbol{t}^*$ 分别为给定的体积力、边界力， ρ 为质量密度， $\nabla^s\boldsymbol{u}$ 为位移梯度的对称部分.

将 ε 分解为由位移决定的协调部分及独立假设的增广部分

$$\varepsilon = \nabla^s\boldsymbol{u} + \tilde{\varepsilon} \tag{2}$$

将式 (2) 代入式 (1) 得

$$\Pi(\boldsymbol{u},\tilde{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}) = \int_B [W_s(\nabla^s\boldsymbol{u}+\tilde{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\varepsilon}]\mathrm{d}V - \int_B \rho\boldsymbol{b}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V - \int_{\partial B_\sigma}\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}A \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\delta\Pi(\boldsymbol{u},\tilde{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}) &= \int_B\left[\left(\frac{\partial W_s}{\partial\varepsilon}\delta\nabla^s\boldsymbol{u} + \frac{\partial W_s}{\partial\varepsilon}\delta\tilde{\varepsilon}\right) - \left(\delta\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\tilde{\varepsilon}\right)\right]\mathrm{d}V - \int_B\rho\boldsymbol{b}^*\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}V - \\ &\int_{\partial B_\sigma}\boldsymbol{t}^*\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}A = \int_B\frac{\partial W_s}{\partial\varepsilon}\nabla^s(\delta\boldsymbol{u})\mathrm{d}V - \int_B\rho\boldsymbol{b}^*\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}V - \int_{\partial B_\sigma}\boldsymbol{t}^*\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}A + \\ &\int_B\left(\frac{\partial W_s}{\partial\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}\right)\delta\tilde{\varepsilon}\mathrm{d}V - \int_B\delta\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\varepsilon}\mathrm{d}V = 0\end{aligned}$$

于是可得下列变分方程

$$\left.\begin{aligned}&\int_B\frac{\partial W_s}{\partial\varepsilon}\nabla^s(\delta\boldsymbol{u})\mathrm{d}V - \int_B\rho\boldsymbol{b}^*\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}V - \int_{\partial B_\sigma}\boldsymbol{t}^*\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}A = 0\\ &\int_B\delta\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\varepsilon}\mathrm{d}V = 0\\ &\int_B\left(\frac{\partial W_s}{\partial\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}\right)\delta\tilde{\varepsilon}\mathrm{d}V = 0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由式 (4) 可得到在域 B 内满足的标准平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{div}\left[\frac{\partial W_s}{\partial\varepsilon}\right] + \rho\boldsymbol{b}^* = 0\\ &\tilde{\varepsilon} = 0\\ &\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W_s}{\partial\varepsilon}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

及力边界条件

$$\frac{\partial W_s}{\partial\varepsilon}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}^* \quad \text{on} \quad \partial B_\sigma \tag{6}$$

虽然对连续体满足条件 $\tilde{\varepsilon}=0$, 但当引入有限元离散化时，一般情况下 $\tilde{\varepsilon}^h \neq 0$, 且不必强调单元间连续性要求.

2.1.2 小变形问题的 3 个条件

对泛函 (3) 表达式进行有限元离散化, 为保证单元的稳定性及收敛性要求， Simo 等提出了 3 个条件：

(1) 稳定性条件：独立假设的增广应变场 $\tilde{\varepsilon}^h$ 和由位移决定的标准应变场 $\nabla^s\boldsymbol{u}^h$ 是相互独立的，即

$$\tilde{\varepsilon}^h \cap \nabla^s\boldsymbol{u}^h = \varnothing \tag{7}$$

此外，设 $\tilde{\varepsilon}_e = \boldsymbol{G}(\xi)\boldsymbol{\alpha}_e$, 则 $\boldsymbol{G}(\xi)$ 的各列是线性独立的.

(2) 变分一致性条件 (正交条件): 在单元域适当选择应力场满足下列条件

$$\int_{B_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon} \mathrm{d}V = 0 \tag{8}$$

(3) 常应力条件：单元域的应力场至少包含分片常应力试函数.

事实上，对线弹性问题条件 (1) 和 (3) 就是满足泰勒意义上分片试验的条件, 保证单元的收敛性. 满足上述 3 个条件后，可按照离散意义上的泛函表达式 (3) 构造有限元方程

$$\tilde{\Pi}(\boldsymbol{u}_h, \tilde{\varepsilon}_h) = \int_B W_s(\nabla^s \boldsymbol{u}_h + \tilde{\varepsilon}_h)\mathrm{d}V - \int_B \rho \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{u}_h \mathrm{d}V - \int_{\partial B_\sigma} \boldsymbol{t}^* \cdot \boldsymbol{u}_h \mathrm{d}A \tag{9}$$

2.1.3 增广应变场的构造

EAS 方法一个很重要的步骤是增广应变场 $\tilde{\varepsilon}$ 的构造，构造增广应变场的插值函数 $\boldsymbol{G}(\xi)$ 应满足上述 3 个条件. 我们首先从参数域而不是物理域出发，然后通过参数域向物理域的变换构造此插值函数.

定义参数域向物理域的变换

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\xi) \\ &\boldsymbol{J}(\xi) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{\partial \xi} \\ &j(\xi) = \det[\boldsymbol{J}(\xi)] \end{aligned} \tag{10}$$

$\boldsymbol{J}(\xi)$, $j(\xi)$ 分别为此变换的 Jacobian 矩阵及行列式值，其常量值可通过在 $\xi = 0$ 点计算来定义

$$\boldsymbol{J}_0 = \boldsymbol{J}(\xi)|_{\xi=0}, \quad j_0 = j(\xi)|_{\xi=0} \tag{11}$$

相应于物理域的应力及增广应变场 $(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\varepsilon})$, 参数域的应力及增广应变场表示为 $(\boldsymbol{\Sigma}, \tilde{\boldsymbol{E}})$.

(1) 变换准则

参数域和物理域的应力、应变变换可用下列准则表示

$$\begin{aligned} &\Sigma_{AB} = (J_0)^{-1}_{Ai} \sigma_{ij} (J_0^{-1})_{Bj} \\ &\tilde{E}_{AB} = \frac{j}{j_0} J_{0iA} \tilde{\varepsilon}_{ij} J_{0jB} \end{aligned} \tag{12}$$

上式为张量表示, 可转换成有限元法常用的矩阵表示

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Sigma}(\xi) = \boldsymbol{F}_0^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\xi) \\ &\tilde{\boldsymbol{E}}(\xi) = \frac{j(\xi)}{j_0} \boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}} \tilde{\varepsilon}(\xi) \end{aligned} \tag{13}$$

这里 $\boldsymbol{F}_0$ 是一个 $m \times m$ 阶矩阵， $m = n(n+1)/2$, n 为求解空间的维数. 对于平面问题， $n = 2$, $m = 3$

$$\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{21}J_{12} & 2J_{11}J_{12} \\ J_{12}J_{21} & J_{22}^2 & 2J_{21}J_{22} \\ J_{11}J_{21} & J_{11}J_{22} & (J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21}) \end{bmatrix}_{\xi=0} \tag{14}$$

(2) 增广应变插值函数 $\boldsymbol{G}(\xi)$ 的构造

首先在参数域定义增广应变场的插值函数

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_e = \boldsymbol{E}(\xi)\boldsymbol{\alpha}_e \tag{15}$$

由式 (13) 可获得物理域增广应变场的插值函数

$$\boldsymbol{G}(\xi) = \frac{j_0}{j(\xi)} \boldsymbol{F}_0^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{E}(\xi) \tag{16}$$

为使单元通过分片试验从而保证单元的收敛性, 应满足下列条件

$$\int_{\square} \boldsymbol{E}(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \tag{17}$$

这里 □ 表示参数定义域，故正交条件在这里表示为以下形式

$$\int_{B_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon} \mathrm{d}V = \int_{\square} \frac{j_0}{j(\xi)} \boldsymbol{F}_0^{-\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{E}}(\xi) \boldsymbol{F}_0 \boldsymbol{\Sigma}(\xi) j(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{\square} \tilde{\boldsymbol{E}}(\xi) \boldsymbol{\Sigma}(\xi) \mathrm{d}\xi = 0 \tag{18}$$

必须认识到，由式 (16) 获得的物理域增广应变插值函数自动满足坐标不变性, 这是一个很重要的性质. 通常先根据 $\boldsymbol{\Sigma}(\xi)$ 的插值形式定义应力场插值空间，然后由式 (17) 、式 (18) 定义 $\boldsymbol{E}(\xi)$. 应变场 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 也可以由不协调位移场直接导出，设 $\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi)$ 表示定义在物理空间的不协调位移场，则

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi)}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi)}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{\partial \xi_\beta}\right] \tag{19}$$

2.2 几何非线性问题

2.2.1 几何非线性问题的变分基础

几何非线性问题的 EAS 方法 [9] 可看作小变形 EAS 方法的推广. 这里先给出几个定义： B 表示变形体的参考构形， Γ_u, Γ_t 分别表示其位移边界及力边界， $\partial B = \overline{\Gamma_u \cup \Gamma_t}$ 且 $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \varnothing$, $\boldsymbol{X}$ 表示参考点的物质坐标， $\boldsymbol{x}$ 表示参考点的空间坐标，则

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) \\ &D\boldsymbol{\varphi} = 1 + \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

变形梯度 $\boldsymbol{F} = \partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ 为右柯西 - 格林变形张量，位移梯度 $\boldsymbol{H}_u = \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{u} = \partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{X}$, 应

变能函数 $W(\boldsymbol{X},\boldsymbol{F})=\hat{W}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})$. Simo 等从 Hu-Washizu 广义变分原理出发给出了几何非线性 EAS 方法的变分基础

$$\begin{aligned}\varPi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{H},\boldsymbol{P})=&\int_B[\hat{W}(\boldsymbol{X},[\mathbf{1}+\boldsymbol{H}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{1}+\boldsymbol{H}])+\\&\boldsymbol{P}\cdot(\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{H})]\mathrm{d}V-\\&\int_B\rho_0\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V-\int_{\varGamma_t}\overline{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\varGamma\end{aligned}\tag{20}$$

这里 $\boldsymbol{u}$ 为独立假设的位移场，$\boldsymbol{H}$ 为独立假设的位移梯度场，$\boldsymbol{P}$ 为独立假设的第 I 类 Piola-Kirchhoff 应力场，$\boldsymbol{B}^*,\overline{\boldsymbol{T}}$ 分别为给定的体积力及边界力，ρ_0 为质量密度. 将独立假设的位移梯度场 $\boldsymbol{H}$ 分解为由位移决定的位移梯度场 $\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}$ 和独立假设的增广位移梯度场，即

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}+\tilde{\boldsymbol{H}}\tag{21}$$

对变形梯度

$$\boldsymbol{F}=\mathbf{1}+\boldsymbol{H}=\mathbf{1}+\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}+\tilde{\boldsymbol{H}}\tag{22}$$

又

$$\begin{aligned}&D\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{1}+\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}\\&\boldsymbol{F}=D\boldsymbol{\varphi}+\tilde{\boldsymbol{H}}=[\mathbf{1}+\tilde{\boldsymbol{H}}(D\boldsymbol{\varphi})^{-1}]D\boldsymbol{\varphi}=\\&\quad[\mathbf{1}+\tilde{\boldsymbol{h}}]D\boldsymbol{\varphi}=\tilde{\boldsymbol{f}}D\boldsymbol{\varphi}\end{aligned}\tag{23}$$

这里：$\tilde{\boldsymbol{h}}=\tilde{\boldsymbol{H}}(D\boldsymbol{\varphi})^{-1}$, $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})=\mathbf{1}+\tilde{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x})$, 式 (23) 可看作变形梯度的乘子分解，$\tilde{\boldsymbol{f}}$ 为增广部分，$D\boldsymbol{\varphi}$ 为协调部分. 将式 (21) 代入式 (20), 可得如下形式的泛函表达式

$$\tilde{\varPi}(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{P})=\varPi(\boldsymbol{u},\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}+\tilde{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{P})\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\varPi}=&\int_B[\mathrm{Grad}\,(\delta\boldsymbol{u})\cdot(2\boldsymbol{F}\partial_{\boldsymbol{C}}\hat{W})-\delta\boldsymbol{P}\cdot\tilde{\boldsymbol{H}}+\\&\delta\tilde{\boldsymbol{H}}\cdot(-\boldsymbol{P}+[2\boldsymbol{F}\partial_{\boldsymbol{C}}\hat{W}])]\mathrm{d}V-\varPi_{\mathrm{ext}}(\delta\boldsymbol{u})=0\end{aligned}\tag{25a}$$

可得如下形式的变分方程

$$\begin{aligned}&\int_B\mathrm{Grad}\,(\delta\boldsymbol{u})\cdot[2\boldsymbol{F}\partial_{\boldsymbol{C}}\hat{W}]\mathrm{d}V-\varPi_{\mathrm{ext}}(\delta\boldsymbol{u})=0\\&\int_B\delta\tilde{\boldsymbol{H}}(-\boldsymbol{P}+[2\boldsymbol{F}\partial_{\boldsymbol{C}}\hat{W}])\mathrm{d}V=0\\&\int_B\delta\boldsymbol{P}\cdot\tilde{\boldsymbol{H}}\mathrm{d}V=0\end{aligned}\tag{25b}$$

相应的 Euler-Lagrange 方程可写成如下形式

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\,[2\boldsymbol{F}\partial_{\boldsymbol{C}}\hat{W}]+\rho_0\boldsymbol{B}^*=0\\&\hat{\boldsymbol{H}}=0\\&\mathrm{skew}\ \ [\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}]=0\\&\mathrm{sym}\,[\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}]-2\boldsymbol{F}\partial_{\boldsymbol{C}}\hat{W}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=0\end{aligned}\tag{26}$$

及边界条件

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N}=\overline{\boldsymbol{T}}\quad\text{on}\quad\varGamma_t\tag{27}$$

这里 skew, sym 分别表示其反对称、对称部分.

2.2.2 几何非线性问题的 3 个条件

对泛函表达式 (24) 进行有限元离散化，为保证单元的稳定性及收敛性要求，需要满足以下 3 个条件：

(1) 稳定性条件：独立假设的增广位移梯度场和由位移决定的位移梯度场是相互独立的，即满足条件：

$$\tilde{\boldsymbol{H}}^h\cap\mathrm{Grad}\,[\boldsymbol{u}^h]=\varnothing\tag{28}$$

此外设 $\tilde{\boldsymbol{H}}_e=\boldsymbol{G}_e(\xi)\boldsymbol{\alpha}_e$, 则 $\boldsymbol{G}_e(\xi)$ 各列线性独立. 满足此条件可以避免出现多余零能模式, 从而保证计算稳定性.

(2) 变分一致性条件 (正交条件): 在单元域适当选择应力场满足条件

$$\int_{B_e}\boldsymbol{P}_e(\xi)\tilde{\boldsymbol{H}}_e(\xi)\mathrm{d}V=0\tag{29}$$

即满足条件：$\displaystyle\int_{B_e}\boldsymbol{P}_e(\xi)\boldsymbol{G}_e(\xi)\mathrm{d}V=0.$

(3) 常应力条件：应力场空间至少包含分片常量应力试函数. 对于线性理论，这个条件就是泰勒意义上的传统分片试验条件

$$\int_{B_e}\boldsymbol{G}_e(\xi)\mathrm{d}V=0\tag{30}$$

式 (30) 也可以认为是适用于非线性问题的分片试验条件.

2.2.3 增广位移梯度插值函数的构造

定义 $\boldsymbol{J}_0(\xi)$ 为参数空间向初始构形变换的 Jacobian 矩阵，$j_0(\xi)=\det[\boldsymbol{J}_0(\xi)]$, $\overline{\boldsymbol{J}}_0$ 为 $\boldsymbol{J}_0(\xi)$ 在单元中心点计算得到的常量矩阵，$\overline{j}_0=\det[\overline{\boldsymbol{J}}_0]$, 则

$$\boldsymbol{G}_e(\xi)=\frac{\overline{j}_0}{j_0(\xi)}\overline{\boldsymbol{J}}_0^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(\xi)\tag{31}$$

$\boldsymbol{G}_e(\xi)$ 的各列表示为

$$\boldsymbol{G}_e^I(\xi)=\overline{\mathrm{Grad}\,_{\boldsymbol{X}}}\tilde{N}^I=\frac{\overline{j}_0}{j_0(\xi)}\overline{\boldsymbol{J}}_0^{-\mathrm{T}}\mathrm{Grad}\,_{\xi}\tilde{N}^I\tag{32}$$

其中 $\tilde{N}^I$ 为不协调位移插值函数.

可采用满足上述 3 个条件离散形式的泛函 (24) 构造有限元方程

$$\tilde{\Pi}(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{H}})=\int_B \hat{W}(\boldsymbol{X},[\boldsymbol{1}+\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}+\tilde{\boldsymbol{H}}]^{\mathrm{T}}\cdot [\boldsymbol{1}+\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}+\tilde{\boldsymbol{H}}])\mathrm{d}V- \int_B \rho_0\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V-\int_{\Gamma_t}\overline{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Gamma \tag{33}$$

为使离散梯度算子具有稀疏性从而适合大规模计算， Simo 等在离散点上施加条件 $\mathrm{skew}\,(\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})=0$, 引入参数变换, 并在计算过程中实施, 取得了较好的效果.

2.3 EAS 方法用于几何非线性分析的另外形式

为便于将大变形分析的 EAS 方法应用于工程实际， Büchter 和 Ramm 提出了另外一种形式的变分基础 [11]

$$\Pi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E},\boldsymbol{S})=\int_B W_s(\boldsymbol{E})\mathrm{d}V-\int_B\rho\boldsymbol{b}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V+ \int_B\boldsymbol{S}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{g})-\boldsymbol{E}\right]\mathrm{d}V-\int_{\partial B_\sigma}\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}A \tag{34}$$

这里 $\boldsymbol{u}$ 表示独立假设的位移场， $\boldsymbol{E}$ 表示独立假设的 Green-Lagrange 应变， $\boldsymbol{S}$ 表示独立假设的第 II 类 Piola-Kirchhoff 应力. 不同于 Simo 的理论, 将 Green-Lagrange 应变 $\boldsymbol{E}$ 分解为取决于位移的部分 $\boldsymbol{E}^u$ 和独立假设的增广部分 $\tilde{\boldsymbol{E}}$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^u+\tilde{\boldsymbol{E}},\quad \boldsymbol{E}^u=\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{g}) \tag{35}$$

$$\delta\boldsymbol{E}=\delta\boldsymbol{E}^u+\delta\tilde{\boldsymbol{E}},\quad \delta\boldsymbol{E}^u=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{Grad}\,\delta\boldsymbol{u} \tag{36}$$

将式 (35) 代入式 (34) 得

$$\tilde{\Pi}(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{E}},\boldsymbol{S})=\int_B W_s(\boldsymbol{E}^u+\tilde{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}V-\int_B\rho\boldsymbol{b}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V- \int_B\boldsymbol{S}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}V-\int_{\partial B_\sigma}\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}A \tag{37}$$

$$\delta\tilde{\Pi}(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{E}},\boldsymbol{S})=\int_B\left[\frac{\partial W_s}{\partial\boldsymbol{E}}\cdot\delta\boldsymbol{E}^u+\frac{\partial W_s}{\partial\boldsymbol{E}}\cdot\delta\tilde{\boldsymbol{E}}\right]\mathrm{d}V- \int_B\rho\boldsymbol{b}^*\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}V-\int_B\big[\delta\boldsymbol{S}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}+ \boldsymbol{S}\cdot\delta\tilde{\boldsymbol{E}}\big]\mathrm{d}V-\int_{\partial B_\sigma}\boldsymbol{t}^*\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}A$$

由此可得域内加权 Euler 方程

$$\begin{aligned}&\int_B\delta\boldsymbol{u}\cdot\left[\mathrm{Div}\left(\boldsymbol{F}\frac{\partial W_s}{\partial\boldsymbol{E}}\right)+\rho\boldsymbol{b}^*\right]\mathrm{d}V=0\\ &\int_B\delta\boldsymbol{S}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}V=0\\ &\int_B\delta\tilde{\boldsymbol{E}}\cdot\left[\frac{\partial W_s}{\partial\boldsymbol{E}}-\boldsymbol{S}\right]\mathrm{d}V=0\end{aligned} \tag{38}$$

对式 (37) 可进行有限元离散化，为保证单元的稳定性及收敛性, 同样需要满足和上述类似的 3 个条件. 构造独立假设的增广应变场时, 必须独立于线性化的由位移决定的 Green- Lagrange 应变；也可由不协调位移场直接导出. 可按照满足上述 3 个条件的离散化的泛函表达式 (37) 构造有限元方程

$$\tilde{\Pi}(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{E}})=\int_B W_s(\boldsymbol{E}^u+\tilde{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}V-\int_B\rho\boldsymbol{b}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V- \int_{\partial B_\sigma}\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}A \tag{39}$$

在板料成形、汽车碰撞及其它工程实际问题中，在某些情况下，例如板料成形分析中的模具小园角处，应力、应变状态特别复杂，板料厚度方向的应力、应变必须予以考虑，特别是用于板料成形的回弹分析. 由于传统壳体理论的限制，无论是基于 Kirchhoff 壳体理论的壳单元还是退化壳单元，都不可能在此处合理地描述板料的实际应力、应变状态. 最近几年，国际计算力学界普遍关注两种新型有限元模型：一是 Parish 、 Hauptman 和 Miehe 提出的所谓固壳单元 [12~14]；另一是 Büchter 、 Sansour 和 Braun 等提出的所谓 7 参数壳单元 [15~17]. 两种壳单元均采用修正的 Reissner-Mindlin 壳体理论，考虑了壳体厚度方向的应力、应变. 构造这两种壳单元模型都要遇到各种各样的自锁问题，如体积自锁，薄膜自锁，厚向泊松自锁，而消除这些自锁现象国际上最普遍采用的方法是适用于几何非线性问题的 EAS 方法. 美国 Lawrence Livermore 国家实验室的 Puso 也是采用大变形分析的 EAS 方法构造了适用于板壳结构分析的三维实体单元模型 [18].

3 国内学者关于几何非线性非协调模式的研究方法

吴长春教授等在 20 世纪 90 年代初从非线性弹性力学的 Hellinger-Reissner 原理的离散形式出发，给出了非协调元用于几何非线性分析的分片试验条件 [19]. 如果位移边界条件已满足，一离散系统的能量泛函可表示为

$$\Pi_R=\sum\Pi_R^e=$$

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{m,i}u_{m,j})\sigma_{ij} - B(\sigma_{ij}) \right] \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma^e} \overline{T}_i u_i \mathrm{d}S \right\} \tag{40}$$

式中单元余能函数 $B(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}S_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$, σ_{ij} 为第 II 类 Piola-Kirchhoff 应力张量，V_e 表示单元体积，$\overline{T}_i$ 为单元表面已知力. 式 (40) 中位移试解 u_i 对系统全域应当是 C^0 协调的，当 u_i 为 C^0 不协调时，先略去单元之间位移间断性影响，直接定义能量泛函

$$\Pi = \sum_e \left\{ \int_{V_e} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{m,i}u_{m,j})\sigma_{ij} - B(\sigma_{ij}) \right] \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma^e} \overline{T}_i u_i^q \mathrm{d}S \right\} \tag{41}$$

其中 u_i^q 为 u_i 的协调部分，直接由单元节点位移插值得到. 令

$$u_i = u_i^q + u_i^\lambda \tag{42}$$

u_i^λ 为 u_i 的非协调部分，且 u_i^q 与 u_i^λ 线性独立. 将式 (42) 代入式 (41), 经过一系列推导可得

$$\delta\Pi = \sum_e \int_{V_e} \left\{ \left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{m,i}u_{m,j}) - S_{ijkl}\sigma_{kl} \right] \delta\sigma_{ij} - [\sigma_{ij}(\delta_{mj}+u_{m,j})]_{,i} \cdot (\delta u_m^q + \delta u_m^\lambda) \right\} \mathrm{d}V + \sum_{ab} \int_{S_{ab}} (T_i^{(a)} + T_i^{(b)}) \cdot \delta u_i^q \mathrm{d}S + \sum_e \int_{S_\sigma^e} (T_i - \overline{T}_i)\delta u_i^q \mathrm{d}S + \sum_e \oint_{\partial V_e} T_i \delta u_i^\lambda \mathrm{d}S \tag{43}$$

这里 $\partial V_e = S_\sigma^e \cup S_u^e \cup S_{ab}^e$, S_σ^e 为单元力边界，S_u^e 为单元位移边界，S_{ab}^e 为相邻单元之间的交界. 由驻值条件 $\delta\Pi=0$ 可得 V_e 内和 S_{ab} 上的平衡方程，$u_i-\sigma_{ij}$ 关系和 S_σ^e 上的力边界条件 $T_i=\overline{T}_i$, 此外还得到另一类条件

$$\sum_e \oint_{\partial V_e} T_i \delta u_i^\lambda \mathrm{d}S \equiv \sum_e \oint_{\partial V_e} n_j \sigma_{mj} \cdot (\delta_{im}+u_{i,m})\delta u_i^\lambda \mathrm{d}S = 0 \tag{44}$$

式 (44) 称之为具有非协调位移的多变量有限元能量相容条件 [19]. 如果只考虑离散解的收敛性问题，上述能量相容条件可简化为另一种形式，可作为离散解的收敛准则

$$\sum_e \oint_{\partial V_e} n_j \sigma_{mj}^c (\delta_{im}+u_{i,m})\delta u_i^\lambda \mathrm{d}S = 0 \tag{45}$$

σ_{mj}^c 为 Kirchhoff 应力常量. 但实际上要预先找到满足条件 (45) 的位移试解 u_i 是很困难的. 吴教授等提出了非线性计算的若干简化措施，给出了线性化的分片试验条件建立几何非线性非协调元的简化模型 [20]. 有关式 (45) 的具体实施并建立有实用价值的各类单元模型还需要做大量的研究工作.

陈万吉教授在 20 世纪 90 年代中期提出了一类放松单元间协调要求的非线性广义变分原理 [23], 对几何非线性问题可以选择事先无协调约束的非协调函数建立非协调元，收敛性可以保证.

对 C^1 类非协调模式，用 Lagrange 坐标表示，在一个单元 V_e 内能量泛函表达式为

$$\Pi_{G1} = \int_{V_e} [A(\alpha_{ij}) - \tilde{\sigma}_{ji}(\alpha_{ij}-u_{i,j})]\mathrm{d}V - \int_{\partial V_e} \tilde{T}_i(u_i-\tilde{u}_i)\mathrm{d}S \tag{46}$$

其中 $A(\alpha_{ij}) \equiv A(e_{ij}(\alpha_{ij})) = \frac{1}{2}e_{ij}A_{ij}e_{kl}$, 且 $e_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij}+\alpha_{ji}+\alpha_{ki}\alpha_{kj})$, $\tilde{T}_i = \tilde{\sigma}_{ji}n_j$. 而 $\tilde{u}_i$ 为单元间的公共位移，$\tilde{\sigma}_{ji}$ 为第 I 类 Piola-Kirchhoff 应力张量，$\tilde{T}_i$ 为由 $\tilde{\sigma}_{ji}$ 产生的边界力. 用 $\tilde{T}_i^c$ 换 $\tilde{T}_i$ 得另一类能量泛函

$$\Pi_{G2} = \int_{V_e} [A(\alpha_{ij}) - \tilde{\sigma}_{ji}(\alpha_{ij}-u_{i,j})]\mathrm{d}V - \int_{\partial V_e} \tilde{T}_i^c(u_i-\tilde{u}_i)\mathrm{d}S \tag{47}$$

$\tilde{T}_i^c$ 为 $\tilde{T}_i$ 的常应力部分. 由 Π_{G1} 可以建立几何非线性广义杂交元，而根据 Π_{G2} 可以建立精化杂交元和精化直接刚度法. 这里需要特别指出的是，EAS 只是对有位移协调部分的单元才能实施，而泛函 (46) 和 (47) 不受此限制.

对 C^0 类非协调模式，单元位移函数可分离为：$u_i = u_i^q + u_i^\lambda$, u_i^q, u_i^λ 分别为 u_i 的协调与非协调部分，在单元边界上取 $\tilde{u}_i = u_i^q$ 并代入 Π_{G1} 得

$$\Pi_{G1}^\lambda = \int_{V_e} [A(\alpha_{ij}) - \tilde{\sigma}_{ji}(\alpha_{ij}-u_{i,j})]\mathrm{d}V - \int_{\partial V_e} \tilde{T}_i u_i^\lambda \mathrm{d}S \tag{48}$$

而由 Π_{G2} 得

$$\Pi_{G2}^\lambda = \int_{V_e} [A(\alpha_{ij}) - \tilde{\sigma}_{ji}(\alpha_{ij}-u_{i,j})]\mathrm{d}V - \int_{\partial V_e} \tilde{T}_i^c u_i^\lambda \mathrm{d}S \tag{49}$$

由 $\varPi_{G1}^{\lambda}$ 可建立 C^0 类几何非线性广义杂交元，而根据 $\varPi_{G2}^{\lambda}$ 可建立 C^0 类精化杂交元和精化直接刚度法.

4 EAS 方法面临的问题

在非线性有限元分析中，低阶单元由于拥有计算效率高、健壮性强及易于使用等诸多优势而被广泛采用. 相反，高阶位移等参元在处理接触问题及网格扭曲时， Jacobian 矩阵的求逆计算存在很大的困难，因而很少使用. 但低阶单元显然不具备高阶单元的计算精度，因此在非线性有限元分析中，如何提高低阶单元的计算精度是当今世界 CAE 分析面临的一个重要课题. 非线性有限元分析中的 EAS 方法是提高单元计算精度的一种重要手段，在低阶单元中合理选择增广应变场相当于在能量意义上提高了位移场的插值完备阶次因而可以获得较高的计算精度，同时也能提高应力场的计算精度. 此外，在构造有限元模型时， EAS 方法也是克服单元诸多自锁问题的重要手段.

EAS 方法用于非线性有限元分析也存在诸多问题. 一个普遍存在的问题是独立假设的增广应变参数在单元水平上消去：

$$\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{K}_{\alpha u}\boldsymbol{u}=0 \tag{50}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^{-1}\boldsymbol{K}_{\alpha u}\boldsymbol{u} \tag{51}$$

这里

$$\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}=\int_{B_e}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{K}_{\alpha u}=\int_{B_e}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V$$

$\boldsymbol{G}$ 为独立假设的增广应变插值函数矩阵， $\boldsymbol{C}$ 为本构矩阵， $\boldsymbol{B}$ 为应变位移矩阵. 对小变形线弹性问题， $\boldsymbol{C}$ 为弹性本构矩阵， $\boldsymbol{\alpha}$ 可在单元水平上消去，不会花费太大的计算成本. 但对小变形材料非线性问题及大变形问题， $\boldsymbol{\alpha}$ 的消去需要在每一单元、每一迭代步进行，而 $\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}$ 一般是非对角的，其求逆计算大大提高了计算成本，降低了计算效率，这已成为 EAS 方法用于非线性有限元分析的发展瓶颈. 具体表现在以下两个方面：

(1) 本构关系的限制

EAS 方法无论是用于小变形材料非线性问题还是大变形问题，比较适合于各向同性弹性或拟弹性的本构关系. 按照增广应变插值函数矩阵 $\boldsymbol{G}(\xi)$ 的定义

$$\boldsymbol{G}(\xi)=\frac{j_0}{j(\xi)}\boldsymbol{F}_0^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(\xi) \tag{52}$$

$\boldsymbol{G}(\xi)$, $\boldsymbol{E}(\xi)$ 分别为物理空间及参数空间的增广应变插值函数矩阵. Puso 在其论文里提出了 $\boldsymbol{F}_0^{-1}$ 的一种简化计算方法，对于各向同性材料， $\boldsymbol{F}_0^{-1}$ 可简化成对角形式，大大降低了计算成本 [18]. 对于弹塑性或各向异性本构关系，计算工作量会急剧增大.

(2) 求解方法的限制

EAS 方法用于大变形分析，比较适合于用 T. L. 格式 (全 Lagrange 格式) 求解. 从式 (52) 可以看出， $\boldsymbol{F}_0^{-1}$ 按照从参数空间向物理空间的 Jacobian 变换矩阵 $\boldsymbol{J}_0$ 计算而得，无论是 U. L. 格式 (更新的 Lagrange 格式) 还是 Belytschko 等提出的随动坐标系法都要求在每一个时间步计算一次 $\boldsymbol{F}_0^{-1}$，这显然会大大增加计算工作量. 而为了解决工程中的实际问题，用 T. L. 格式计算得到的 Kirchhoff 应力及 Green 应变还需要转换成真实应力及真实应变，无疑也会增大计算工作量，这也是 T. L. 格式用于大变形分析的一个缺陷.

5 结 论

由于非线性有限元分析大都采用低阶单元，而非协调元方法是改善低阶单元精度的重要手段，因此非线性有限元分析的非协调模式是当今世界 CAE 分析的一个重要发展方向. 但非协调元方法用于非线性有限元分析的一个很大缺陷是降低了计算效率，成为制约其发展的一个瓶颈. 随着计算机技术的不断进步，计算速度会越来越高，各种先进的计算方法会不断涌现，非线性有限元分析的非协调模式会成为解决工程实际问题的一个重要手段.

参 考 文 献

1 Wu Changchun, Huang Maoguang, Pian T H H. Consistency condition and convergence critieria of incompatible functions and its application. *Comput Struct,* 1987, 27: 639～644

2 吴长春，卞学镄. 非协调数值分析与杂交元方法. 北京：科学出版社， 1997

3 Wu Changchun, Huang Yingqing, Ramm E. A further study on incompatible models: revise-stiffness approach and completeness of trial functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 2001, 190: 5923～5934

4 Wilson E L, Taylor R L, Doherty W P, et al. Incompatible displacement models. In: Numerical and Computer Models in Structural Mechanics. New York: Academics Press, 1973

5 Taylor R L, Beresford P J, Wilson E L. A non-conforming element for stress analysis. *Int J Numer Meth Engng,* 1976, 10: 1211～1219

6 Pian T H H, Sumihara K. Rational approach for assumed stess finite elements. *Int J Numer Meth Engng,* 1984, 20: 1685～1695

7 Cheung Y K, Chen Wanji. Refined hybrid method for plane isoparametric element using an orthogonal approach. *Computer & Structures,* 1992, 42: 683～694

8 Simo J C, Rifai M S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int J Numer Meth Engng,* 1990, 29: 1595～1638

9 Simo J C, Armero F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int J Numer Meth Engng,* 1992, 33: 1413～1449

10 Simo J C, Armero F. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation

problems. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1993, 110: 359~386
11 Bischoff M, Ramm E. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *Int J Numer Meth Engng,* 1997, 40: 4427~4449
12 Parisch H. A continuum-based shell theory for non-linear applications. *Int J Numer Meth Engngng*, 1995, 38: 1855~1883
13 Hauptmann R, Schweizerhof K. A systematic development of 'solid-shell' element formulation for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom. *Int J Numer Meth Engng*, 1998, 42: 49~69
14 Miehe C. A theoretical and computational model for isotropic elastoplastic stress analysis in shells at large strains. *Comput Meth Appl Mech Engng*, 1998, 155: 193~234
15 Büchter Norbert, Ramm E, Roehl O. Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int J Numer Meth Engng*, 1994, 37: 2551~2568
16 Sansour C. A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change. *Arch Appl Mech*, 1995, 65: 194~216
17 Sansour C, Kollmann F G. Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory: an assessment of hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain elements. *Comput Mech*, 2000, 24: 435~447
18 Puso Michael Anthony. A highiy efficient enhanced assumed strain physically stabilized hexahedral element. *Int J Numer Meth Engng*, 2000, 49: 1029~1064
19 吴长春， Bufler H. 多变量有限元：相容性与模式优化．中国科学 (A), 1990, 9: 946~956
20 吴长春，焦兆平．用于几何非线性分析的内参型非协调元法．力学学报， 1993, 25: 505~512
21 焦兆平，吴长春，卞学镄． Mindlin 板几何非线性分析的附加内部剪应变法．应用数学和力学， 1994, 15: 479~488
22 Wu Changchun, Liu Xiaoyao, Pian T H H. Incompatible deformation modes and plastic finite elements. *Comput Strut*, 1991, 41: 449~453
23 陈万吉．几何非线性非协调模式研究．中国科学 (A), 1994, 10: 1047~1055
24 Zheng Shijie, Chen Wanji. Geometrically non-linear generalized hybrid element and refined element method of non-conforming modes. *Acta Mechanica Sinica,* 1995, 11: 178~185
25 郑世杰，朱德懋，陈万吉．基于非协调模式的几何非线性广义杂交退化壳单元．航空学报， 1998, 19: 87~90
26 张少焱，陈万吉．基于几何非线性不协调变分原理的圆柱壳非线性初始稳定性分析．工程力学， 2002, 19: 14~18

THE STATE-OF-THE-ART OF INCOMPATIBLE MODE OF NON-LINEAR FEM AND THE ISSUES

WANG Jinyan CHEN Jun LI Minghui

National Die & Mold CAD Engineering Research Center,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China

Abstract It is difficult and has been research focus to improve the accuracy and performance of the low order elements widely used in non-linear FEM analysis using incompatible mode. In this paper, the basic principles of EAS (The Enhanced Assumed Strain) method are systematically summarized, and the conditions to guarantee calculation convergence, the solution stability and the construction methods of the enhanced assumed strain interpolating function are elaborated in detail. The research methods and achievements about the incompatible mode geometrically non-linear FEM in China are reviewed, which include: 1) a convergence criteria of incompatible mode geometrically non-linear FEM was proposed based on Hellinger-Reissner generalized variational principle, and the simplified model of incompatible geometrically non-linear FEM was constructed by using some simplified methods; 2) a class of non-linear generalized variational principles was proposed, in which the compatible conditions between elements are relaxed. The incompatible models can be constructed by selecting incompatible functions without satisfying compatible conditions prior and the convergence can be guaranteed. The C^1 or C^0 geometrically non-linear generalized hybrid elements, C^1 or C^0 refined hybrid elements and directly refined stiffness methods can be constructed by applying the non-linear generalized variational principles. The problems with respect to the application of EAS method in the non-linear FEM analysis are pointed out, that is, the restriction of constitutive laws and the solving methods. Furthermore, the application prospect of the incompatible mode non-linear FEM is discussed.

Keywords non-linearity, incompatible mode, EAS, convergence, FEM