第 34 卷　第 4 期　　力 学 进 展　　Vol.34　No.4
2004 年 11 月 25 日　　ADVANCES IN MECHANICS　　Nov.25, 2004

数值流形方法及其在岩石力学中的应用*

李树忱　程玉民
上海大学上海市应用数学和力学研究所，上海 200072
E-mail: shuchenli@eyou.com

摘　要　数值流形方法是目前岩石力学分析的主要方法之一. 该方法起源于不连续变形分析，主要用于统一求解连续和非连续问题，其核心技术是在分析时采用了双重网格：数学网格提供的节点形成求解域的有限覆盖和权函数；而物理网格为求解的积分域. 数学网格被用来建立数学覆盖，数学覆盖与物理网格的交集定义为物理覆盖，由物理覆盖的交集形成流形单元. 流形方法的优点在于它使用了独立的数学和物理网格，具有和有限元明显不同的定义形式，且数学网格对于同一问题不同的求解精度的需求可以很方便地细化. 由于该方法考虑了块体运动学，可以模拟节理岩体裂隙的开裂和闭合过程，因而在岩石力学中得到了广泛应用，近年来许多学者对该方法进行了研究. 本文简要叙述了节理岩体的数值方法从连续到非连续的发展过程，详细地介绍了数值流形方法的组成和数值流形方法在岩石力学及其相关领域的研究和发展概况，最后就作者所关心的一些问题，如三维问题的数值流形方法、数值流形方法在物理非线性问题和裂纹扩展问题中的应用、相关的耦合方法等进行了探讨.

关键词　数值流形，不连续变形分析，岩石力学，裂纹扩展，大变形

1　引　言

岩体结构的计算机模拟近年来发展迅速，它不仅能够模拟节理岩体在极限荷载作用下的应力应变关系，更为重要的是它还能够捕捉峰值以上结构的动态响应 [1]，进而可以跟踪岩体结构中裂隙演化的实际破坏过程，包括岩体结构从连续到非连续的转变过程. 而这种跟踪岩体结构尤其是复杂地下岩体结构的破坏演化过程及对岩体结构稳定的综合评价方面，早已被科技工作者和工程师们认识到是相当重要的.

一个综合考虑节理岩体及其演化的计算方法仍然有很长的路要走. 节理岩体在演化过程中包括原始连续介质的损伤和断裂过程、岩体结构从连续到非连续状态的演化过程以及后来的岩体结构总体分离和局部塌落的过程. 近年来综合考虑节理岩体破坏全过程的计算方法得到了迅速发展. 关于考虑节理岩体破坏全过程的计算方法在文献 [2] 中给出了详细的评述.

节理岩体的数值模拟最早是采用分布式裂隙模拟方法. 该方法是以连续介质力学为基础，采用应变软化的本构模型来模拟裂隙的扩展及其演化过程 [2~9]. 而裂隙演化本身就是一个具有复杂物理现象的过程，对于岩体内具有多条裂隙时，采用分布式模拟方法优于单独考虑某一条或几条裂隙和剪切带的模拟方法. 对于多条裂隙的模拟，分布式模拟方法优于离散裂隙的模拟方法. 这主要是因为方法本身是基于材料非线性的本构模型，这些模型常常是以损伤力学、塑性力学 (考虑应变软化) 或一些高阶连续介质力学的本构关系为基础的. 这些方法虽然在模拟裂隙扩展方面取得了一定的成功，但均是以连续介质力学为基础，位移场中是不允许出现不连续的. 基于连续介质的方法要想扩展它们的求解能力就必须借助于材料的本构模型 (高阶模型、梯度模型、考虑应变软化的塑性模型等) 来扩充它们原有的数学模型，或者在控制方程离散过程中，扩展试函数的基空间 (网格自适应法、非连续形函数法和内部剪切带法)[10~14]. 在所有这些方法中，实际岩体结构的破坏形式仍是以连续的形式表现出来的. 对于岩体结构破坏时，其整体或局部相互分离没有考虑. 利用上述方法无法真实地模拟岩体结构的实际破坏过程.

其次是采用离散式裂隙模拟方法. 该法是以断裂

收稿日期：2003-04-16，修回日期：2004-02-17

力学中裂纹尖端应力和位移场为基础, 与局部或整体网格重构相互耦合来完成裂隙扩展分析 [15,16]. 但该方法只适合于模拟少数几条裂隙的扩展, 对于多条裂隙, 该方法在网格重构时会遇到麻烦. 同时, 网格重构时也浪费大量的机时和存储空间. 在离散式裂隙模拟过程中, 裂隙体穿过部分要引入位移不连续, 所以岩体结构的最终破坏形态是很容易被识别出来的. 但在应用离散式裂隙模拟方法时, 一般就是应用能量释放率准则来追踪单个裂纹的扩展, 在追踪多裂纹扩展时该方法将导致结构的拓扑和算法上的复杂. 同时该方法常常假设裂隙一旦开裂就不能闭合, 没有考虑裂隙面间再次接触的可能. 而在实际岩体工程中, 裂隙面间的多次接触是经常发生的.

再次是以非连续为基础的模拟方法. 目前该方法在节理岩体仿真方面的研究明显增加 [17~27]. 该方法主要是假定岩体内不连续状态是事先存在的, 且以不连续为基础把岩体分割成若干相互联系的、可动的块体系统组成, 如离散元法和不连续变形分析法等. 这些方法的明显特点就是把岩体结构看成是由一系列相互可以改变块体的几何形状和接触条件相互关联的块体系统组成. 非连续变形分析就是在岩体力学中应用比较成功的一种基于块体系统的非连续的数值方法, 主要用来模拟节岩体的变形规律 [28~32]. 然而岩体结构本身并不是完全被裂隙切割成块体, 其间还存在着没有完全被裂隙切割的连续部分, 是由连续和非连续共同组成的统一体, 将其假设为完全分离来加以分析, 是不能真实的反映节理岩体的变形规律.

针对节理岩体这种既有连续又有非连续的特性, 石根华博士在 1992 年提出了一种更为一般的同时处理连续与非连续的统一计算方法 —— 数值流形方法 (NMM)[33]. 该方法以数值流形为核心, 在非连续变形分析的块体系统非连续运动学理论基础上, 融入了有限元和解析法的连续变形分析方法, 创立了可在一切空间至少包括有限元、非连续变形分析和解析法在内的一种新的统一计算形式. 由于它能够统一处理连续与非连续问题, 非常适合模拟节理岩体的变形规律, 在岩体力学与工程领域发展尤为迅速 [33~48].

2 数值流形方法概述

数值流形方法 [33~49] 提供了一种统一求解连续和非连续问题的方法, 其基本结构如图 1 所示, 主要是由以下 3 个部分组成: 块体动力学, 两层覆盖系统和单纯形积分.

数值流形方法继承了 DDA (非连续变形分析) 方法中的块体运动学和块体间接触判断技术. 接触判断要满足两个条件: 块体间不介入和无张拉. 块体运动学使数值流形方法能够处理在一般荷载作用下块体系统的力学行为和动边界条件, 同时它也能模拟块体系统的大变形.

两层覆盖系统是流形方法区别于其它数值方法最显著的特点之一. 第一层覆盖是物理网格, 它用来描述物理边界包括所有不连续面. 第二层覆盖是数学网格, 它由一些规则的格子或由其它一些任意的图形组成. 数学网格的多少根据计算精度的要求而定. 目前, 常常采用三角形网格做数学网格, 主要是由于它方便插值构造. 这两套网格之间的相互重叠用流形来描述.

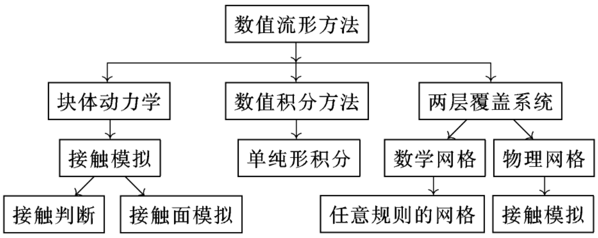

图 1 流形方法的基本结构图

数值流形方法不使用数值积分如高斯积分, 避免了对任意形状的几何图形进行高斯积分时要映射到规则几何图形所带来的麻烦. 例如在有限单元法中, 单元的几何形状就要考虑. 而数值流形方法使用单纯形积分, 它可以把任意形状的区域转化为许多三角形, 而每个三角形上的积分都可以用解析法求出.
对于任意形状的单元, 它首先给出一个方向, 如图 2 所示. 然后给出一个参考点, 常常选坐标原点. 通过原点连接每一个边的端点, 如 i,j, 这样就可以形成三角形 oij. oij 具有方向, 它的方向可以定义为沿 i,j 方向. 由于路径具有方向, 对于整个积分而言, 有些面积是正的有些是负的. 这样所有三角形面积之和就是任意函数的有向积分值.

图 3 给出了一个简单的例子来解释物理网格和数学网格. 图中给出了一个多边形的岩石块体, 中间含有一条没有贯通的节理. 物理网格是用来描述问题的几何形状和其内部的不连续, 如图 3(a) 所示. 数学网格必须覆盖整个物理模型, 如图 3(b) 所示. 虽然

在流形方法中数学网格的单元可以是任意形状的，这里选用三角形单元是因为三角形单元便于插值函数的构造. 图 3(c) 中给出了由这两套网格形成的流形单元.

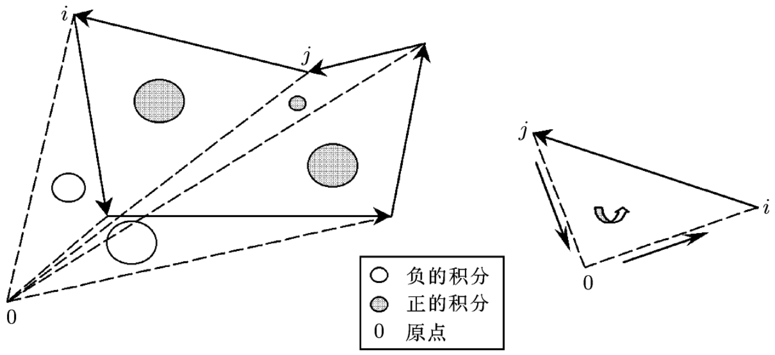

图 2 在积分中三角形 oij 的方向

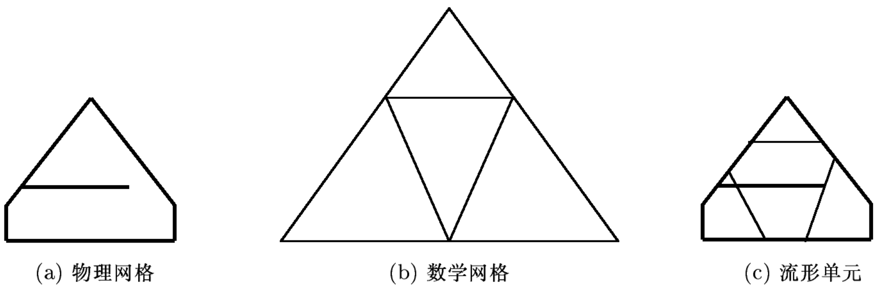

图 3 形成流形单元的例子

从上述例子可以清楚的看出，流形单元是数学网格和物理网格共同作用形成的, 是数学网格对物理网格的再剖分形成物理覆盖, 由物理覆盖的交集形成流形单元. 流形方法的优点在于它使用了分开且独立的数学和物理网格, 具有和有限元明显不同的定义形式, 且数学网格对于同一问题不同的求解精度的需求可以很方便地细化.

3 数值流形方法及其在岩石力学中的研究现状与进展

自从 1992 年石根华博士提出了数值流形方法概念后, 该方法引起了国际学术界的广泛兴趣和关注. 由于它能够统一的处理连续和不连续问题, 非常适合于模拟节理岩体的变形规律, 在岩体力学与工程领域发展尤为迅速. 尽管从 1992 年至今只有十几年的时间, 但由于在摸索其它数值方法时积累了许多的成功经验，使得数值流形发展的起点很高，数值流形方法已取得较大进展 [50~56], 有关数值流形方法的研究进展在文 [2] 中给出了详细的论述. 本文主要集中在数值流形方法在各领域中主要是岩石力学中的应用现状进行综述.

从目前国内外研究现状来看, 对于流形方法的研究主要有以下两大方向：

(1) 用于连续与非连续问题的求解. 由于数值流形方法最初的目的就是要将连续变形分析与非连续变形分析统一在一种数值方法中，石根华本人在这方面也作了大量的工作 [57]. 因此，这一方面发展较为完善. 有许多学者在以下几方面做了大量杰出的工作：

Lin Jeen-shang[58] 将物理覆盖函数推广为任意阶级数；王芝银 [39] 考虑岩石大变形，建立了二次位移函数的数值流形方法. Chen Guangqi[59] 将物理覆盖的覆盖函数从常数提高到线性函数；Chen Guangqi[60] 将覆盖函数提高到全二阶级数，王水林 [61] 研究了物理覆盖上全一阶函数的数值流形方法; 蔡永昌与张湘伟 [62] 、田荣 [63,64] 等学者都对流形元的高阶形式进行了研究. 通过研究表明采用一阶覆盖函数的流形方法精度较原流形方法精度有较明显的提高.

Shyu K 和 Salami M R[65] 借鉴有限元法的研究经验，在数值流形方法中引入了四节点等参单元，Hideomi Ohtsubotffu[66] 通过研究采用不同覆盖形状或节点数对控制数值流形方法的计算精度；王水林 [67] 研究了四个物理覆盖形成的流形单元的计算方法, 宋俊生等 [68] 研究了四边形单元的流形方法，这些研究均不同程度的丰富和扩展了流形方法的求解能力.

为了进一步提高计算精度和简化数值实现过

程，Qiu Xiangjun[69] 提出了无罚弹簧的数值流形方法，该方法在计算过程中不需要通过加减罚弹簧来满足不连续面的不嵌入和无张拉条件，可以克服罚弹簧较小引起的误差太大和罚弹簧太大导致解奇异的缺点.

也有一些学者在流形方法的前处理和插值理论方面做了许多有意义的探讨，Ke[52] 提出基于人工节理的数值流形方法；Chen 等 [51]、Hideomi Ohtsubo 等 [66]、曹文贵和速宝玉 [70,71]、蔡永昌和张湘伟 [72] 等学者讨论了流形方法数学网格自动生成问题；Sheng、Chen 和 Chuang[56] 讨论了流形方法的插值理论；骆少明、张湘伟和蔡永昌 [73,74] 研究了流形方法的变分原理. 这些研究丰富了数值流形方法在前处理、变分原理和插值理论方面的研究.

由于数值流形方法在建立之初，是在线弹性小变形假设基础上开发的. 而实际岩体结构具有材料和几何双重非线性的特征，同时，大部分岩体结构都是处于水下工作的. 因此，这一方面也有许多学者投入了许多精力将原有的流形方法在不同程度、不同领域进行扩展.

在物理非线性方面，Takeshi Sasaki 等 [75] 发展了用于节理岩体模型的弹塑性流形方法；王书法 [76] 利用参变量变分原理研究了岩体弹塑性分析的数值流形方法，该方法主要将弹塑性问题转化为在屈服条件约束下求解弹塑性势能泛函的极值问题，在每个载荷增量步中不需要弹塑性迭代，能够求解非关联流动和应变软化的弹塑性问题，是一种比较适合于弹塑性分析的数值方法.

在大变形分析方面，王芝银等 [77] 建立了大变形分析流形方法的计算公式，对流形方法中的约束条件、边界释放荷载和积分方法进行了改进，建立了适用于一般岩体力学问题的固定点矩阵、分部荷载矩阵及单纯形积分的更简便形式；同时考虑岩土工程的增量变形过程，建立了考虑岩体损伤分析的数值流形方法的增量分析公式，并对边坡的潜在滑移面的滑动过程进行了模拟 [78]；朱以文等人 (1999 年) [79] 将增量流形元方法推广到岩石大变形问题，基于拉格朗日列式，建立了大变形分析的增量流形方法的计算公式，模拟了具有节理、裂隙的岩石大变形问题，并应用于裂纹扩展模拟. 他们的计算表明，数值流形方法在岩石大变形分析中是有效的.

在考虑液固耦合作用方面，Ke Te-Chih 等 [80] 研究了分析区域同时包含液体区域和固体区域的数值流形方法；王水林 [81] 研究了有自由边渗流问题的数值流形方法，Ohnishi 等 [82] 研究了模拟饱和和非饱和土中不稳定地下水作用的数值流形方法.

以上的研究大大丰富了流形方法在连续与非连续变形分析中的应用. 1998 年，石根华博士在美国成立流形工程公司 (Manifold Engineering Company)，以关键块体理论、有限元、DDA 以及流形方法为依托，开展岩石、地震、结构、土木和环境工程方面的委托计算、业务咨询与应用软件开发等业务. 从一个侧面说明了流形方法在连续问题与散体系统的不连续变形分析方面已较为成熟，并开始应用于工程实际.

(2) 用于裂纹扩展模拟. 由于流形方法的双重网格特点，使得在进行裂纹扩展模拟时，数学网格可保持不变，从而较之于有限元方法更适合于裂纹扩展的模拟，引起了众多学者的兴趣. Zhang 等 [83] 用数值流形方法模拟热应力作用下的裂纹扩展问题，这是流形方法首次应用于热应力作用下的裂纹扩展模拟，该法中假设了材料断裂破坏的标准选用 3 参数 Mohr-Coulomb 准则

$$\begin{aligned} &\sigma'_y = T_0 && \text{拉破坏} \\ &|\tau'_{xy}| = C, \quad 0 < \sigma'_y < T_0 && \text{剪破坏} \\ &|\tau'_{xy}| = C - \sigma'_y \tan\phi && \text{剪破坏} \end{aligned} \tag{1}$$

式中 σ'_y 为裂纹边上正应力，τ'_{xy} 为裂纹边上剪应力，T_0 为材料的抗拉强度，C 为内粘聚力，ϕ 为内摩擦角.

在每一边上的应力是两邻近单元边上的最大应力，通过坐标变换将其变换到局部坐标系，对于裂纹尖端，如果与裂纹尖端相连的所有边上的应力不满足上述破坏标准，那么就将围绕裂纹尖端的单元应力进行平均，用来判断裂纹是否扩展. 通过该法计算得到的尖端应力是不够精确的，但这是流形方法应用于断裂力学的开始. 同年，Chiou 和 Tsay 等 [84,85] 把数值流形方法和断裂力学相结合来研究裂纹扩展及尖端应力场，开始了数值流形法与断裂力学的结合. 在他们的文章中主要应用了流形方法处理连续与非连续变形的能力，把断裂力学中成功计算应力强度因子的方法应用到流形方法中. 在模拟裂纹扩展过程中，应力强度因子采用裂纹张开位移法 (Paris 和 Sih)[86] 模拟裂纹扩展，文中采用了最大周向应力理论 [87] 来确定裂纹扩展方向的方向角 θ

$$K_{\mathrm{I}} \sin\theta + K_{\mathrm{II}}(3\cos\theta - 1) = 0 \tag{2}$$

式中 K_{I} 和 K_{II} 是 I 和 II 型裂纹的应力强度因子，它们分别用裂纹张开位移法 [88] 来计算求得

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\ \frac{E \cdot \delta_1}{2(1-\nu^2)} \tag{3}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\ \frac{E \cdot \delta_2}{2(1-\nu^2)} \tag{4}$$

式中 E 是弹性模量，δ_1 和 δ_2 分别是法向变形和沿裂纹方向的变形如图 4 所示. ν 是泊松比，r 是裂纹尖端到测点的距离.

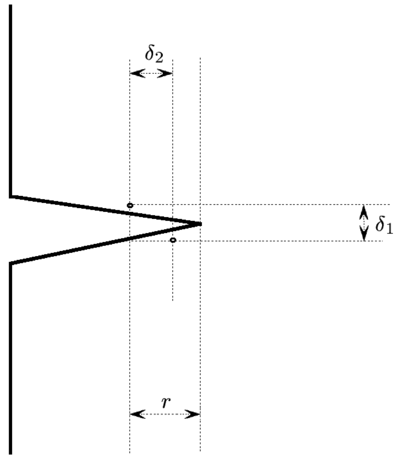

图 4 裂纹张开位移及测点

通过上述方法计算应力强度因子和裂纹扩展角，而在实际模拟过程中，采用了裂纹尖端网格细化和自动网格重构技术来追踪裂纹扩展，在流形方法中，由于数学网格和物理网格相互独立，所以每当裂纹扩展到一个新的位置时，前一个位置细化的网格被抛弃，在新位置上重新进行网格细化，即网格细化始终伴随在裂纹的尖端．每扩展一步，就用局部加密的数学网格进行覆盖即可．因此这种方法克服了有限元中网格局部加密的困难．同时，也能大大减少计算机的存储和提高计算效率．

实际上这种方法应用了自适应有限覆盖和自动网格重构技术，由于流形方法中两套网格相互独立，就克服了有限元方法中网格重构时存在的困难．虽然，张开位移法对计算应力强度因子是一种很容易且有效的方法，但测点的选取很大程度上依赖于经验．最近， Tsay 等 [89] 利用虚位移扩展法 (Parks, Hellen[90,91]) 和数值流形方法相结合来研究混合裂纹扩展问题，克服了张开位移法依赖经验的缺点．以往的研究表明，虚位移扩展技术在较粗的网格下利用能量释放率就能够很精确地计算 I 型裂纹的应力强度因子．但虚位移扩展技术中的虚位移扩展必须小到只有包含移动节点的单元受影响，才能得到较精确的结果，这一点在计算过程中必须反复试探．这样就浪费了大量的时间，并不是最佳的方法．

另外，值得一提的是网格细化过程也可以用高阶覆盖位移函数代替．在有限元法中，如果在一个单元内使用不同阶次位移函数，则在临近两单元的边上将产生位移不协调，必须用特殊的形函数来解决这一问题 (Demkowicz[92])．而在数值流形方法中，由于数学网格独立于物理网格，在一个单元中允许出现不同阶次的位移函数，进而克服了传统有限元网格细化的困难．

国内王水林博士 [93,94] 也对类似问题进行数值模拟研究，他也是充分利用流形方法中两套独立网格的特点，采用围线积分法来计算应力强度因子和最大周向应力确定裂纹的扩展角，来模拟裂纹的扩展过程．

总之，很多学者在数值流形方面做了许多杰出的工作，也取得了可喜的成果．由于流形方法作为一种新兴的数值方法，在很多地方都在进一步完善与拓展之中．从上述论述可知， Tsay 等在裂纹扩展方面的工作虽取得了一定成功，但仍有许多值得改进的地方．如在计算应力强度因子时，裂纹尖端需要进行细化．同时，还要求数学网格要与裂纹尖端的几何拓扑形状保持一致，这就给网格划分带来了一定困难．另外，在计算应力强度因子时，不论是采用张开位移法、虚位移扩展法还是围线积分法，其主要还是借鉴有限元法在这方面的经验．在追踪裂纹扩展时，必须进行网格重构来追踪裂纹的扩展路径．

在数值流形方法和其它方法耦合方面，也有一些学者把流形方法中的有限覆盖技术与无网格法中的插值技术相结合来处理不连续问题．以林德璋和莫海鸿 [95] 为代表的流形方法，这种方法不采用数学网格和物理网格，而是在分析域内布置节点，在节点邻域 (或覆盖) 上建立加权正交的基函数，然后利用伽辽金法或类似方法建立控制方程组，从中求出各节点的位移．这种方法被称为无单元法或无单元伽辽金法 [96,97]．这种方法的特点在于避免了大量的网格划分工作，克服了一般数值分析中函数局部化近似引起的误差．周维垣 [98~100] 在林德璋和莫海鸿工作基础上，首先将无单元方法应用于岩石力学并用来求解工程问题，田荣 [63,64], Zhang Guoxin 等 [101,102] 学者分别在无网格法的基础上利用有限覆盖的思想对裂纹问题进行了研究．但这些方法均是以无网格法为基础，所以没有考虑裂隙面间的张开、滑移和多体相互作用问题，即没有考虑结构从连续到非连续的全破坏的过程，但均不同程度地丰富和发展岩土领域的各种数值方法作出了有益的探讨．

目前也有些学者在三维数值流形方法方面作出了有益的探讨 [103]．同时，也有些学者利用单位分解法对数值流形方法进行了另一种意义上的解释，并用于分析边坡稳定问题 [104]．

另外，随着计算方法研究的不断深入，流形方法已开始用于实际工程的分析中，如用于求解弹性地基板问题 [105]，用于求解岩体锚固模拟 [106]，在预应力锚索加固路堑边坡分析和金属成型分析方面也有相关应用 [107,108]．有关数值流形方法在工程中的应用及其展望在文献 [2] 给出了详细的论述，这里不再列出．

4 结论与展望

数值流形方法的核心思想是流形的有限覆盖技术和双重网格剖分策略. 流形方法通过采用流形的有限覆盖技术, 自然地描述了材料的非连续特性, 从而为连续与非连续问题的统一求解奠定了基础. 双重网格使得流形方法可适应复杂的边界条件.

在传统有限元方法中, 单元不仅仅是构造插值函数的子区域, 而且是系统能量泛函积分求解的基本单位. 而在流形方法中, 流形单元仅仅是完成系统能量泛函积分求解的基本单位, 而不是构造局部近似函数的插值子域 (插值子域是由数学网格所决定的, 总可以是足够规则), 正因为将插值子域与积分子域相分离, 使得流形单元的形状可以是任意的, 甚至有凹的, 而都不会给插值构造增加任何困难; 与有限元相比, 更适合处理开裂问题.

尽管流形方法已取得了许多可喜的成果, 但对于解决岩石力学与工程实际问题来说, 还有许多不足之处. 就所关心的问题, 作者认为流形方法在以下几方面还有待于进一步深入研究:

(1) 数值流形方法的理论与算法方面的完善

岩石力学和工程实际问题本质上是一个三维问题. 二维有限元方法提出不久就成功的推广为三维有限元法, 但把数值流形方法从二维推广到三维比有限元困难得多. 比较突出困难是难以建立三维接触理论和处理方法; 接触处理是求解非连续问题的关键环节之一, 现有流形方法采用罚函数处理接触问题, 一方面对于接触力不能给出满意的解答, 另一方面由于数值实施上的困难放松了对界面上的本构关系的充分考虑, 所以需要建立完善的二、三维接触理论.

(2) 物理非线性问题的研究

众所周知, 岩体的变形表现出复杂的非线性尤其对节理、裂隙岩体. 如损伤、塑性、黏性等, 这方面的文献还不多见. 因此有必要用数值流形方法模拟岩石物理非线性方面的问题.

(3) 裂纹扩展问题的研究

岩石工程的破坏往往都是与岩体内裂纹扩展有关, 已有的数值流形方法在处理裂纹尖端的应力场时精度不够高, 不能准确的追踪裂纹的扩展, 故需应用各种手段对现有的流形方法进行扩展, 来满足工程实际的需要.

(4) 实际工程应用方面

由于该方法发展历史较短等因素, 数值流形方法对许多实际工程因素考虑得不够细致. 如岩石工程经常遇到的开挖、支护和地下水作用等问题, 目前的流形方法尚未加以考虑. 这一部分的有关论述在文献 [2] 中给出了详细的展望和具体的研究方向, 感兴趣的读者可以参考该文, 这里不再给出.

(5) 各种方法的耦合方面

由于各种数值方法在分析某些具体问题时都有自己的优点但也有缺点, 如何将各种方法的优点相互结合, 发展新的数值方法也是今后的研究重点.

总之, 数值流形方法在科学与工程计算中有着广阔的应用前景, 在非连续问题与逼近空间构造两方面蕴涵着新颖的思想与理念, 值得我们进一步深入理解与推广应用.

参 考 文 献

1 Pearce C J, Thavalingam A, Liao Z, Bicanic N. Computational aspects of the DDA framework for modeling concrete fracture. *Engineering Fracture Mechanics,* 2000, 65: 283~298

2 王芝银, 李云鹏. 数值流形方法及其研究进展. 力学进展, 2003, 33(2): 261~266

3 Henshell R D, Shaw K G. Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1975, 9: 495~507

4 Simo J C, Oliver J, Armero F. An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics,* 1993, 12: 277~296

5 Oliver J. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1996, 39(21): 3575~3600

6 Armerv F, Garikipati K. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain location in solids. *International Journal of Solids and Structures,* 1996, 33: 2863~2885

7 Larsson R, Steinmann P, Runesson K. Finite element embedded localization band for finite strain plasticity based on a regularized strong discontinuity. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials,* 1999, 4(2): 171~194

8 Regueiro R A, Borja R I. Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity. *International Journal of solids and structures.* 2001, 38(21): 3647~3672

9 Cliver J. Continuum modeling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Computational Mechanics,* 1995, 17: 49~61

10 Xie M, Gerstle W H, Rahulkumar P. Energy-based automatic mixed-mode crack-propagation modeling. *Journal of Engineering Mechanics,* ASCE, 1995, 121: 914~923

11 Bittencourt T N, Waarzynek P A, Ingraffea A R, et al. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems. *Engineering Fracture Mechanics,* 1996, 55: 321~334

12 Ortiz M, Leroy Y, Needleman A. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 1987, 61: 189~214

13 Belytschko T, Fish J, Engelmann BE. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 1988, 70: 59~89

14 Dvorkin E N, Cuitino A M, Gioia G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1990, 30: 541~564

15 Chan S K, Tuba I S, Wilson W K. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics* 1970, 2: 1~17

16 Sha G T. On the virtual work extension technique for stress intensity factors and energy release rate calculations for mixed fracture mode. *International Journal of Fracture,* 1984, 25: 33~42

17 王泳嘉，邢纪波．离散单元法及其在岩土工程中的应用．沈阳：东北工学院出版社， 1993

18 Ghaboussi J. Fully deformable discrete element analysis using a finite element approach. *International Journal of Computers and Geotechnics,* 1997, 5: 175~195

19 Shi G H. Discontinuous deformation analysis: a new numerical model for the statics and dynamics of block systems: [dissertation]. Berkeley: University of California, 1988

20 Lin C T. Extensions to the discontinuous deformation analysis for jointed rock masses and other blocky systems: [dissertation]. Boulder: University of Colorado, 1995

21 王书法，朱维申，李术才． DDA 方法在边坡变形规律研究中的应用及实验验证．地下空间， 2001, 21(4): 328~331

22 Shi G H, Goodman R E. Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling. *International journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* 1989, 13: 359~380

23 Ke T C. Artificial joint-based Discontinuous deformation analysis. In: Proceedings of the first Int. Forum on DDA and Simulations of Discontinuous Media, Berkeley, California, USA, 1996. 326~333

24 Yeung M R, Klein S J. Application of the discontinuous deformation analysis to the evaluation of rock reinforcement for tunnel stabilization. In: Proceedings of the first Int. Forum on DDA and Simulations of Discontinuous Media, Berkeley, California, USA, 1996. 607~614

25 Munjiza A, Owen D R J, Bicanic N. A combined finite/discrete element method in transient dynamics of fracturing solids. *Engineering Computations,* 1995, 12: 145~174

26 Rots J G, Schellekens J C J. Interface element in concrete mechanics. In: Bicanic N, Mang H, eds. Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures. Swansea: Pineridge, 1990. 909~918

27 Kitoh H, Takeuchi N, et al. Size effect analysis of plain concrete beams by using RBSM. In: Ohnishi Y, ed. Proc of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, Japan, 1997. 373~382

28 吴洪词．用改进的 DDA 法模拟岩体的破裂．岩石力学与工程学报， 1996, 15(增刊): 556~558

29 王书法，李树忱．节理岩质边坡变形的 DDA 模拟．岩土力学， 2002, 23(3): 352~354

30 周少怀，杨家岭． DDA 数值方法及工程应用研究．岩土力学， 2000, 21(2): 123~125

31 张勇慧，郑榕明． DDA 方法的改进及应用．岩土工程学报，1998, 20(2): 109~111

32 乌爱清，任放． DDA 数值模拟及其在岩体工程上的初步应用研究．岩石力学与工程学报， 1997, 16(5): 411~417

33 Shi G H. Manifold Method of material analysis. In: Transactions of the Ninth Army Conference on Applied Mathematics and Computing, Minneapolish, Minnesoda, USA, 1992. 51~76

34 Chang C T, Monteiro P J M. Nonlinear entrance level manifold method. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol.1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings, 1995-10-04-06, 1995. 127~146

35 Chen, G, Miki S, Ohnishi Y. Automatic creation of mathematical meshes in manifold method of material analysis. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995, 1: 105~126

36 Ke T C. Artificial joint-based on manifold method. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol.1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 21~38

37 Lin J S, Continuous and discontinuous analysis using the manifold method. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 1~20

38 王书法．岩体不连续非线性变形分析的数值流形方法研究： [博士论文]. 武汉：中国科学院武汉岩土力学研究所， 2000. 5

39 王芝银，王思敬，杨志法．岩石大变形分析的流形方法．岩石力学与工程学报， 1997, 16(5): 399~404

40 朱以文，曾又林．岩石大变形分析的增量流形方法．岩石力学与工程学报， 1999, 18(1): 1~5

41 王水林．数值流形方法及其应用．见：中国力学学会岩土力学专业委员会编．岩土力学新计算方法讲义，武汉：中国科学院武汉岩土力学研究所， 1999. 178~207

42 Ohnishi Yuzo, Tanaka Makoto, Koyama Tomofumi. Development of high-order manifold method. *Int J Numer Meth Engrg,* 1998, 43: 685~712

43 周维垣，杨若琼，剡公瑞．流形元法及其在工程中的应用，岩石力学与工程学报， 1996, 15(3): 211~218

44 石根华．数值流形方法与非连续变形分析．裴觉民译．北京：清华大学出版社， 1997

45 Shi G H. Modeling rock joints and blocks by manifold method. In: Proceedings of 32nd US Symposium on Rock Mechanics, Santa Fe, New Mexico, 1992. 639~648

46 莫海鸿，陈尤雯．流形法在岩石力学研究中的应用．华南理工大学学报 (自然科学版), 1998, 26(9): 48~53

47 王书法，朱维申．考虑侧向影响的数值流形方法及其工程应用．岩石力学与工程学报， 2001, 20(3): 297~300

48 裴觉民. 数值流形方法与非连续变形分析. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(3): 279~292

49 Cheng Yu Ku. Modeling of jointed rock mass based on the numerical manifold method: [dissertation]. University of Pittsburgh, 2001

50 Chang C T, Monteiro P J M. Nonlinear entrance level manifold method. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 127~146

51 Chen G, Miki S, Ohnishi Y. Automatic creation of mathematical meshes in manifold method of material analysis. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 105~126

52 Ke T C. Artificial joint-based on manifold method. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 21~37

53 Lin J S. Continuous and discontinuous analysis using the manifold method. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 1~20

54 Lin D, Mo H. Manifold method of material analysis. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 147~164

55 Shyu K, Salami M R. Manifold method with four-node isoperimetric finite element method. In: Working Forum

on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 165～182

56 Wang C Y, Sheng J, Chen M H, et al. Chuang, Approximation theories for the manifold method. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 61～86

57 Shi G H. Manifold method. In: Proc of the First Int Forum on Discon Defor Anal & Simu of Discon. Media, Berkeley, California, USA, 1996. 52～204

58 Lin J S, Lee D H. Manifold method using polynomial basis function of any order. In: Proc of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media, Berkeley, California, USA, 1996. 365～372

59 Guangqi Chen, Yuzo Ohnishi, Takahiro Ito. Development of High order Manifold method. In: Proc of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, Japan, 1997. 132～154

60 Chen G, Ohnishi Y, Ito T. Development of high-order manifold method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1998, 43: 685～712

61 王水林, 葛修润. 章光. 三节点二次协调元. 应用力学学报, 2000, 17(4): 149～152

62 蔡永昌，张湘伟．数值流形方法在连续体数值分析中的应用．力学与实践， 1999, 21(6): 53～74

63 田荣．连续与非连续变形分析的有限覆盖无单元方法及其应用研究： [博士学位论文]. 大连：大连理工大学． 2000. 11

64 田荣, 栾茂田. 高阶流形方法及其应用. 工程力学, 2001, 18(2): 21～26

65 Shyu K, Salami M R. Manifold method with four-node isoperimetric finite element method. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 165～182

66 Hideomi Ohtsubo, Katsuyuki Suzuki. Utilization of finite covers in the manifold method for accuracy control. In: Proc of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, Japan, 1997. 317～322

67 王水林．四个物理覆盖构成一个单元的流形方法及应用．岩石力学与工程学报， 1999, 18(3): 312～316

68 宋俊生，大西有三．高阶四边形单元的流形方法．岩石力学与工程学报， 2003, 22(6): 932～936

69 Qiu X J. Manifold method without use of penalty springs. In: Proc of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media, Berkeley, California, USA. 1996. 205～249

70 曹文贵，速宝玉．流形元覆盖系统自动形成方法之研究．岩土工程学报， 2001, 23(2): 187～190

71 曹文贵，唐学军．岩石块体数值流形分析网格形成方法之研究．土木工程学报， 2003, 2: 81～85

72 蔡永昌, 张湘伟. 流形方法的矩形覆盖系统及其全自动生成算法. 重庆大学学报 (自然科学版), 2001, 24(1): 42～46

73 骆少明, 张湘伟, 蔡永昌. 数值流形方法的变分原理与应用. 应用数学与力学， 2001, 22(6): 587～592

74 骆少明，张湘伟，蔡永昌．非线性数值流形方法的变分原理与应用．应用数学与力学， 2000, 21(12): 1265～1270

75 Sasaki T, Morikawa S, Ishii D, Yuzo O. Elastic-plastic analysis of jointed rock models by manifold method. In: Proc of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, Japan, 1997. 309～316

76 王书法．加锚节理岩体变形分析的数值流形方法研究．岩石力学与工程学报， 2002, 21(8): 1120～1123

77 王芝银，李云鹏．数值流形方法中的几点改进．岩土工程学报， 1998, 20(6): 33～36

78 王芝银，李云鹏．岩体力学中的增量数值流形方法及其应用．西安矿业学院学报， 1998, 18(增): 23～27

79 朱以文，曾又林．岩石大变形分析的增量流形方法．岩石力学与工程学报， 1999, 18(1): 1～5

80 Ke Te-Chih, Tang Jyh-Haw. Modeling of solid-fluid interaction using the manifold method. In: Proceedings of 2nd North American Rock Mechanics Symposium, Montreal, Quebec, Canada, 1996. 1815～1822

81 王水林. 数值流形方法介绍及其应用. 岩土工程界， 2000, 3(12): 44～46

82 Yuzo Ohnishi, Makoto Tanaka, Tomofumi Koyama. Manifold method in saturated-unsaturated groundwater flow analysis. In: 3rd International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation from Theory to Practice, Vail, Colorado, USA, 1999. 1213～1228

83 Zhang Guoxin, Sugiura Yasuhito, Hasegawa Hiroo. Crack propagation and thermal fracture analysis by manifold method. In: Proc of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, Japan, 1997. 282～297

84 Yaw Jeng Chiou, Ren Jow Tsay, Wailin Chuang. Crack propagation using manifold method. In: Proc of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, Japan, 1997. 298～308

85 Tsay Ren Jow, Chiou Yaw Jeng, Chuang Wai lin. Crack growth prediction by manifold method. *Journal of Engineering Mechanics,* 1999, 125(8): 884～890

86 Paris P C, Sih G C. Stress analysis of cracks. *ASTM STP,* 1965, 38(1): 1～30

87 Erdogan F, Sih S C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *ASME, J basic Engng,* 1963, 8(5): 519～525

88 Lim I L, Johnston I W, On stress intensity factor computation from the quarter-point element displacements. *Commun Appl Numer Meth,* 1992, 8: 291～300

89 Yaw Jeng Chiou, Yu Min Lee, Ren Jow Tsay. Mixed mode fracture propagation by manifold method. *International Journal of Fracture,* 2002, 114: 327～347

90 Parks D M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors.*International Journal of Fracture,* 1974, 10: 487～502

91 Hellen T K. On the method of virtual crack extensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1975, 9: 187～207

92 Demkowicz L, Oden J T, Rachowicz W, et al. Toward a universal *h-p* adaptive finite element strategy, Part 1. Constrained approximation and data structure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 1989, 77: 79～112

93 王水林，葛修润．流形方法在模拟裂纹扩展中的应用．岩石力学与工程学报， 1997, 16(5): 405～410

94 王水林. 数值流形方法与裂纹扩展的模拟： [博士论文]. 武汉：中国科学院武汉岩土力学研究所， 1998. 5

95 Lin Dezhang, Mo Haihong. Manifold method of material analysis. In: Working Forum on the Manifold of Material Analysis, Vol. 1, Jenner, California, USA, WES, US Army Corps of Engineerings. 1995-10-04-06, 1995. 147～164

96 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: an overview and recent developments. *Comput Methods Appl Mech Engrg,* 1996, 139: 3～47

97 曹国金，姜弘道．无单元法研究和应用现状及动态．力学进展， 2002, 32(4): 526～534

98 周维垣，寇晓东．无网格法及其工程应用．力学学报，1998, 30(2): 193~202
99 Zhou Weiyuan, Yang Qiang, Kou Xiaodong. Manifold method and its applications to engineering. In: Proc of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, Japan, 1997. 274~281
100 周维垣，寇晓东．应用无单元法追踪裂纹扩展，岩石力学与工程学报， 2000, 19(1): 18~23
101 张国新，彭静．二阶流形元法与结构变形分析．力学学报， 2002, 34(2): 261~269
102 张国新，王光纶和裴觉民．基于流形方法的结构体破坏分析，岩石力学与工程学报， 2001, 20(3): 281~287
103 姜冬茹，骆少明．三维数值流形方法及其积分域的确定算法，汕头大学学报， 2002, 17(3): 29~36
104 Lin, Jeen Shang. A mesh-based partition of unity method for discontinuity modeling. *Comput Methods Appl Mech Engrg,* 2003, 192(11): 1515~1532
105 王后裕，朱可善．高次数值流形方法及其在弹性地基板中的应用．力学与实践， 2001, 3: 31~34
106 曹文贵．速宝玉．岩石锚固支护的数值流形方法模拟及其应用．岩土工程学报， 2001, 5: 581~583
107 唐树名，吕常新，邓安福．预应力锚索加固路堑边坡的数值流形分析．公路交通科技， 2002, 19(6): 10~14
108 骆少明，张湘伟，蔡永昌．金属成型过程的数值流形模拟方法研究．机械工程学报， 2002, 8: 110~116

NUMERICAL MANIFOLD METHOD AND ITS APPLICATIONS IN ROCK MECHANICS

LI Shuchen CHENG Yumin

Shanghai Institute of Applied Math and Mech, Shanghai University, Shanghai 200072, China

Abstract The Numerical Manifold Method (NMM) is one of important numerical methods to model rock mechanics problems at present. The NMM comes from the discontinuous deformation analysis, and is mainly used to combine continuous and discontinuous mechanics into a system. Two meshes are employed in the method: the mathematical mesh enables the nodes to build a finite cover system of the solution domain and the weighted functions, while the physical mesh provides the sub-domains of integration. The mathematical mesh is used to form mathematical covers. The physical covers are defined by the intersection of the mathematical covers and the physical mesh. And an element in the manifold method is defined by the intersection of physical covers. The advantages of the NMM are that the mathematical mesh and the physical mesh are generally independent, and that the manifold element is different from the finite element, and the mathematical mesh can be easily re-meshed to obtain a better accuracy of the solution. The NMM can simulate the open and close process of crack in the fractured rockmass due to the fact that the kinematics theory of the block system is considered in it. Therefore the method has been widely used in rock mechanics, and has been studied by many scholars in recent years. In the paper, the advances of the numerical methods of the fractured rockmass from continuous to discontinuous domains are discussed. The components of the numerical manifold method and its applications in rock mechanics and the advances in corresponding fields are discussed in detail. Finally, some problems, such as the NMM for three-dimension problems, physical nonlinear problems, crack propagation, related coupled methods etc., are discussed.

Keywords numerical manifold method, discontinuous deformation analysis, rock mechanics, crack growth, large deformation