

电弹性体力学中的偏场方法及其应用

YANG Jiashi (杨嘉实)¹ 胡元太² 杨新华²

¹Department of Engineering Mechanics, University of Nebraska, Lincoln, NE 68588-0526

²华中科技大学力学系, 武汉 430074

摘要 主要综述了当前有关叠加于偏场之上的电弹性体小位移问题的求解方法, 即偏场方法. 首先介绍了作为偏场方法理论基础的非线性电弹性力学理论, 接着总结了偏场方法的研究进展以及受偏场作用后, 电弹性梁、板、壳结构的分析方法, 随后综述了偏场方法的诸多应用: 其中, 包括在薄壁电弹性结构屈曲分析中的应用、在记时与通信压电谐振器和基于频率漂移原理所设计的声波传感器的频率稳定性分析方面的应用、在非线性电弹性材料系数的测定以及偏场作用下电致伸缩陶瓷特征的分析等方面的应用. 最后给出了该领域当前和未来的一些可能的研究课题. 全文参考文献 166 篇.

关键词 电弹性体力学, 偏场方法, 增量场, 谐振器, 非线性材料系数, 频率漂移

1 引言

电弹性材料具有力电耦合特性, 在电场作用下会产生机械变形, 在机械载荷作用下又会发生电极化现象. 严格地说, 压电性指的是线性力电耦合特征, 而电致伸缩可以说是最简单的非线性力电耦合行为, 因为这时力场依赖于电场的二次项. 长期以来, 压电材料被用于制造许多力电器件, 比如用于实现机械能和电能转换的换能器, 用于频率控制、远程通信和精确记时的谐振器, 以及声波传感器等. 其中, 以共振器件的应用最为广泛. Dokmeci^[1] 综述了压电体的振动研究. Wang 和 Yang^[2] 综述了压电板理论及其在压电谐振器中的应用. 而智能结构的最新进展极大地展示了压电材料的全新应用领域. 关于压电材料在智能结构中应用的综述文章有 Rao 和 Sunar^[3], Sunar 和 Rao^[4], Chee 等^[5], Tani 等^[6].

线性压电理论假设材料内部事先不存在力、电场(初始或偏场状态), 材料的变形和运动与理想的参考状态偏离不远. 而偏场的存在完全改变了材料行为, 导致线性压电理论失效. 在偏场作用下电弹性体的行为可以采用叠加于有限偏场之上的小增量场理论来描述, 这是完全非线性电弹性理论的结果. 有关偏场作用下电弹性体行为特征方面的知识, 对包括压电结构屈曲分析、压电谐振器的频率稳定性分析、基于偏

场引起的频率漂移原理而设计的声波传感器分析、非线性电弹性材料系数的测定以及在电偏场中使用的电致伸缩陶瓷的特征分析等问题来说非常重要.

本文评述了关于电弹性力学中偏场方法的研究进展及其在上面所提及的所有领域中的应用, 指出了在该领域中尚需研究的几个具有挑战性的问题. 作者希望本文能对这一迅速成长的跨学科领域给出一个比较恰当的评论.

2 非线性电弹性理论

关于电弹性体力学的偏场方法, 应由完整的三维非线性电弹性理论导出. 本节将首先综述电弹性体力学的非线性理论.

早期用于较大机械变形和较高电场分析的非线性电弹性理论是由 Toupin 提出的, 其公式是关于 7 个未知物理量的方程组^[7]; Eringen 在文^[8]中所导出的非线性电弹性理论也是含有 7 个未知函数的方程组. 而我们下面将要给出的是由 Tiersten 在文^[9]中所得到的公式, 这是一个关于四个未知函数的基本方程组, 类似的工作还可参见 Nelson 的工作^[10].

2.1 电体力、电体力偶和电功率

考虑发生有限变形的电弹性体(见图 1). 用 X

*Applied Mechanics Reviews 惠允版权翻译此文 (Published with Permission from Applied Mechanics Reviews, Volume 57, 2004)

和 \mathbf{y} 分别表示物质点的参考坐标和现时坐标, ϕ 为静电势. 于是, 连续体的运动可通过 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{X}, t)$ 来描述.

当可变形、可极化的材料受到电场作用时, 其微分单元会受到电体力和电体力偶的共同作用. 因此, 利用电场所引起的电体力、电体力偶和电功率的公式, 可以推导出电弹性体力学的基本方程. Eringen 和 Maugin 通过对带电粒子相关场的统计平均得到了这些公式^[11]. Tiersten 引进了一个电极化物理模型, 该模型将电弹性体模拟为两种相互作用的连续介质, 其中一个是具有质量并带正电荷的晶格连续体, 另一个是没有质量但带负电荷的电连续体. 通过电连续体相对晶格连续体的微小位移来描述电极化, 将一些基本的物理规律系统地应用到每一个连续体上, 即得到一组电弹性体力学的基本方程, 其中, 电体力 F_j^E 、电体力偶 C_j^E 和电功率 w^E 的表达式为^[9]

$$\begin{aligned} F_j^E &= \rho_e E_j + P_i E_{j,i} \\ C_i^E &= \varepsilon_{ijk} P_j E_k \\ w^E &= F_j^E v_j + \rho E_i \dot{\pi}_i \end{aligned} \quad (1)$$

采用两点笛卡尔张量表示法, 对重复指标从 1 到 3 求和. 小写指标表示现时构形, 大写指标表示参考构形. 变量上面的点表示物质时间导数. E_i 为电场矢量, P_i 为极化矢量, ρ 为质量密度, ρ_e 为自由电荷密度, v_j 为速度矢量, $\pi_i = P_i/\rho$ 为单位质量的极化强度, ε_{ijk} 为置换张量. 我们注意到, 电体力和电体力偶是电学物理量的二次方, 故在线性压电理论中, 它们将不会出现. 另外, 电体力偶的出现使得 Cauchy 应力张量不再对称.

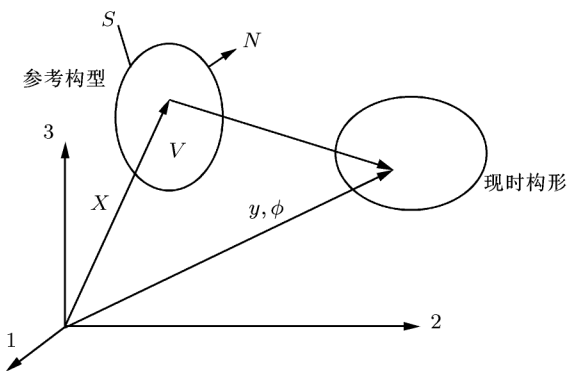


图 1 有限变形的电弹性体

2.2 控制方程

求得了电体力、电体力偶和电功率的表达式之后, 非线性电弹性理论的运动方程和电荷平衡方程

就可以写成 (Tiersten^[12])

$$\begin{aligned} K_{Li,L} + \rho_0 f_i &= \rho_0 \ddot{y}_i \\ \Delta_{K,K} &= \rho_E \end{aligned} \quad (2)$$

式中 ρ_0 为参考构型下的质量密度, ρ_E 为参考构型下的自由电荷体密度, f_i 为单位质量的机械体力. 在 (2) 式中, 第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 K_{Li} (不对称) 和参考电位移矢量 Δ_K 由下式给出

$$\begin{aligned} K_{Li} &= y_{i,K} \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} + \\ & J X_{L,j} \varepsilon_0 \left(E_j E_i - \frac{1}{2} E_k E_k \delta_{ij} \right) \\ \Delta_K &= \varepsilon_0 J X_{K,i} E_i - \frac{\partial \Sigma}{\partial W_K} \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $J = \det(y_{i,K})$, $E_i = -\phi_{,i}$, δ_{ij} 为 Kronecker 张量, ε_0 为真空介电常数. K_{Li} 表达式中的第二项是两点 Maxwell 应力张量, 它与电体力 F_j^E 相关, 并且是电学量二次方. 因此, Maxwell 电应力张量在线性理论中通常是被忽略的. $\Sigma(E_{KL}, W_K)$ 是与有限应变张量 E_{KL} 和参考电势梯度 W_K 有关的自由能密度函数. E_{KL} 和 W_K 定义如下

$$\begin{aligned} E_{KL} &= (y_{i,K} y_{i,L} - \delta_{KL})/2 \\ W_K &= -\phi_{,K} \end{aligned} \quad (4)$$

式中 δ_{KL} 为 Kronecker 张量. 经过变换, 式 (2) 可以写为关于 $\mathbf{y}(\mathbf{X}, t)$ 和 $\phi(\mathbf{X}, t)$ 的 4 个方程. 在较小的机械变形和电场情形下, 将这 4 个方程线性化即得到线性压电理论中的基本方程. 非线性电弹性材料的本构关系通过自由能给出

$$\begin{aligned} \Sigma(E_{KL}, W_K) &= \frac{1}{2} c_2 ABCD E_{AB} E_{CD} - e_{ABC} W_A E_{BC} - \\ & \frac{1}{2} \chi_{2AB} W_A W_B + \frac{1}{6} c_3 ABCDEF E_{AB} E_{CD} E_{EF} + \\ & \frac{1}{2} k_1 ABCDE W_A E_{BC} E_{DE} - \frac{1}{2} b_{ABCD} W_A W_B E_{CD} - \\ & \frac{1}{6} \chi_{3ABC} W_A W_B W_C + \\ & \frac{1}{24} c_4 ABCDEFGH E_{AB} E_{CD} E_{EF} E_{GH} + \\ & \frac{1}{6} k_2 ABCDEFG W_A E_{BC} E_{DE} E_{FG} + \\ & \frac{1}{4} a_1 ABCDEF W_A W_B E_{CD} E_{EF} + \\ & \frac{1}{6} k_3 ABCDE W_A W_B W_C E_{DE} - \\ & \frac{1}{24} \chi_{4ABCD} W_A W_B W_C W_D + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

式中材料常数

$$\begin{aligned} & c_{2ABCD}, e_{ABC}, \chi_{2AB} \\ & c_{3ABCDEF}, k_{1ABCDE}, b_{ABCD}, \chi_{3ABC} \\ & c_{4ABCDEFGH}, k_{2ABCDEFG}, a_{1ABCDEF} \\ & k_{3ABCDE}, \chi_{4ABCD} \end{aligned} \quad (6)$$

分别被称为二阶弹性、压电和介电常数、三阶弹性常数、第一奇电弹性常数、电致伸缩常数、三阶介电常数、四阶弹性常数、第二奇电弹性常数、第一偶电弹性常数、第三奇电弹性常数、以及四阶介电常数。这些材料常数被称为基本材料常数。二阶材料常数体现材料的线性行为，三阶及三阶以上材料常数体现非线性行为。 $\Sigma(E_{KL}, W_K)$ 的形式与材料的对称性相关。目前，关于构造所有晶体材料的对称张量和矢量的基矢集已经研究得比较清楚了 (Smith 等^[13], Spencer^[14])。我们注意到，由二阶材料常数所构成的 Σ 的二次型是非正定的。

2.3 边界条件和变分公式

假设物体在参考构形中所占据的区域为 V ，其边界面为 S (见图 1)。从力学边界划分的角度来说， S 可以分为给定位移的边界 S_y 和给定应力的边界 S_T ；从电学边界划分的角度来说， S 可以分为给定电势的边界 S_ϕ 和给定自由电荷面密度的边界 S_σ

$$\begin{aligned} S_y \cup S_T &= S_\phi \cup S_\sigma = S \\ S_y \cap S_T &= S_\phi \cap S_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

电弹性体的一般边值问题是由方程 (2) ~ 方程 (4) 和下面的边界条件组成

$$\begin{aligned} y_i &= \bar{y}_i \quad \text{on } S_y \\ \phi &= \bar{\phi} \quad \text{on } S_\phi \\ K_{Lk} N_L &= \bar{T}_k \quad \text{on } S_T \\ \Delta_K N_K &= -\bar{\sigma} \quad \text{on } S_\sigma \end{aligned} \quad (8)$$

式中 \mathbf{N} 为 S 的单位外法矢 (见图 1)， \bar{y}_i 和 $\bar{\phi}$ 分别为给定的边界运动和电势， \bar{T}_i 为相对于变形前单位面积上的张力。 $\bar{\sigma}$ 为相对于变形前单位面积上的电荷。对于动力问题，当然还需给出初始条件。

可以证明：在 (4) 和 (8)_{1,2} 的约束下，根据应力张量和电位移矢量的定义 (4)，可由下面的 Hamilton 型泛函

$$\begin{aligned} \Pi(y_i, \phi) &= \int_{t_0}^t dt \int_V \left[\frac{1}{2} \rho_0 \dot{y}_i \dot{y}_i - \right. \\ & \left. \Sigma(E_{KL}, W_K) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_k E_k + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \rho_0 \int_{t_0}^t dt \int_{S_T} \bar{T}_i y_i dS - \right. \\ & \left. \int_{t_0}^t dt \int_{S_\sigma} \bar{\sigma} \phi dS \right] \quad (9) \end{aligned}$$

的驻值条件导出 (2) 和 (8)_{3,4} (Maugin 和 Epstein^[15], Yang 和 Batra^[16])。

在 (3) 中，将应力张量和电位移矢量分成了两部分：一部分与自由能有关；另一部分与电场有关。但如果按照下式来定义能量密度 $\hat{\Sigma}$

$$-\hat{\Sigma}(E_{KL}, W_K) = -\Sigma(E_{KL}, W_K) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 J E_k E_k \quad (10)$$

的话，则可不用 (3) 的分解法而直接将应力张量和电位移矢量写成 $\hat{\Sigma}$ 的偏导数表达式。

3 迭加于有限偏场之上的小增量场的线性方程

对于某些类型的问题，物体的最终状态可通过两步达到：一是在初始偏场作用下产生有限静态变形和电场；二是偏场之上的静态或动态的小增量场。在这种情况下，我们可以通过求解一系列线性偏微分方程而得到物体的最终状态，只不过方程的系数与初始变形和场有关，这就是偏场方法。许多技术上非常重要的问题都可以利用这一方法处理。Verma 和 Chaudhry^[17] 采用 Eringen 公式发展了各向同性弹性电介质的增量场理论。Baumhauer 和 Tiersten^[18] 开展了比较完整的工作，Tiersten^[12,19] 也进行了类似的处理。相似的方程还可以在 Iesan^[20], Eringen 和 Maugin^[11] 的文章中找到。下面，根据 Baumhauer 和 Tiersten^[18], Tiersten^[12,19] 的工作，对该理论作简要叙述。

3.1 迭加于有限偏场之上的小增量场

考虑图 2 所示电弹性体的以下 3 种构型

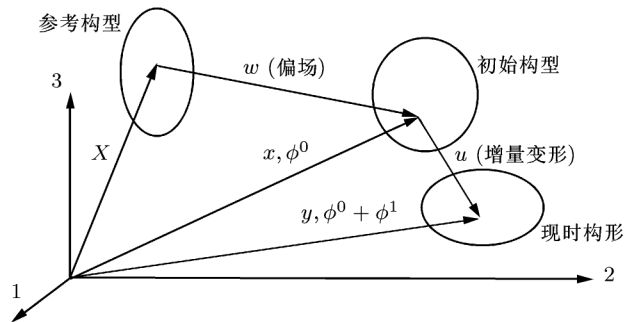


图 2 电弹性体的参考构型、初始构型和现时构型

(1) 参考构型。在 $t = 0$ 时刻，物体未发生变形而且不受电场作用。参考构型中的物质点用 \mathbf{X} 表示，其笛卡尔坐标为 X_K ；

(2) 初始构型. 此时, 物体上已受到有限静电场作用, 并且发生了有限静态变形. 我们称这种变形和电场为偏场. 此时物质点 \mathbf{X} 的位置为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$ 或 $x_\gamma = x_\gamma(\mathbf{X})$, 应变为 $E^0, \phi^0(\mathbf{X})$ 为电势, \mathbf{W}^0 为电势梯度. $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ 和 $\phi^0(\mathbf{X})$ 满足前一节所讨论的静态非线性电弹性力学方程;

(3) 现时构型. 向已在初始构型中发生了静态变形的物体之上再施加与时间相关的小增量变形和电场. \mathbf{X} 的最终位置由 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{X}, t)$ 确定, 最终电势为 $\phi^0(\mathbf{X}) + \phi^1(\mathbf{X}, t)$. $\mathbf{y}(\mathbf{X}, t)$ 和 $\phi^0(\mathbf{X}) + \phi^1(\mathbf{X}, t)$ 应满足前一节所给出的非线性电弹性动力学方程.

记位移增量为 $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, 因为我们假设了 \mathbf{u} 和 ϕ^1 非常小, 所以可以将 $\mathbf{y}, \phi^0 + \phi^1$ 和其它场变量展开成 \mathbf{u} 和 ϕ^1 的幂级数形式, 并代入关于现时构型的非线性方程之中, 得到级数形式的方程组, 其中, 零阶项对应非线性电弹性力学静态方程, 一阶项是关于小增量场的线性基本方程

$$\begin{aligned} K_{K\alpha, K}^1 + \rho_0 f_\alpha^1 &= \rho_0 \ddot{u}_\alpha \\ \Delta_{K, K}^1 &= \rho_E^1 \end{aligned} \quad (11)$$

式中, f_α^1 为体力增量, ρ_E^1 自由电荷密度增量. Greek 指标表示初始构型指标. 应力增量 $K_{K\alpha}^1$ 和电位移增量 Δ_K^1 线性依赖于位移梯度和电势梯度.

$$\begin{aligned} K_{L\gamma}^1 &= G_{L\gamma M\alpha} u_{\alpha, M} + R_{ML\gamma} \phi_{, M}^1 \\ \Delta_K^1 &= R_{KL\gamma} u_{\gamma, L} - L_{KL} \phi_{, L}^1 \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $G_{K\alpha L\gamma}, R_{KL\gamma}$ 和 L_{KL} 分别被称为有效弹性常数、有效压电常数和有效介电常数. 其表达式分别为 (Tiersten^[19])

$$\begin{aligned} G_{K\alpha L\gamma} &= x_{\alpha, M} \left. \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial E_{KM} \partial E_{LN}} \right|_{\mathbf{E}^0, \mathbf{W}^0} x_{\gamma, N} + \\ &T_{KL}^0 \delta_{\alpha\gamma} + g_{K\alpha L\gamma} = G_{L\gamma K\alpha} \\ R_{KL\gamma} &= - \left. \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial W_K \partial E_{ML}} \right|_{\mathbf{E}^0, \mathbf{W}^0} x_{\gamma, M} + r_{KL\gamma} \\ L_{KL} &= - \left. \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial W_K \partial W_L} \right|_{\mathbf{E}^0, \mathbf{W}^0} + l_{KL} = L_{LK} \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} T_{KL}^0 &= \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} \right|_{\mathbf{E}^0, \mathbf{W}^0} \\ g_{K\alpha L\gamma} &= \varepsilon_0 J_0 [E_\alpha^0 E_\beta^0 (X_{K, \beta} X_{L, \gamma} - X_{K, \gamma} X_{L, \beta}) - \\ &E_\alpha^0 E_\gamma^0 X_{K, \beta} X_{L, \beta} + E_\beta^0 E_\gamma^0 (X_{K, \alpha} X_{L, \beta} - \\ &X_{K, \beta} X_{L, \alpha}) + \frac{1}{2} E_\beta^0 E_\beta^0 (X_{K, \gamma} X_{L, \alpha} - \\ &X_{K, \alpha} X_{L, \gamma})] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} r_{KL\gamma} &= \varepsilon_0 J_0 (E_\alpha^0 X_{K, \alpha} X_{L, \gamma} - E_\alpha^0 X_{K, \gamma} X_{L, \alpha} - \\ &E_\gamma^0 X_{K, \alpha} X_{L, \alpha}) \\ l_{KL} &= \varepsilon_0 J_0 X_{K, \alpha} X_{L, \alpha} \end{aligned}$$

我们注意到: 有效材料系数与初始变形 $x_\alpha(\mathbf{X})$ 和电势 $\phi^0(\mathbf{X})$ 有关. 需要强调的是, 即使所讨论的材料是线性的, 也就是只涉及到二阶材料常数, 但有效材料常数仍然会随着偏场变化. 一般来说, 式 (12), 式 (13) 中的有效材料常数的对称性比基本的线弹性、压电和介电常数的对称性要低. 这种情况称为偏场诱导各向异性. 在极端情况下, $G_{K\alpha L\gamma}$ 可以有 45 个独立分量, $R_{KL\gamma}$ 可以有 27 个独立分量, 而 L_{KL} 可以有 6 个独立分量. 另外, 式 (13) 的对称性表明式 (11), 式 (12) 中的微分算子是自洽的 (self-adjoint). 由于 $G_{K\alpha L\gamma}, R_{KL\gamma}$ 和 L_{KL} 对初始变形和场的依赖性, 所以, 一般来说式 (12) 中的有效材料系数是可以随位置变化而变化的. 在式 (11), 式 (12) 中, 我们选择了参考坐标 X_K 为自变量, 也有一些研究人员, 如 Eringen 和 Maugin^[11] 等, 将 x_α 作为自变量.

关于增量场 \mathbf{u} 和 ϕ^1 的定解条件由式 (11), 式 (12) 和下面的边界条件构成

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \bar{u}_\alpha && \text{on } S_y \\ \phi^1 &= \bar{\phi}^1 && \text{on } S_\phi \\ K_{L\alpha}^1 N_L &= \bar{T}_\alpha^1 && \text{on } S_T \\ \Delta_K^1 N_K &= -\bar{\sigma}^1 && \text{on } S_\sigma \end{aligned} \quad (15)$$

关于小增量场的方程也可以通过将幂级数展开式代入非线性电弹性力学的变分泛函式 (9) 而得到. 该方法已被 Dokmeci^[21], Chen 等^[22] 和 Yang^[23] 等所采用. 对增量场方程求变分可以自动产生关于小增量场方程的二次变分泛函

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{u}, \phi^1) &= \int_{t_0}^t dt \int_V \left(\frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_\alpha \dot{u}_\alpha - \right. \\ &\frac{1}{2} G_{K\alpha L\gamma} u_{K, \alpha} u_{L, \gamma} - R_{KL\gamma} \phi_{, K}^1 u_{L, \gamma} + \\ &\left. \frac{1}{2} L_{KL} \phi_{, K}^1 \phi_{, L}^1 + \rho_0 f_\alpha^1 u_\alpha - \rho_E^1 \phi^1 \right) dV \\ &+ \int_{t_0}^t dt \int_{S_T} \bar{T}_\alpha^1 u_\alpha dS - \int_{t_0}^t dt \int_{S_\sigma} \bar{\sigma}^1 \phi^1 dS \end{aligned} \quad (16)$$

对式 (16) 求变分并利用约束条件式 (15)_{1,2} 和应力张量、电位移的定义式 (12), 可以得到式 (11) 和式 (15)_{3,4}. 式 (16) 在推导结构理论和发展数值方法方面是非常有用的.

3.2 小偏场的线性效应

在许多实际应用中, 偏场也很小, 所以它们对增量场影响也是线性的. 这时有

$$\begin{aligned} G_{K\alpha L\gamma} &= c_{2K\alpha L\gamma} + \hat{c}_{K\alpha L\gamma} \\ R_{KL\gamma} &= e_{KL\gamma} + \hat{e}_{KL\gamma} \\ L_{KL} &= \varepsilon_{KL} + \hat{\varepsilon}_{KL} \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{c}_{K\alpha L\gamma} &= c_{2K\alpha LN} w_{\gamma, N} + \\ & c_{2KNL\gamma} w_{\alpha, N} + c_{3K\alpha L\gamma AB} E_{AB}^0 + \\ & k_{1AK\alpha L\gamma} W_A^0 + T_{KL}^0 \delta_{\alpha\gamma} \\ \hat{e}_{KL\gamma} &= e_{KLM} w_{\gamma, M} - k_{1KL\gamma AB} E_{AB}^0 + b_{AKL\gamma} W_A^0 + \\ & \varepsilon_0 (W_K^0 \delta_{L\gamma} - W_L^0 \delta_{K\gamma} - W_M^0 \delta_{M\gamma} \delta_{KL}) \\ \hat{\varepsilon}_{KL} &= b_{KLAB} E_{AB}^0 + \chi_{3KLA} W_A^0 + \\ & \varepsilon_0 (E_{MM}^0 \delta_{KL} - 2E_{KL}^0) \\ \varepsilon_{KL} &= \varepsilon_0 \delta_{KL} + \chi_{2KL} \\ T_{KL}^0 &= c_{2KLMN} E_{MN}^0 - e_{MKL} W_M^0 \\ E_{AB}^0 &\cong (w_{A, B} + w_{B, A})/2 \\ W_M^0 &= -\phi_{, M}^0 \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $w(\mathbf{X})$ 为偏场位移 (见图 2). 这种情况下可用同一坐标系描述 \mathbf{X} 和 \mathbf{x} , 那么, $\delta_{K\gamma}$ 就变成 Kronecker 张量. 从式 (18) 可以看出, 为了对小偏场的一阶效应进行完整描述, 必须知道三阶材料常数. 但这一点被很多研究人员忽视了, 他们仅考虑了二阶材料常数.

从式 (17) 可以发现, 有效材料常数是由基本材料常数 $c_{2K\alpha L\gamma}$, $e_{KL\gamma}$ 和 ε_{KL} 通过 $\hat{c}_{K\alpha L\gamma}$, $\hat{e}_{KL\gamma}$ 和 $\hat{\varepsilon}_{KL}$ 修正而得到的. 当偏场很小时, $\hat{c}_{K\alpha L\gamma}$, $\hat{e}_{KL\gamma}$ 和 $\hat{\varepsilon}_{KL}$ 可能比 $c_{2K\alpha L\gamma}$, $e_{KL\gamma}$ 和 ε_{KL} 小几个量级, 这时若直接利用有限单元方法等, 对求解精度要求较高. 而解析法 (比如摄动与结构理论相结合) 可以得出简单且精确的结果.

3.3 结构理论

从结构上看, 许多力电器件都是薄壁梁、板和壳. 因此, 结构理论在器件的设计和应用方面是非常重要的. 为了研究力电器件中偏场的影响, 与式 (11), 式 (12) 相对应的结构理论已经由变分公式 (16) 得出. Hu 等 [24] 导出了含剪切变形的矩形截面梁拉伸和弯曲问题的一维方程. Hu 等在文 [25 ~ 27] 中也导出了含剪切变形的板拉伸和弯曲运动方程. Hu 等在文 [26] 中指出: 而偏场作用下, 板的拉伸和弯曲可能会由于偏场的存在而耦合, 但对于结构理论来说, 则只与偏场的各阶矩有关, 而并不与偏场的三维精确分布产生直接联系. Dokmeci [28] 导出了偏场作

用下电弹性板高频振动的二维方程. 高频振动模态中包含了基本的厚度 - 剪切模式. Dokmeci [21] 和 Hu 等 [29] 还导出了偏场作用下电弹性壳的二维方程. Dokmeci [30] 也给出了偏场作用下层合电弹性壳的基本方程. 这些结构方程将在后面讨论的许多器件设计和分析中应用到.

3.4 热效应

在一些工程应用中, 由温度变化所引起的偏场分布必须加以研究. Dulmet 和 Bourquin [31, 32], Dulmet 等 [33], Yong 和 Wei [34, 35] 等给出了当温度均匀变化时, 电弹性体在自由热膨胀偏场作用下的基本方程. Iesan [20, 36], Chen 等 [22] 和 Yang [37] 等由热电弹性非线性理论导出了关于叠加于一般热力电偏场之上的小增量场的基本方程. Dulmet 和 Bourquin [32] 指出: 热电弹性体中的高频增量运动可以看作是等熵的. 那么, 根据等熵近似, 增量温度场可以用增量力电场表示, 这样就可以去除增量温度场对本构关系中其余项的影响, 从而得到一组与式 (11), 式 (12) 形式相同的增量场电弹性方程, 只不过下面的有效材料常数已用等熵条件去除了增量温度场 (Yang [37])

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{K\alpha L\gamma} &= G_{K\alpha L\gamma} + \rho_0 \frac{\Lambda_{K\alpha} \Lambda_{L\gamma}}{\alpha} = \tilde{G}_{L\gamma K\alpha} \\ \tilde{R}_{LK\alpha} &= R_{LK\alpha} - \rho_0 \frac{\Xi_L \Lambda_{K\alpha}}{\alpha} \\ \tilde{L}_{KL} &= L_{KL} - \rho_0 \frac{\Xi_K \Xi_L}{\alpha} = \tilde{L}_{LK} \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $\Lambda_{K\alpha}$ 为有效热弹性常数. Ξ_K 为有效热电常数, α 为比热.

4 初应力理论和薄壁压电结构的屈曲

偏场方法的最典型和直接的应用可能就是薄壁结构的屈曲问题. 对于屈曲现象的经典描述, 与弹性理论中的初应力理论相对应的电弹性理论是足够的. 它是叠加于偏场之上的小增量场理论的一个特殊情况.

4.1 电弹性体的初始应力理论

为了由增量场理论得到电弹性材料的初始应力理论, 我们在偏场方法的增量场方程中, 令 $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ (Iesan [20]). 更进一步地, 对于屈曲分析来说, 仅取式 (5) 右边的前三项关于 Σ 的二次型表达式已经足够, 并且偏场可以视为小场处理. 那么有效材料常数可以取下面的简单形式

$$\begin{aligned}
G_{K\alpha L\gamma} &= c_{2K\alpha L\gamma} + T_{KL}^0 \delta_{\alpha\gamma} \\
R_{KL\gamma} &= e_{KL\gamma} + \varepsilon_0 (W_K^0 \delta_{L\gamma} - \\
&\quad W_L^0 \delta_{K\gamma} - W_M^0 \delta_{M\gamma} \delta_{KL}) \\
L_{KL} &= \varepsilon_{KL}
\end{aligned} \quad (20)$$

式中 T_{KL}^0 为初始应力, W^0 为初始电场, T_{KL}^0 和 W^0 与初始应力理论无关, 需要预先给定.

4.2 薄壁电弹性结构的屈曲

Wang 和 Shang^[38], Shang 等^[39], Tian 等^[40] 利用三维方程研究了压电层合板的屈曲问题. Cheng 和 Shen^[41] 利用三维方程分析了压电圆柱壳的屈曲. Yang^[42,43], Hu 等^[44,24,26,27,29,45], Yang 和 Hu^[46] 利用结构理论进行了压电梁、板和壳的屈曲分析. 结构理论有时可以得到比较简单的解析解, 作为一个实例, 考虑图 3 所示的压电双晶片板.

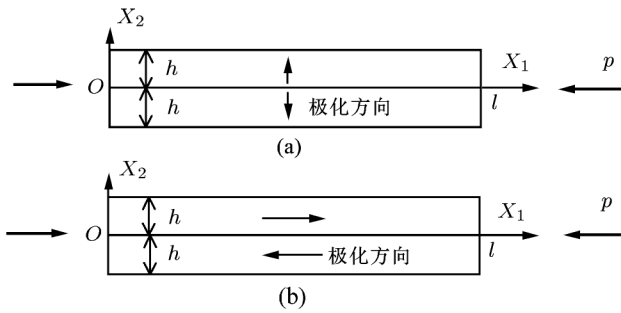


图 3 简支电弹性双晶片

由于单层压电板中的均匀电场只会引起应变而不会产生弯曲, 因此考虑用压电双晶片来使得弯曲与板厚度方向均匀分布的电场耦合. 根据 Hu 等^[26] 的工作, 图 3 中两种情况下的屈曲载荷分别为

$$p_{cr}^{\text{Piezoelectric}} = \begin{cases} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\bar{e}_{33}^2}{\varepsilon_{33} \bar{c}_{33}}\right) \frac{2\pi^2 h^3 \bar{c}_{33}}{3l^2}, & \text{情况(a)} \\ \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\bar{e}_{31}^2}{\varepsilon_{33} \bar{c}_{11}}\right) \frac{2\pi^2 h^3 \bar{c}_{11}}{3l^2}, & \text{情况(b)} \end{cases} \quad (21)$$

其中, 上面带“-”的材料常数表示已通过释放板厚度方向的正应力而得到的修正材料常数. 上面的表达式和结果表明, 压电结构的屈曲载荷与没有考虑压电效应所得到的弹性屈曲载荷常具有下列关系

$$p_{cr}^{\text{Piezoelectric}} = (1 + \alpha k^2) p_{cr}^{\text{Elastic}} \quad (22)$$

式中, α 是一小正数, 它与结构材料和几何特征有关. $k^2 = e^2 / c\varepsilon > 0$ 为力电耦合系数. 从式 (22) 发现: 力电耦合效应会有效提高结构的屈曲载荷. 所以我们说, 忽略力电耦合效应的弹性分析所得到的屈曲

载荷偏于保守. 从熟知的压电增强刚度效应来看, 这种结果是很正常的.

5 压电谐振器的频率稳定性

研究电弹性体偏场方法的最初目的是用它来研究压电谐振器的频率稳定性. 在商用或军工电子设备中, 压电谐振器被广泛用于频率控制和选择, 以及精确计时和同步, 也可以用于后面将要讨论的声波传感器中. 压电谐振器是在特定固有频率下工作的谐振器件, 其相关的模态 (或波) 要么是表面声波 (SAW), 如 Rayleigh 波, 要么是体积声波 (BAW). 图 4 给出的是采用石英板制成的 BAW 谐振器及其封装.

晶体板可能以不同的模态振动, 但是, 对于板式谐振器来说, 最经常使用的还是厚度 - 剪切振动模态. 静态的厚度 - 剪切变形沿板厚度方向的剪切位移分布以及前几个厚度剪切 - 振动模态都已画在了图 5 中 (Benes 等^[47]). 由板厚度方向电场所激起的奇数模式 ($n = 1, 3, \dots$), 通常被用作压电谐振器的工作模态.

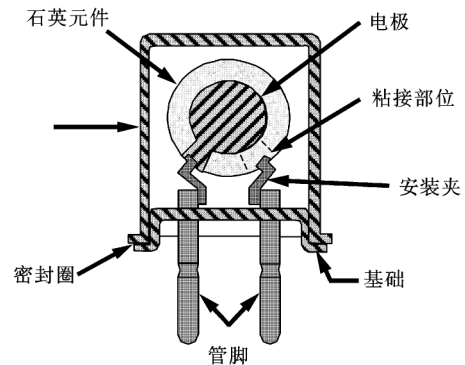


图 4 声波压电谐振器及其封装

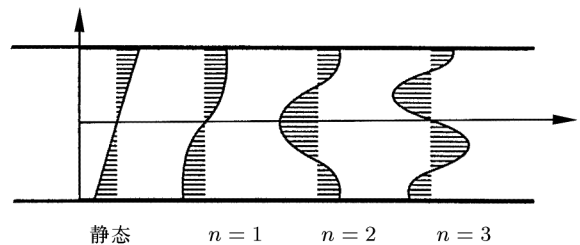


图 5 板厚 - 剪切静态变形及振动模态 (Benes 等^[47])

5.1 理想的谐振器

压电谐振器的基本设计是以无偏场作用下线性压电体在室温下的振动频率分析为基础的, 这可称为理想共谐振器的零阶分析. 其代表性的工作有早期 Mindlin 基于线性压电特征值问题所作的研究 (Dere-

siewicz 等 [48]).

$$\begin{aligned} &-(c_{2L\gamma M\alpha}U_{\alpha,M} + e_{ML\gamma}\Phi_{,M}),_L = \rho_0\omega_0^2U_\gamma \\ &(e_{KL\gamma}U_{\gamma,L} - \varepsilon_{KL}\Phi_{,L}),_K = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

式中, ω_0 和 U_α 分别为不存在偏场时的共振频率及其相应的振动模式, 称为无干扰的频率和模式.

式 (23) 中的许多解析解或数值解已经通过三维方程和结构理论精确或近似地得到了, 有许多人讨论过如何求解式 (23), 大部分参考文献可见 Dokmeci^[1], Wang 和 Yang^[2] 等人的综述文章. 零阶分析是理解和设计谐振器的基础.

5.2 偏场作用下的谐振器

由零阶分析结果所设计的器件, 在大多数应用中存在偏差. 对于有效的器件设计来说, 环境因素 (如在谐振器中引起偏场分布的温度变化、力和加速度等) 对频率稳定性的一阶效应必须考虑. 于是对应的特征问题是以叠加于小偏场之上的小增量场理论为基础的. 由 (11), (12), (17) 三式可得

$$\begin{aligned} &-[(c_{2L\gamma M\alpha} + \hat{c}_{L\gamma M\alpha})u_{\alpha,M} + (e_{ML\gamma} + \\ &\hat{e}_{ML\gamma})\phi_{,M}^1],_L = \rho_0\omega^2u_\gamma \end{aligned} \quad (24)$$

$$[(e_{KL\gamma} + \hat{e}_{KL\gamma})u_{\gamma,L} - (\varepsilon_{KL} + \hat{\varepsilon}_{KL})\phi_{,L}^1],_K = 0$$

式中, ω 和 u_α 分别为存在偏场时的共振频率及其对应的振动模式. Tiersten^[49] 的研究表明, 压电共振器中由偏场引起的频率漂移可以通过下面积分式表示, 该积分式由一阶摄动积分导出.

$$\Delta\omega = \frac{1}{2\omega_0} \frac{\int_V \langle \mathbf{U}, \Phi \rangle dV}{\int_V \rho_0 U_\alpha U_\alpha dV} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \Phi \rangle &= \hat{c}_{L\gamma M\alpha}U_{\gamma,L}U_{\alpha,M} + \\ &2\hat{e}_{ML\gamma}\Phi_{,M}U_{\gamma,L} - \hat{\varepsilon}_{ML}\Phi_{,M}\Phi_{,L} \end{aligned}$$

式中, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ 为由偏场引起的频率漂移, $\hat{c}_{L\gamma M\alpha}$, $\hat{e}_{ML\gamma}$ 和 $\hat{\varepsilon}_{LM}$ 见式 (18) 所示. 式 (25) 有效地

将含偏场影响的复杂特征值问题式 (24) 分解成二个相对简单的问题: 求解偏场和求解无偏场时的振动问题. 大多数压电谐振器采用石英制作, 石英是一种压电耦合效应较弱的材料, 因此对许多应用问题, 忽略式 (25) 中的 $\hat{e}_{ML\gamma}$ 和 $\hat{\varepsilon}_{LM}$ 项, 仍然具有足够的精确度. 这一小节和下一小节所引用的一些文献就利用了这一特点.

5.3 加速度敏感性和其他力电偏场效应

对于在计时和远程通信设备中使用的谐振器, 必须使频率漂移最小. 这些设备经常安装在移动物体上, 例如导弹或卫星, 因此, 由加速度和惯性力引起的频率漂移最受关注. 在军事方面的应用要求将产品技术从现今的 $|\Delta\omega/\omega_0| < 10^{-10}/g$ (g 为重力加速度) 改进到 $10^{-12}/g$ 或更好.

假设谐振器具有恒定加速度 a_K , 矢量 Γ_K 表示其加速度敏感性, 由 a_K 引起的频率漂移为

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \Gamma_K a_K \quad (26)$$

其中 $f = \omega/2\pi$, 频率漂移 $\Delta f = f - f_0$. 方程 (26) 对小加速度情况是有效的. 许多 SAW 或 BAW 谐振器含各种形状的板. 任意方向的加速度总可以分解成垂直于板面和平行于板面的两个分量. 分别计算板的法向和面内加速度敏感度. 利用式 (25) 的摄动积分, Sinha 和 Locke^[50], Shick 等^[51], Tiersten 和 Shick^[52,53] 研究了在由加速度引起的力偏场作用下 SAW 谐振器的频率漂移. Lee 和 Wu^[54,55], Lee 和 Guo^[56], Tiersten 和 Shick^[57], Tiersten 和 Zhou^[58], Zhou 和 Tiersten^[59] 计算了 BAW 谐振器的加速度敏感度. 图 6 给出了 BAW 谐振器在不同方向加速度作用下的典型行为.

如果谐振器具有较好的对称性, 采用一阶摄动积

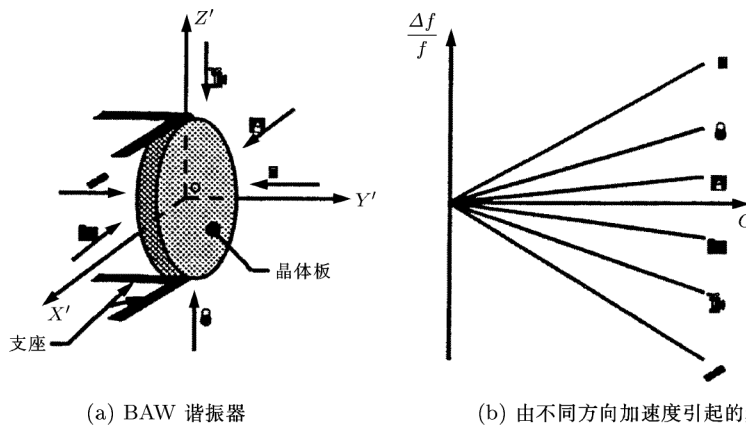


图 6

分式 (25) 计算, 加速度敏感性可能消失. Filler^[60] 对石英谐振器的加速度敏感性进行了评述. Tiersten^[19] 综述了他的早期工作. 最近, Kosinski 和 Pastore Jr^[61] 评述了谐振器的加速度敏感性及其最小化技术.

另外, 其它方面的应力 (如谐振器电极膜内的固有应力) 也可能引起频率漂移. Sinha 和 Tiersten^[62], Sinha 等^[63], Taziev 等^[64], Lee 和 Yong^[65], Lee 等^[66,67] 和 Wang 等^[68] 研究了 SAW 和 BAW 谐振器中由应力引起的频率漂移. Tiersten 等^[69] 研究了谐振器中薄膜的初始应力效应. Gafka 和 Tani^[70] 研究了铌酸锂 (LiNbO₃) 中表面波对电偏场和应力偏场的敏感性. Tiersten 和 Sinha^[71] 采用一阶摄动积分研究了由镀在谐振器表面的金属薄膜的有限导电性和空气作用所引起的表面波的衰减现象. Gafka 和 Tani^[70,72] 研究了电或力偏场作用下铌酸锂中的表面波. Joshi^[73] 通过实验研究了偏场对 LiNbO₃, LiTaO₃ 和 PbTiO₃ 陶瓷基表面声波的影响. Nalamwar 和 Epstein^[74] 研究了应变对石英和铌酸锂中表面波的影响.

5.4 温度效应

谐振器中频率漂移的另一个主要原因是温度变

化. 温度引起的频率漂移可以描述为

$$\frac{\Delta f}{f_0} = Tf^{(1)}(\Delta T) + Tf^{(2)}(\Delta T)^2 + Tf^{(3)}(\Delta T)^3 \quad (27)$$

式中, $\Delta T = T - T_0$ 为温度变化, $Tf^{(n)}$ 被称为 n 阶温度系数. 一阶摄动积分式 (25) 只能预测 $Tf^{(1)}$. Lee 和 Yong^[75] 研究了在 BAW 中由静态均匀温度变化所引起的频率漂移, 研究中他们计算到了三阶摄动积分. Sinha 和 Tiersten^[76] 采用一阶摄动积分计算了石英中温度对表面波的影响. Tiersten 和 Sinha^[77], Stevens 等^[78] 研究了石英 BAW 谐振器中温度引起的热应力效应. Sorokin 等^[79] 研究了一种比较新的压电晶体 langasite 中温度对波的影响. Yong^[80] 采用有限单元方法研究了谐振器的温度频率关系. Wang^[81] 导出了适合于研究谐振器频率温度关系的二维板方程. Yong 等^[82] 探讨了板方程的精确性. Sinha 和 Tiersten^[83] 分析了瞬态温度变化对谐振器的影响. 图 7 给出了温度引起的石英板谐振器频率漂移的典型行为特征. 图中, 切割角 θ 是变化的, 它表示是怎样从各向异性晶体上切下一块压电板的. 严格地说, 摄动积分式 (25) 只对温度变化不大的线性行为预测有效. 对于复杂的材料行为, 需要有四阶

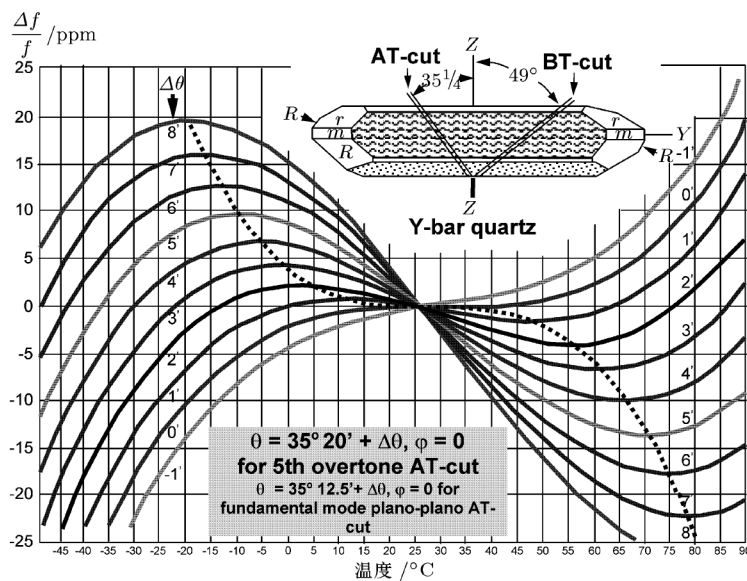


图 7 BAW 谐振器的频率温度曲线 (ppm = parts per million)

以上的材料常数. 从图中可以看出, 温度敏感性强烈地依赖于晶体板切割角 θ . 对于谐振器, 我们期望切割角对温度变化不敏感, 因此对于新晶体, 寻找对温度不敏感的切割角一直是一个非常意义的研究课题.

5.5 偏场的其他效应

在这一部分, 我们综述偏场的一些其它效应.

这些效应是不可能通过一阶摄动积分式 (25) 来描述的.

情况之一是, 在某些应用中偏场不能作为小量处理, 对于小偏场假设下的一阶摄动积分是不恰当的, 且式 (25) 须推广到更高阶情况. Kosinski 等^[84] 研究了法向加速度较大时 BAW 谐振器的二阶摄动分析. 结果表明: 当式 (26) 中的一阶加速度敏感性 Γ_K 为零时, 如果谐振器完全对称, 则二阶频率漂

移可以不为零. 这提供了关于加速度诱导频率漂移的一个非零下界, 这是与实验结果一致的. 其重要含义就是不具有加速度敏感性的谐振器不大可能存在. 为了比较完整地描述二阶效应, 必须用到四阶非线性材料常数. 然而, 当前经常使用的晶体的这些常数大都还不知道.

一阶摄动积分式 (25) 也假设所考虑的频率是单一的, 即只有单个对应于该频率的模式, 因此式 (25) 不能应用到退化频率的情况, 即同一频率具有不止一个线性独立模式的情况. Kosinski 等^[85] 分析了退化频率的摄动问题, 结果表明偏场通常会引起退化频率分裂成两个或更多的频率, 这与退化频率的重数有关. 估计上述情况是与谐振器频率有时会发生有限跳跃这一现象有关.

如果偏场是动态的, 增量场的系数就具有时间相关性. 在这种情况下, 当偏场随时间缓慢变化时, 一阶摄动积分式 (25) 近似可用. 这种缓慢是相对谐振器运行模式的共振频率而言的. Kosinski 等^[86] 和 Yang 等^[87] 采用带有时间依赖性系数的方程进行由频率漂移引起的振动特征分析, 结果表明在最简单的情况下, 增量厚度 - 剪切自由振动模式是由著名的 Mathieu 方程控制的

$$\ddot{u} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega_v t)u = 0 \quad (28)$$

式中, ε 由振动偏场引起的小参数, ω_v 为振动频率. 自由振动分析表明 (Kosinski 等^[86]): 厚度 - 剪切模式既是调频的也是调幅的 (见图 8), 调频为一阶效应而调幅为二阶效应. Yang 等^[87] 分析了由式 (28) 的非齐次型方程所控制的板式谐振器的电加载强迫振动问题, 结果表明作为谐振器的一个重要特性, 动态电容也具有时间相关性. Yang^[88] 和 Zhang 在文^[89] 中讨论了最近的一些进展.

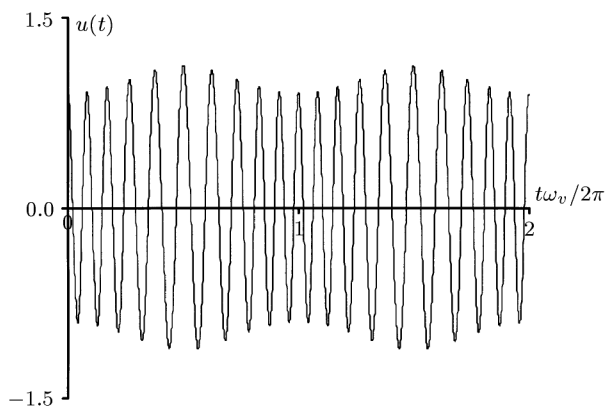


图 8 频率和振幅调制模式

6 声波传感器

利用谐振器的频率漂移特性可以制作能够测量力、热、电、生物和化学效应的声波传感器. 生物和化学传感器的频率漂移通常由谐振器表面的特殊粒子的质量或惯性效应所引起, 这些粒子由生化活性薄膜吸附过来. 对于这些传感器, 经典的线性压电理论就已经足够. 测量力热场的声波传感器常以由偏场引起的频率漂移为基础, 其分析和设计需要采用偏场方法. 下面, 我们分别讨论几种类型的传感器.

6.1 压力和力传感器

图 9 显示的是一种特殊设计的可用作压力传感器的谐振器 (EerNisse^[90]), 晶体板谐振器封装在一个圆柱壳体内. 当壳体受到外部压力作用时, 压力被传输给谐振器, 并引起偏场和频率漂移, 因此可以用于测量压力. 如果压力较小, 频率漂移就是线性的. 这种依赖关系可能还受温度的影响.

Karrer 和 Leach^[91], Karrer 和 Ward^[92] 报告了早期的压力传感器. Besson 等^[93], Dulmet 等^[94], Clayton 和 EerNisse^[95] 报告了近期的一些压力传感器. 大多数关于频率漂移的声波传感器的早期研究都是实验方面的. 与前一部分关于谐振器的分析相比, 在传感器的应用领域, 基于偏场方法的分析结果却相对较少. Clayton 和 EerNisse^[96] 利用了与有限单元方法相结合的一阶摄动积分分析了压力传感器. Yang 和 Zhang^[97] 提出了带有潜在高灵敏度的扁壳压力传感器, 并且进行了理论分析.

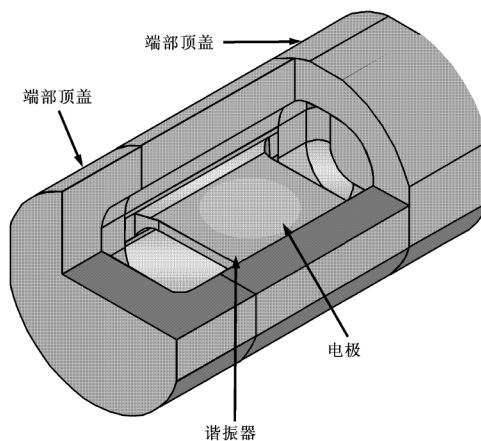


图 9 压力传感器

6.2 运动传感器

可以利用谐振器中由惯性力引起的频率漂移来制作加速度计 (Onoe^[98], Reedy Jr^[99]). 除了通过设计使频率漂移最大化以外, 加速度计的响应与图 6 相似. 摄动积分式 (25) 也被用来计算在角速度传感器

和陀螺仪等旋转体中, 由 Coriolis 力所引起的表面波和体积波的频率漂移 (Tiersten 等^[100,101]). 还存在另外一种类型的压电角速度传感器 (Soderkvist^[102]), 这种传感器通过由 Coriolis 力引起的电压和电流测量角速度. 在这类角速度传感器中, 一个以恒定角速度旋转的压电体可以通过电激励产生小幅度的振动. Yang^[103] 指出: 在这样情况下, 物体的振动实际上是与旋转相关的离心力引起的初始场有关的, 初始场是角速度的二次方, 通常被忽略, 除非需要确定传感器精确的线性响应范围.

6.3 温度传感器

Wade 和 Slutsky^[104], Smith 和 Spencer^[105], Hammond 等^[106] 最早开始了温度传感器的研究. 除了频率漂移需要最大化以外, 温度传感器的响应与图 7 相似. 如果温度变化较小, 这种响应是线性的. 最近有关温度传感器的研究可见 Ziegler 和 Tiesmeyer^[107], Ziegler^[108], Kanie 和 Kawashima^[109]. Leblois 和 Tellier^[110] 开展了微机械温度传感器的理论分析. Yang 和 Zhang^[111], Zhang^[89] 研究了石英温度传感器的装配应力效应.

声波传感器的研究正在快速发展. 这里, 我们主

要想指出偏场方法与某些声波传感器之间的联系. 关于以偏场引起频率漂移为原理所设计的声波传感器的研究历史和更多的参考文献, 可参阅下面这些综述性文章: EerNisse 等^[112], EerNisse 和 Wiggins^[113], EerNisse^[114].

7 非线性材料常数测量

非线性力电材料特性的实验研究结果很少而且比较分散. 非线性材料常数可以采用几种方法通过实验确定. Hellwege^[115] 在对大多数的早期结果进行综述之后认为, 测量偏场中声波速度的方法是所有测量非线性材料常数的实验方法中最重要的方法之一. 该方法通常用于测量三阶材料常数.

7.1 实验步骤

增量场方程 (式 (13) 或式 (17), 式 (18)) 的系数包含非线性材料常数, 因此增量声波的传播速度依赖于非线性材料常数. 这就告诉了我们如何测量这些常数的方法. 除了波速或共振频率以外, 初始场对板状试件电容的影响也可以用来确定非线性常数 (Cho 和 Yamanouchi^[116]). 图 10 给出了测量力偏场下波速的

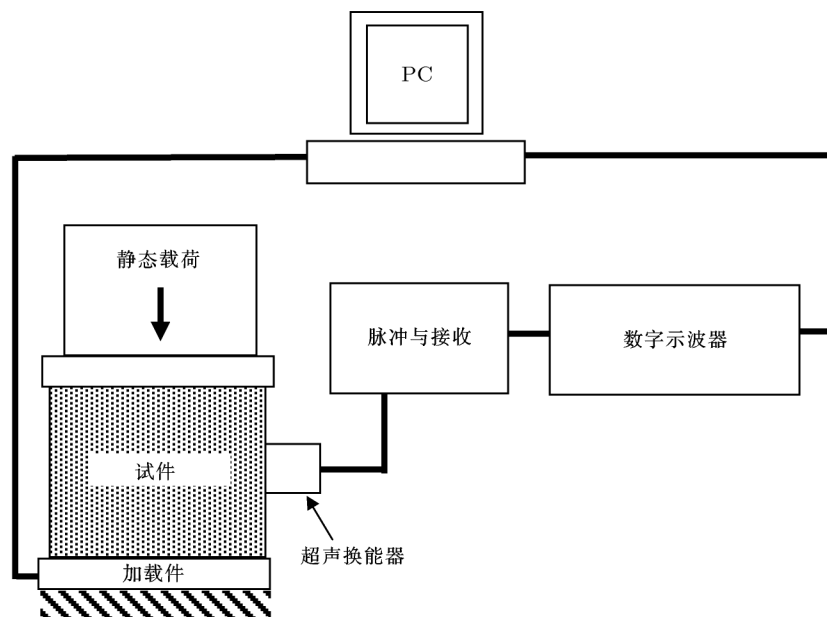


图 10 测量偏场中声速的实验方案

实验方案. 换能器激发声波传入试件中, 从试件背面反弹回来, 并回到换能器由换能器所接收. 记录传输时间, 并测量试样尺寸即得到波速以及由偏场所引起的波速变化. 类似地, 也可以向试件施加电偏场. 由于压电单晶是各向异性的, 需要测量沿材料不同方向切割的试样. 每个试样可以作用沿不同方向传播 (纵

向或横向) 的波. 所需要的试样数与独立材料常数的数量有关, 而独立材料常数的数量又是由材料的对称性所决定的. 如石英就有 31 个三阶材料常数, 因此需要 31 次独立的测量才能确定所有常数. 对所切割材料的波速、共振频率或电容的每次测量, 都可以得到一个二阶和三阶材料常数的线性组合关系. 随着对不

同切割试样的重复测量,可以得到一系列由二阶和三阶材料常数所构成的方程.如果二阶材料常数已知,那么,求解这些方程就可以得到三阶材料常数.为了提高精度,通常要进行许多次测量,使得方程的数目比要确定的材料常数多许多,然后,用最小二乘法确定非线性材料常数.

7.2 三阶常数

目前只有几种压电晶体材料的三阶材料常数已知.下面,我们综述一下广泛用于电子工业中的几种压电晶体的研究结果.

石英是使用最广泛的压电晶体. Thurston 等^[117]

确定它的三阶弹性常数; Brendel^[118]给出了它的8个三阶电弹性常数; Hruska^[119]基于直流电偏场下石英棒的拉伸振动,确定了它的三阶非线性材料常数的5种组合关系; Hruska 和 Brendel^[120,121]采用偏场作用下板沿厚度方向的振动获得了它的三阶常数的更多线性组合; Kittinger 等^[122]通过研究电偏场作用下的波传播,确定了它的三阶电弹性常数. Reider 等^[123]也研究了三阶电弹性常数.

在电子工业中, 铌酸锂也是一种广泛使用的压电晶体. 它比石英具有更强的力电耦合性能. Nakagawa 等^[124]测量了它的三阶弹性常数; Korobov 和 Lyamov^[125]确定了它的非线性压电常数; Cho 和 Yamanouchi^[116]通过研究在力电偏场作用下各种试样的共振频率和波速,得到了它的全部三阶非线性常数.

近几年, 美国陆军研究所 (U.S. Army Research Office) 资助了对新型单晶 langasite ($\text{La}_3\text{Ga}_5\text{SiO}_{14}$ 或 LGS) 和它的同构体 langanite (或 LGN) 与 langatate (或 LGT) 的研究. 尽管这些研究仍然还处于早期阶段, 然而结果已经可以表明这类晶体具有制作压电谐振器的优良特性. Aleksandrov 等^[126,127]和 Sorokin 等^[128,79]给出了在力电偏场作用下 LGS 晶体中波的传播和其三阶非线性材料常数的确定.

Aleksandrov 等^[129]研究了波速对具有 4mm 对称性的 $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$ 中单轴压力的依赖性. Sorokin 等^[130]研究了在非轴向压力作用下的 $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (23 对称类) 中的声波传播.

7.3 四阶常数

偏场方法也可以用于确定四阶非线性材料常数. 为了测定这些常数, 偏场必须足够强, 以保证频率 (或波速) 与偏场的关系为非线性. Chang 和 Barsh 确定了 CsCl , CsBr 和 CsI ^[131] 以及 RbCl , RbBr 和 RbI ^[132] 的四阶弹性常数的某些组合; Markenscoff^[133,134]采用三维和二维板方程导出了确定四阶弹性常数的表达式.

7.4 温度导数

为了预测温度改变时力电器件的行为, 必须给出电弹性材料线性和非线性材料常数对温度的依赖关系. 这对于谐振器和传感器都非常重要. 材料系数的温度相关性可以通过材料系数在参考温度 T_0 (有时取 25°C) 时对温度的导数来描述

$$c_{2IJKL}(T) = c_{2IJKL}(T_0) + \left. \frac{dc_{2IJKL}}{dT} \right|_{T_0} \Delta T \quad (29)$$

Lee 和 Yong^[135], Sinha 和 Tiersten^[136], Kahan^[137] 确定了石英弹性常数对温度的导数. Yong 和 Wei^[34,35] 给出了石英所有二阶材料常数对温度的导数. 方程 (29) 还可以扩展到包含更高阶温度导数的情况.

8 电致伸缩材料

众所周知, 作为力电场之间的线性耦合, 各向同性材料中不可能存在压电性. 从数学上看, 这是因为具有一对对称指标的三阶各向同性张量将会等于零. 然而, 对于非线性材料, 情况就会不同. 例如, 电致伸缩是一种可能存在于所有材料中的电弹性耦合行为, 包括各向同性和各向异性材料. 因为电致伸缩材料的优良特性和最近的进展, 电致伸缩材料正受到越来越多的关注.

8.1 基本描述

电致伸缩是一种电非线性现象. 和压电性不同, 当电场反转时, 电致伸缩中由电场所引起的变形和应力不会改变符号. Mason^[138,139] 和 Nye^[140] 讨论了小变形的电致伸缩理论. 电致伸缩可以简单地通过能量密度式 (5) 中的 $b_{ABCD}W_AW_BECD$ 项描述. 例如, 由多晶结构决定的具有宏观各向同性的电致伸缩陶瓷不具有压电性, 如果作用小电偏场 \mathbf{W}^0 , 那么小偏场是纯电的, 因为材料中没有线性力电耦合. 此时, 电偏场下的有效材料常数为

$$\begin{aligned} G_{K\alpha L\gamma} &= c_{2K\alpha LN} \\ R_{KL\gamma} &= b_{AKL\gamma}W_A^0 + \varepsilon_0(W_K^0\delta_{L\gamma} - \\ &W_L^0\delta_{K\gamma} - W_M^0\delta_{M\gamma}\delta_{KL}) \\ L_{KL} &= \varepsilon_{KL} \end{aligned} \quad (30)$$

在电势偏场作用下, 电致伸缩陶瓷表现出压电性, 而且有效压电常数对电势偏场是可调的.

8.2 新电致伸缩陶瓷

最近, 采用新的 PMN 和 PMNPT 电致伸缩陶瓷, 已经开发了海军水下传感器和医用传感器 (Rittenmyer^[141]). 与早期的力电材料相比, 新的电致伸缩陶瓷具有更强的力电耦合特征和较小的电滞

后效应. 这些新的电致伸缩的特性对偏场应力和温度非常敏感 (Rittenmyer^[141]). 陶瓷传感器通常受偏场应力作用, 它们经常被施加预压应力, 以致始终保持在压缩而不是拉伸条件下工作. 在不同温度下, PMN 电致伸缩陶瓷的基本特性也不同 (见图 11). 当然, 不同应力作用下, 陶瓷也具有与上述相似的特征. 对于小场, PMN 的应变电场曲线是非线性的, 而且当电场为零时其切线是水平的. 这是它和压电材料的主要区别. Hom 和 Shakar^[142], Piquette 和 Forsythe^[143] 采用多项式或超越函数, 提出了多种模型来描述新的 PMN 电致伸缩陶瓷的行为. 尽管这些模型能够描述类似强场下的电饱和等复杂非线性电行为, 但在力学上它们仍然是线性的, 因此不足以处理热力学偏场问题.

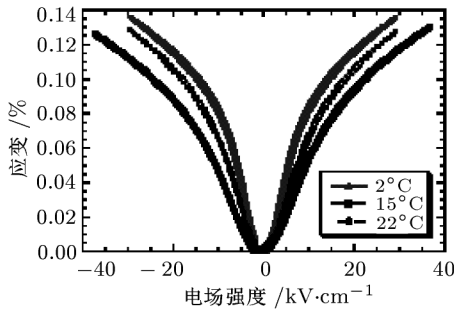


图 11 PMN 电致伸缩陶瓷在不同温度下的应变与电场关系曲线

8.3 全非线性描述

对新的电致伸缩陶瓷中的热、力和电偏场的严格描述需要用到偏场方法. 具有宏观各向同性的电致伸缩陶瓷是最简单的非线性电弹性材料, 其自由能 $\Sigma = \Sigma(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$ 只依赖于以下六个不变量 (Zheng^[144])

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{E}, & I_2 &= \text{tr} \mathbf{E}^2, & I_3 &= \text{tr} \mathbf{E}^3 \\ I_4 &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}, & I_5 &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{W} \\ I_6 &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{W} \end{aligned} \quad (31)$$

上面的 Σ 和式 (31) 包含下面的本构关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{E}} &= \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \mathbf{1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \mathbf{E} + 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_3} \mathbf{E}^2 + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} \mathbf{W} \otimes \mathbf{W} + \\ &\quad \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} [\mathbf{W} \otimes (\mathbf{E} \cdot \mathbf{W}) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{W}) \otimes \mathbf{W}] \\ - \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{W}} &= -2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \mathbf{W} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} \mathbf{E} \cdot \mathbf{W} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{W} \end{aligned} \quad (32)$$

式中 $\mathbf{1}$ 为二阶单位张量, \otimes 表示张量或并矢运算. 式 (32) 是各向同性非线性电弹性材料最一般的本构关系. 电致伸缩效应体现在式 (32)₁ 右边第四项, 该项由 I_5 引起. 运用关于 \mathbf{E} 的 Hamilton-Cayley 原

理, 可以对式 (32) 进行简化.

根据上述全非线性公式, Hu 等^[145] 建议采用下面的多项式函数描述 Σ

$$\begin{aligned} \Sigma &= c_1 I_1^2 + c_2 I_2 - \chi I_4 / 2 + a_1 I_1^3 + \\ &\quad a_2 I_1 I_2 + a_3 I_3 + b_1 I_1 I_4 + b_2 I_5 \end{aligned} \quad (33)$$

式中 c_1, c_2 和 χ 是线性弹性和介电常数; a_1, a_2 和 a_3 是三阶非线性弹性常数; b_1 和 b_2 为电致伸缩常数. 从式 (33) 可以导出下面的本构关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} &= (2c_1 I_1 + 3a_1 I_1^2 + a_2 I_2 + b_1 I_4) \delta_{KL} + \\ &\quad 2(c_2 + a_2 I_1) E_{KL} + 3a_3 E_{KM} E_{ML} + \\ &\quad b_2 W_K W_L \\ - \frac{\partial \Sigma}{\partial W_K} &= (\chi - 2b_1 I_1) W_K - 2b_2 E_{KL} W_L \end{aligned} \quad (34)$$

式 (34) 能够对偏场应力效应进行适当描述.

9 其他结果

在这一部分, 我们主要从学术的角度而不是前面几节的应用角度来总结一些研究结果.

9.1 波传播

下面, 我们综述在不采用摄动积分式 (25) 情况下, 波传播的一些研究结果. Chai and Wu^[146] 采用 Lothe-Barnett 积分公式研究了在力电偏场作用下介质中的表面波传播. Hu 等^[147] 采用 Tiersten 方程和广义 Stroh 公式研究了在偏场作用下电弹性体中的二维表面波问题. Ganguly^[148] 采用初始应力理论, Yang^[149] 采用增量场理论, 研究了初始场对 Bleustein-Gulyaev 波传播的影响, Bleustein 波在纯弹性情况下是不存在的, 它是一种可能存在于某种电弹性材料中的表面波. 根据初始应力理论, Ganguly 和 Pal^[150] 研究了初应力对 Bleustein-Gulyaev 波在半无限大半导体材料和半无限大压电材料组成的耦合体中传播的影响. 由于声电效应, 波可能产生放大效应. Liu 等^[151,152] 采用初应力理论研究了层合结构中的 Rayleigh 和 Love 波. Soos 和 Baesu^[153] 研究了在偏场作用下 23 类压电晶体中的反平面波的传播. Simionescu^[154,155], Simionescu 和 Soos^[156] 研究了 6mm 类晶体和立方体晶体中平面波的传播. Baesu^[157] 讨论了施加应力和极化电压的压电体中平面波的能量流.

9.2 稳定性和断裂

偏场方法可用来研究初始构型的稳定性. 动态上, 这些可以通过分析叠加于初始构型之上的增量波的行为 (增长或衰退) 来实现; 而静态上, 可以通过研究增量能量密度的正定性来实现. 实际上, 初始构型的稳定性与较早讨论的薄壁结构的屈曲相关. Soos^[158] 应用 Eringen 和 Maugin^[11] 的增量场方程进行了含裂纹的预应力压电晶体的稳定性、共振和应力集中分析. Baesu 和 Soos^[159], Baesu 和 Liu^[160], Baesu 等^[161], 以及 Liu^[162] 研究了在反平面变形下偏场对稳定性的影响. 最近, Beasu^[163] 综述了稳定性的一些研究成果. Baesu and Soos^[164,165] 研究了初始场对压电晶体断裂的影响, 其中文献 [165] 采用复变函数的一般解研究了裂纹扩展问题, 文献 [165] 将 Griffith 的能量释放率表示法推广到增量场理论之中.

10 更进一步的研究课题

以下是一些当前正在开展的和今后需要进一步

开展的研究课题. 它们是根据作者在该领域的研究经验而作出的.

当前已经开展的对电致伸缩陶瓷的模拟, 对于精确描述偏场应力效应和温度效应来说是不够的, 必须首先通过实验确定新的 PMN 电致伸缩陶瓷的非线性材料常数, 然后才有可能对电、力和热偏场效应进行比较精确的描述.

复杂偏场对压电谐振器频率稳定性的影响研究, 其中, 包括相对较大的偏场、动态偏场 (振动或冲击)、热滞后与热冲击、以及与偏场模式耦合相关的频率跳变 (见图 12) 等等.

以压电谐振器频率漂移为基础设计的声波传感器的理论分析比较少且分散. 为了优化传感器设计, 必须进行解析和数值分析.

一般来说, 系统测量新型压电晶体 (如 LGS、LGN 和 LGT) 三阶非线性材料常数是需要的, 特别是采用一些新的实验手段, 以确定非线性材料常数所有分量非常重要. 如可以尝试用超声波谱法 (Schreuer^[166]) 测量受偏场作用试件的动态特征来确定非线性材料常数.

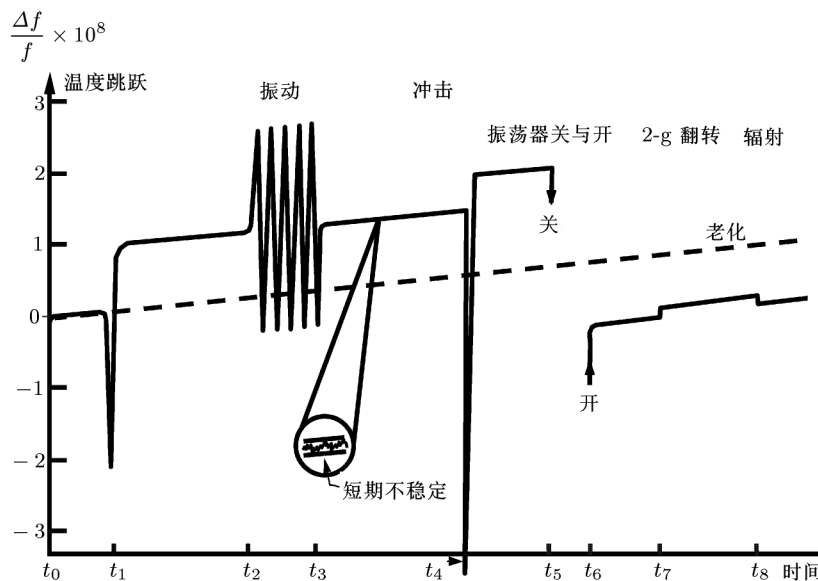


图 12 压电谐振器的频率跃迁

特别是, 加速度或温度的变化可能引起较大的偏场, 因此, 为了计算在它们作用下石英的二阶频率漂移, 需要知道四阶弹性常数. 然而, 目前还只有为数不多的几个四阶常数为人所知, 现有的实验技术似乎还可能获得更多一些的四阶常数.

11 结论

由 Tiersten 及其合作者所开展的关于电弹性体

力学偏场方法的开创性工作, 受到了压电谐振器频率稳定性研究的促动. 有关电弹性体偏场行为的知识, 对薄壁电弹性结构的屈曲、声波传感器、非线性电弹性材料的特征、新型电致伸缩陶瓷的模拟等问题的研究来说, 都是非常重要的. 为了描述偏场的最低阶效应, 必须知道三阶非线性材料常数, 然而只有几种材料的这些常数为人所知. 因此, 在进行精确的理论和数值分析之前, 必须通过更多的实验工作来确定这些常数. 在这个跨学科的领域中, 研究者具有不同

的背景和兴趣, 需要开展更多的交流.

致谢 本文是从 Jiashi Yang (杨嘉实) 和 Hu Yuantai (胡元太) 已发表的文章 “Mechanics of Electroelastic Bodies under Biasing Fields” 翻译而来, 该文发表于在《Applied Mechanics Reviews》, 2004, 57(3): 173~189.

感谢《Applied Mechanics Reviews》主编 A. W. Leissa 教授同意我们将此文翻译成中文. 与此同时, 第一作者感谢 U.S. Army Research Office (DAAD19-01-1-0443) 的资助, 第二作者感谢国家自然科学基金 (10172036) 的资助.

参 考 文 献

- 1 Dokmeci M C. Recent progress in the dynamic applications of piezoelectric crystals. *Shock Vib Dig*, 1988, 20: 3~20
- 2 Wang J, Yang J S. Higher-order theories of piezoelectric plates and applications. *Appl Mech Rev*, 2000, 53: 87~99
- 3 Rao S S, Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: a survey. *Appl Mech Rev*, 1994, 47: 113~123
- 4 Sunar M, Rao S S. Recent advances in sensing and control of flexible structures via piezoelectric materials technology. *Appl Mech Rev*, 1999, 52: 1~15
- 5 Chee C Y K, Tong L, Steven G P. A Review on the modeling of piezoelectric sensors and actuators incorporated in intelligent structures. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1998, 9: 3~19
- 6 Tani J, Takagi T, Qiu J. Intelligent material systems: application of functional materials. *Appl Mech Rev*, 1998, 51: 505~521
- 7 Toupin R A. The elastic dielectric. *J Rational Mech Anal*, 1956, 5: 849~915
- 8 Eringen A C. On the foundations of electroelastostatics. *Int J Engng Sci*, 1963, 1: 127~153
- 9 Tiersten H F. On the nonlinear equations of thermo-electroelasticity. *Int J Engng Sci*, 1971, 9: 587~604
- 10 Nelson D F. Theory of nonlinear electroacoustics of dielectric, piezoelectric, pyroelectric crystals. *J Acoust Soc Am*, 1978, 63: 1738~1748
- 11 Eringen A C, Maugin G A. *Electrodynamics of Continua*. Vol. I. New York: Springer, 1990
- 12 Tiersten H F. Electroelastic interactions and the piezoelectric equations. *J Acoust Soc Am*, 1981, 70: 1567~1576
- 13 Smith G F, Smith M M, Rivlin R S. Integrity bases for a symmetric tensor and a vector-the crystal classes. *Arch Rational Mech Anal*, 1963, 12: 93~133
- 14 Spencer A J M. Theory of invariants, in *Continuum Physics*: vol. I. In: Eringen A C, ed. New York: Academic Press, 1971. 292~307
- 15 Maugin G A, Epstein M. The electroelastic energy-momentum tensor. *Proc R Soc Lon*, 1991, 433A: 299~312
- 16 Yang J S, Batra R C. Mixed variational principles in nonlinear electroelasticity. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1995, 30: 719~725
- 17 Verma P D S, Chaudhry H R. Small deformation superposed on large deformation of an elastic dielectric. *Int J Engng Sci*, 1966, 4: 235~247
- 18 Baumhauer J C, Tiersten H F. Nonlinear electroelastic equations for small fields superposed on a bias. *J Acoust Soc Am*, 1973, 54: 1017~1034
- 19 Tiersten H F. On the accurate description of piezoelectric resonators subject to biasing deformations. *Int J Engng Sci*, 1995, 33: 2239~2259
- 20 Iesan D. *Prestressed Bodies*. Longman Scientific & Technical, Essex, UK, 1989. Chap 7
- 21 Dokmeci M C, Shell theory for vibrations of piezoceramics under a bias. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1990. 37: 369~385
- 22 Chen C Q, Tian X G, Shen Y P. Incremental variational equations for finitely deformed piezoelectric media. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 19: 228~238
- 23 Yang J S. Variational derivation of the equations for small fields superposed on finite biasing fields in an electroelastic body. *Mechanics Research Communications*, submitted.
- 24 Hu Y T, Yang J S, Jiang Q. Characterization of electroelastic beams under biasing fields with applications in buckling analysis. *Archive of Applied Mechanics*, 2002, 72: 439~450
- 25 Hu Y T, Jiang Q, Kosinski J A, Pastore Jr R A, Yang J S, Zhang X. Two-dimensional equations for electroelastic plates under biasing fields. In: Proc IEEE Int Frequency Control Symp, 2001. 584~591
- 26 Hu Y T, Yang J S, Jiang Q. A model of electroelastic plates under biasing fields with applications in buckling analysis. *Int J of Solids and Structures*, 2002, 39: 2619~2642
- 27 Hu Y T, Chen C, Li G, Yang J S, Jiang Q. Basic curvilinear coordinate equations of electroelastic plates under biasing fields with applications in buckling analysis. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 15: 189~200
- 28 Dokmeci M C. Vibration of piezoelectric disks under initial stresses. In: Proc 39th Annual Symp on Frequency Control, 1985. 431~435
- 29 Hu Y T, Yang J S, Jiang Q. On modeling of extension and flexure response of electroelastic shells under biasing fields. *Acta Mechanica*, 2002, 156: 163~178
- 30 Dokmeci M C. Dynamics of piezoelectric laminae under a bias. In: Proc 44th Annual Symp on Frequency Control, 1990, 394~405
- 31 Dulmet B, Bourquin R. Applications of Lagrangian effective material constants to the study of the thermal behavior of SAW propagation in piezoelectric crystals. In: Proc IEEE Ultrasonics Symp, 1994. 331~335

- 32 Dulmet B, Bourquin R, Lagrangian effective material constants for the modeling of thermal behavior of acoustic waves in piezoelectric crystals. I. Theory. *J Acoust Soc Am*, 2001, 110: 1792~1799
- 33 Dulmet B, Bourquin R, Bigler E, Ballandras S. Lagrangian effective material constants for the modeling of thermal behavior of acoustic waves in piezoelectric crystals. II. Applications and numerical values for quartz. *J Acoust Soc Am*, 2001, 110: 1800~1807
- 34 Yong Y K, Wei W. Lagrangean temperature coefficients of the piezoelectric stress constants and dielectric permittivity of quartz. In: Proc IEEE/EIA Int Frequency Control Symp and Exhibition, 2000. 364~372
- 35 Yong Y K, Wei W. Lagrangean versus classical formulation of frequency-temperature problems in quartz resonators. In: Proc IEEE Int Frequency Control Symp and PDA Exhibition, 2001, 828~837
- 36 Iesan D. Initially stressed thermoelastic dielectrics. *Journal of Thermal stresses*, 1988, 11: 421~441
- 37 Yang J S. Equations for small fields superposed on finite biasing fields in a thermoelectroelastic body. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2003, 50, 187~192
- 38 Wang Z K, Shang F L. Cylindrical buckling of piezoelectric laminated plates. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 18: 101~108
- 39 Shang F L, Wang Z K, Li Z H. Exact analysis of thermal buckling of piezoelectric laminated plates. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 18: 1~10
- 40 Tian X G, Shen Y P, Gao J X. Buckling and post-buckling analysis of piezoelectric plates using finite element method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2000 21: 123~130
- 41 Cheng C Q, Shen Y P. Stability analysis of piezoelectric circular cylindrical shells. *J Appl Mech*, 1997, 64: 847~852
- 42 Yang J S. Buckling of a piezoelectric plate. *Int J of Appl Electromagnetics and Mechanics*, 1998, 9: 399~408
- 43 Yang J S. Equations for the extension and flexure of a piezoelectric beam with rectangular cross section and applications. *Int J of Appl Electromagnetics and Mechanics*, 1998, 9: 409~420
- 44 Hu Y T, Yang J S, Jiang Q. Buckling of electroelastic plates. In: Takagi T, Uesaka M, ed. Applied Electromagnetics and Mechanics, J SAEM, 2001. 31~32
- 45 Hu Y T, Yang J S, Jiang Q. Electroelastic structures under biasing fields. In: Proc of the 4th International Conference on Nonlinear Mechanics, Shanghai, China, 2002-08-13-16, 2002. 596~600
- 46 Yang J S, Y T Hu. Electroelastic bodies under biasing fields. In: Yang J S, Maugin G A, ed. Mechanics of Electromagnetic Solids, Kluwer. 2003, 17~44, in press
- 47 Benes E, Groschl M, Seifert F, Pohl A. Comparison between BAW and SAW sensor principles. In: Proc IEEE Int Frequency Control Symp, 1997. 5~20
- 48 Deresiewicz H, Bieniek M P, DiMaggio F L. The Collected Papers of Raymond D. Mindlin, vol. I and II. New York: Springer, 1989
- 49 Tiersten H F. Perturbation theory for linear electroelastic equations for small fields superposed on a bias. *J Acoust Soc Am*, 1978, 64: 832~837
- 50 Sinha B K, Locke S. Acceleration and vibration sensitivity of SAW devices. *IEEE Trans on Ultrasonics: Ferroelectrics: and Frequency Control*, 1987, 34: 29~38
- 51 Shick D V, Zhou Y S, Tiersten H F. An analysis of the in-plane acceleration sensitivity of quartz surface-wave resonators rigidly supported along the edges. *J Appl Phys*, 1989, 65: 35~40
- 52 Tiersten H F, Shick D V. On the normal acceleration sensitivity of ST-cut quartz surface wave resonators supported along rectangular edges. *J Appl Phys*, 1988, 64: 4334~4341
- 53 Tiersten H F, Shick D V. On the in-plane acceleration sensitivity of ST-cut quartz surface-wave resonators with interior rectangular supports. *J Appl Phys*, 1990, 67: 2554~2566
- 54 Lee P C Y, Wu K M. The influence of support-configuration on the acceleration sensitivity of quartz resonator plates, *IEEE Trans on Sonics and Ultrasonics*, 1978, 25: 220~223
- 55 Lee P C Y, Wu K M. In-plane accelerations and forces on frequency changes in doubly rotated quartz plates. *J Acoust Soc Am*, 1984, 75: 1105~1117
- 56 Lee P C Y, Guo X. Acceleration sensitivity of crystal resonators affected by the mass and location of electrodes. *IEEE Trans on Ultrasonics: Ferroelectrics: and Frequency Control*, 1991, 38: 358~365
- 57 Tiersten H F, Shick D V. On the normal acceleration sensitivity of contoured quartz resonators rigidly supported along rectangular edges. *J Appl Phys*, 1990, 67: 60~67
- 58 Tiersten H F, Zhou Y S. On the in-plane acceleration sensitivity of contoured quartz resonators supported along rectangular edges. *J Appl Phys*, 1991, 70: 4708~4714
- 59 Zhou Y S, Tiersten H F. On the normal acceleration sensitivity of contoured quartz resonators with the mode shape displaced with respect to rectangular supports. *J Appl Phys*, 1991, 69: 2862~2870
- 60 Filler R L. The acceleration sensitivity of quartz crystal oscillators: a review. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1988, 35: 297~305
- 61 Kosinski J A, Pastore Jr R A. Theory and design of piezoelectric resonators immune to acceleration: present state of the art. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2001, 48: 1426~1437
- 62 Sinha B K, Tiersten H F. On the influence of a flexural biasing state on the velocity of piezoelectric surface waves. *Wave Motion*, 1979, 1: 37~51
- 63 Sinha B K, Tanski W J, Lukaszek T, Ballato A. Influence of biasing stresses on the propagation of surface waves. *J Appl*

- Phys*, 1985, 57: 767~776
- 64 Taziev R M, Kolosovsky E A, Kozlov A S. Pressure-sensitive cuts for surface acoustic waves in α -quartz. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1995, 42: 845~849
- 65 Lee P C Y, Yong Y K. Thickness vibrations of doubly rotated crystal plates under initial deformations. *IEEE Trans on Ultrasonics: Ferroelectrics: and Frequency Control*, 1987, 34: 659~666
- 66 Lee P C Y, Wang Y S, Markenscoff X. High-frequency vibrations of crystal plates under initial stresses. *J Acoust Soc Am*, 1975, 57: 95~105
- 67 Lee P C Y, Wang Y S, Markenscoff X. Nonlinear effects of initial bending on the vibrations of crystal plates. *J Acoust Soc Am*, 1976, 59: 90~96
- 68 Wang Z Y, Zhu H Z, Dong Y G, Wang J S, Feng G P. Force-frequency coefficient of symmetrical incomplete circular quartz crystal resonator. *IEEE Trans on Ultrasonics: Ferroelectrics: and Frequency Control*, 2001, 48: 1471~1479
- 69 Tiersten H F, Sinha B K, Meeker T R. Intrinsic stress in thin films deposited on anisotropic substrates and its influence on the natural frequencies of piezoelectric resonators. *J Appl Phys*, 1981, 52: 5614~5624
- 70 Gafka D, Tani J. Sensitivity of surface acoustic wave velocity in lithium niobate to electric field or biasing stress. *J Appl Phys*, 1993, 73: 7145~7151
- 71 Tiersten H F, Sinha B K. A perturbation analysis of the attenuation and dispersion of surface waves. *J Appl Phys*, 1978, 49: 87~95
- 72 Gafka D, Tani J. Parametric constitutive equations for electroelastic crystals upon electric or mechanical bias. *J Appl Phys*, 1991, 70: 6679~6686
- 73 Joshi S G. Surface acoustic wave propagation in a biasing electric field. *J Acoust Soc Am*, 1982, 72: 1872~1878
- 74 Nalamwar A L, Epstein M. Surface acoustic waves in strained media. *J Appl Phys*, 1976, 47: 43~48
- 75 Lee P C Y, Yong Y K. Frequency-temperature behavior of thickness vibrations of doubly rotated quartz plates affected by plate dimensions and orientations. *J Appl Phys*, 1986, 60: 2327~2342
- 76 Sinha B K, Tiersten H F. On the temperature dependence of the velocity of surface waves in quartz. *J Appl Phys*, 1980, 51: 4659~4665
- 77 Tiersten H F, Sinha B K. Temperature dependence of resonant frequency of electroded doubly-rotated quartz thickness-mode resonators. *J Appl Phys*, 1979, 50: 8038~8051
- 78 Stevens D S, Tiersten H F, Sinha B K. Temperature dependence of the resonant frequency of electroded contoured AT-Cut quartz crystal resonators. *J Appl Phys*, 1983, 54: 1704~1716
- 79 Sorokin B P, Turchin P P, Burkov S I, Glushkov A, Alexandrov K S. Influence of static electric field, mechanical pressure and temperature on the propagation of acoustic waves in $\text{La}_3\text{Ga}_5\text{SiO}_{14}$ piezoelectric single crystals. In: Proc IEEE Int Frequency Control Symp, 1996. 161~169
- 80 Yong Y K. Three-dimensional finite-element solution of the Lagrangean equations for the frequency-temperature behavior of Y-cut and NT-cut bars. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1987, 34: 491~499
- 81 Wang J. The frequency-temperature analysis equations of piezoelectric plates with Lee plate theory. *IEEE Trans on Ultrasonics: Ferroelectrics: and Frequency Control*, 1999, 46: 1042~1046
- 82 Yong Y K, Wang J, Imai T. On the accuracy of Mindlin plate predictions for the frequency-temperature behavior of resonant modes in AT- and SC-cut quartz plates. *IEEE Trans on Ultrasonics: Ferroelectrics: and Frequency Control*, 1999, 46: 1~13
- 83 Sinha B K, Tiersten H F. Thermally generated transient frequency excursions in doubly-rotated quartz thickness-mode resonators. *J Appl Phys*, 1984, 55: 3337~3347
- 84 Kosinski J A, Pastore Jr R A, Yang J S, Yang X, Turner J A. Second-order frequency shifts in crystal resonators under relatively large biasing fields. In: Proc IEEE Int Frequency Control Symp, 2002. 103~110
- 85 Kosinski J A, Pastore Jr R A, Yang J S, Yang X and Turner J A. Perturbation theory for degenerate acoustic eigenmodes. In: Proc IEEE Int Frequency Control Symp, 2003
- 86 Kosinski J A, Pastore Jr. R A, Yang J S, Zhang X. Thickness-shear vibration of crystal plates under time-dependent biasing deformations. In: Proc IEEE Int Frequency Control Symp, 2001. 597~604
- 87 Yang J S, Zhang X, Kosinski J A, Pastore Jr R A. Electrically forced thickness-shear vibration of a quartz plate under time-dependent biasing deformations. In: Proc IEEE Int Frequency Control Symp and PDA Exhibition, 2002. 96~102
- 88 Yang J S. Frequency stability of piezoelectric resonators. In: Shindo Y, ed. *Electro-Magneto-Mechanics of Advanced Material Systems and Structures*. WIT Press, in press
- 89 Zhang X. Analytical modeling of piezoelectric transformers and resonators: master's degree thesis. University of Nebraska-Lincoln, 2002
- 90 EerNisse E P. Quartz resonators vs their environment: time bases or sensors? In: Seminar given to the Department of Engineering Mechanics of the University of Nebraska-Lincoln, 2002
- 91 Karrer H E, Leach J. A quartz resonator pressure transducer. *IEEE Trans on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, 1969, 16: 44~50
- 92 Karrer E, Ward R. A low-range quartz resonator pressure transducer. *ISA Trans*, 1977, 16: 90~98
- 93 Besson R J, Boy J J, Glotin B, Jinzaki Y, Sinha B. A dual-

- mode thickness-shear quartz pressure sensor. *IEEE Trans on Ultrasonics Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1993, 40: 584~591
- 94 Dulmet B, Bourquin R, Shibanova N. Frequency-output force sensor using a multimode doubly rotated quartz resonator. *Sensors and Actuators A*, 1995, 48: 109~116
- 95 Clayton L D, EerNisse E P. Quartz thickness-shear mode pressure sensor design for enhanced sensitivity. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1998, 45: 1196~1203
- 96 Clayton L D, EerNisse E P. Application of finite element analysis to the design of quartz thickness-shear mode pressure sensors. In: Proc IEEE Freq Control Symp, 1996. 541~549
- 97 Yang J S, Zhang X. A high sensitivity pressure sensor. *Sensors and Actuators A*, 2002, 101: 332~337
- 98 Onoe M. Quartz crystal accelerometer insensitive to temperature variation. In: Proc 31st Annual Frequency Control Symp, 1977. 62~70
- 99 Reedy Jr E D, Kass W J. Finite-element analysis of a quartz digital accelerometer. *IEEE Trans on Ultrasonics: Ferroelectrics: and Frequency Control*, 1990, 37: 464~474
- 100 Tiersten H F, Stevens D S, Das P K. Acoustic surface wave accelerometer and rotation rate sensor. In: Proc IEEE Ultrasonics Symp, 1980. 692~695
- 101 Tierste H F, Stevens D S, Das P K. Circulating flexural wave rotation rate sensor. In: Proc IEEE Ultrasonics Symposium, 1981. 163~166
- 102 Soderkvist J. Micromachined gyroscopes. *Sensors and Actuators A*, 1994, 43: 65~71
- 103 Yang J S. Vibrations of rotating piezoelectric structures and angular rate sensors. In: Proc of the 4th International Conference on Nonlinear Mechanics, Shanghai, China, 2002-08-13-16, 2002. 378~382
- 104 Wade W H, Slutsky L J. Quartz crystal thermometer. *The Review of Scientific Instruments*, 1962, 33: 212~213
- 105 Smith W L, Spencer W J. Quartz crystal thermometer for measuring temperature deviations in the 10^{-3} to 10^{-6} °C range. *The Review of Scientific Instruments*, 1963, 34: 268~270
- 106 Hammond D L, Adams C A, Schmidt P. A linear, quartz-crystal temperature-sensing element. *ISA Trans*, 1965, 4: 349~354
- 107 Ziegler H, Tiesmeyer J. Digital sensor for radiation. *Sensors and Actuators*, 1983, 4: 363~367
- 108 Ziegler H. A low-cost digital temperature sensor system. *Sensors and Actuators*, 1984, 5: 169~178
- 109 Kanie H, Kawashima H. Lamé-mode miniaturized quartz temperature sensor. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2000, 47: 341~345
- 110 Leblois T G, Tellier C R. Micromachined resonant temperature sensors: theoretical and experimental results. *IEEE Trans on Ultrasonics: Ferroelectrics: and Frequency Control*, 2000, 47: 333~340
- 111 Yang J S, Zhang X. Vibrations of a crystal plate under a thermal bias. *J Thermal Stresses*, 2003, 26, 467~477
- 112 EerNisse E P, Ward R W, Wiggins R B. Survey of quartz bulk resonator sensor technologies. *IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1988, 35: 323~330
- 113 EerNisse E P, Wiggins R B. Review of thickness-shear mode quartz resonator sensors for temperature and pressure. *IEEE Sensors Journal*, 2001, 1: 79~87
- 114 EerNisse E P. Quartz resonators vs their environment: time base or sensor? *Jpn J Appl Phys*, 2001, 40: Part 1, 3479~3483
- 115 Hellwege K-H. Landolt-Bornstein: Numerical Data and Functional relationships in Science and Technology. New York: Springer-Verlag, 1979
- 116 Cho Y, Yamanouchi K. Nonlinear, elastic, piezoelectric, electrostrictive, dielectric constants of lithium niobate. *J Appl Phys*, 1987, 61: 875~887
- 117 Thurston R N, McSkimin H J, Andreatch P. Third-order elastic constants of quartz. *J Appl Phys*, 1966, 37: 267~275
- 118 Brendal R. Material nonlinear piezoelectric coefficients of quartz. *J Appl Phys*, 1983, 54: 5339~5346
- 119 Hruska C K. Material nonlinearities and the extensional mode of quartz rods. In: Proc IEEE Ultrasonics Symp, 1989. 405~410
- 120 Hruska C K, Brendal R. Determination of the third-order piezoelectric constants and electrostriction of alpha quartz using the thickness modes of plates. In: Proc 43rd Annual Symp on Frequency Control, 1989. 485~489
- 121 Hruska C K, Brendal R. The electroelastic constants of quartz determined by the resonator method. *J Appl Phys*, 1989. 65: 715~717
- 122 Kittinger E, Tichy J, Friedel W. Nonlinear piezoelectricity and electrostriction of alpha quartz. *J Appl Phys*, 1986, 60: 1465~1471
- 123 Reider G A, Kittinger E, Tichy J. Electroelastic effect in alpha quartz. *J Appl Phys*, 1982, 53: 8716~8721
- 124 Nakagawa Y, Yamanouchi K, Shibayama K. Third-order elastic constants of lithium niobate. *J Appl Phys*, 1973, 44: 3969~3974
- 125 Korobov A I, Lyamov V E. Nonlinear piezoelectric coefficients of LiNbO₃. *Sov Phys Solid State*, 1975, 17: 932~933
- 126 Aleksandrov K S, Kirensky L V, Sorokin B P, Turchin P P, Glushkov D A. Non-linear piezoelectricity in La₃Ga₅SiO₁₄ piezoelectric single crystal. *Ferroelectric Letters*, 1992, 14: 115~125
- 127 Aleksandrov K S, Sorokin B P, Turchin P P, Burkov S I, Glushkov D A, Karpovich A A. Effects of static electric field and of mechanical pressure on surface acoustic waves propagation in La₃Ga₅SiO₁₄ piezoelectric single crystals. In:

- Proc IEEE Ultrasonics Symp, 1995. 409~412
- 128 Sorokin B P, Turchin P P, Glushkov D A. Elastic nonlinearity and propagation of volume acoustic waves under conditions of homogeneous mechanical stresses in a $\text{La}_3\text{Ga}_5\text{SiO}_{14}$ single crystal. *Phys Solid State*, 1994, 36: 1545~1550
- 129 Alexandrov K S, Kirensky L V, Turchin P P, Sorokin B P, Karpovich A A, Nefedov V A. Bulk acoustic waves propagation in $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$ piezoelectric crystals under the static uniaxial mechanical pressure. In: Proc IEEE/EI Int Frequency Control Symp and Exhibition, 2000. 214~217
- 130 Sorokin B P, Marushyak A N, Alexandrov K S. Influence of non-homogeneous uniaxial pressure on the propagation of bulk acoustic waves in crystals. In: Proc IEEE/EIA Int Frequency Control Symp and Exhibition, 2000. 404~409
- 131 Chang Z P, Barsch G R. Nonlinear pressure dependence of elastic constants and fourth-order elastic constants of Gesium Halides. *Physical Review Letters*, 1967, 19: 1381~1382
- 132 Chang Z P, Barsch G R. Pressure dependence of the elastic constants of RbCl, RbBr and RbI. *J Phys Chem Solids*, 1971, 32: 27~40
- 133 Markenscoff X. On the determination of the fourth-order elastic constants. *J Appl Phys*, 1977, 48: 3752~3755
- 134 Markenscoff X. Higher-order effects of initial deformation on the vibration of crystal plates. *J Acoust Soc Am*, 1977, 61: 436~438
- 135 Lee P C Y, Yong Y K. Temperature derivatives of elastic stiffness derived from the frequency-temperature behavior of quartz plates. *J Appl Phys*, 1984, 56: 1514~1521
- 136 Sinha B K, Tiersten H F. First temperature derivatives of the fundamental elastic constants of quartz. *J Appl Phys*, 1979, 50: 2732~2739
- 137 Kahan A. Elastic constants of quartz and their temperature coefficients. In: Proc of the IEEE Annual Frequency Control Symp, 1982. 59~169
- 138 Mason W P. Piezoelectric Crystals and Their Applications to Ultrasonics. New York: Van Nostrand, 1950
- 139 Mason W P. Crystal Physics of Interaction Processes. New York: Academic Press, 1966
- 140 Nye J F. Physical Properties of Crystals. Oxford, UK: Oxford University Press, 1957
- 141 Rittenmyer K M. Electrostrictive ceramics for underwater transducer applications. *J Acoust Soc Am*, 1994, 95: 849~856
- 142 Hom C L, Shankar N. A fully coupled constitutive model for electrostrictive ceramic materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1994, 5: 795~801
- 143 Piquette J C, Forsythe S E. Generalized material model of lead magnesium niobate (PMN) and an associated electromechanical equivalent circuit. *J Acoust Soc Am*, 1998, 104: 2763~2772
- 144 Zheng Q S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. *Int J Engng Sci*, 1993, 31: 1399~1453
- 145 Hu Y T, Yang J S, Jiang Q. Wave propagation in electrostrictive materials under biasing fields. In: Proc IEEE Ultrasonics Symposium, 2000. 897~900
- 146 Chai J-F, Wu T-T. Propagation of surface waves in a pre-stressed piezoelectric material. *J Acoust Soc Am*, 1996, 100: 2112~2122
- 147 Hu Y T, Yang J S, Jiang Q. Surface waves in electrostrictive materials under biasing fields. *ZAMP*, 2004, 55: 678~700
- 148 Ganguly M. Bleustein-Gulyave waves in a pre-stressed piezoelectric half space. *Proc Indian Natn Sci Acad*, 1984, 50A: 375~381
- 149 Yang J S. Bleustein-Gulyaev waves in strained piezoelectric ceramics. *Mechanics Research Communications*, 2001, 28: 679~683
- 150 Ganguly M, Pal A K. Amplification of B-G waves in a pre-stressed piezoelectric half space of hexagonal symmetry. *Acta Physica Hungarica*, 1988, 63: 321~329
- 151 Liu H, Wang T J, Wang Z K. Effect of initial stress on the propagation behavior of generalized Rayleigh waves in layered piezoelectric structures. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 32: 491~496
- 152 Liu H, Wang Z K, Wang T J. Effect of initial stress on the propagation behavior of Love waves in a layered piezoelectric structure. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38: 37~51
- 153 Soos E, Baesu E. Transverse acousto-electric waves in prestrained and pre-polarized piezoelectrics. *Mathematical Reports*, 2001, 3: 75~82
- 154 Simionescu Panait O. The influence of initial fields on wave propagation in piezoelectric crystals. *Int J of Appl Electromagnetics and Mechanics*, 2000, 12: 241~251
- 155 Simionescu Panait O. Wave propagation in cubic crystals subject to initial mechanical and electric fields. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 2002, 53: 1038~1051
- 156 Simionescu O, Soos E. Wave propagation in piezoelectric crystals subjected to initial deformations and electric fields. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2001, 6: 437~445
- 157 Baesu E. On electroacoustic energy flux. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 2003, 54: 1001~1009
- 158 Soos E. Stability, resonance and stress concentration in pre-stressed piezoelectric crystals containing a crack. *Int J Engng Sci*, 1996, 34: 1647~1673
- 159 Baesu E, Soos E. Antiplane piezoelectricity in the presence of initial mechanical and electrical fields. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2001, 6: 409~422
- 160 Baesu E, Liu F. The influence of biasing fields on the behavior of piezoelectric materials. In: Proc of the 4th International Conference on Nonlinear Mechanics, Shanghai, China, 2002-08-13-16, 2002. 9~13

- 161 Baesu E, Fortune D, Soos E. Incremental behavior of hyper-elastic dielectrics and piezoelectric crystals. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 2003, 54: 160~178
- 162 Liu F H. Piezoelectricity with initial fields: antiplane problems: master's degree thesis. University of Nebraska-Lincoln, 2002
- 163 Baesu E. The mechanics of pre-stressed and pre-polarized piezoelectric crystals. In: Smirnov A, et al, eds. *Advances in Continuum Mechanics*, World Scientific, 2004
- 164 Baesu E, Soos E. Antiplane fracture in a pre-stressed and pre-polarized piezoelectric crystal. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2001, 66: 499~508
- 165 Baesu E, Soos E. Fracture criteria for prestressed and prepolarized piezoelectric crystals. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2003, 8: 327~334
- 166 Schreuer J. Elastic and piezoelectric properties of $\text{La}_3\text{Ga}_5\text{SiO}_{14}$ and $\text{La}_3\text{Ga}_{5.5}\text{Ta}_{0.5}\text{O}_{14}$: an application of resonant ultrasound spectroscopy. *IEEE Trans on Ultrasonics: Ferroelectrics: and Frequency Control*, 2002, 49: 1474~1479

THE BIASING FIELD METHOD IN ELECTROELASTICITY AND ITS APPLICATION

YANG Jiashi¹ HU Yuantai² YANG Xinhua²

¹Department of Engineering Mechanics, University of Nebraska, Lincoln, NE 68588-0526

²Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

Abstract This article summarizes the new development of small-amplitude motions superposed on finite biasing or initial fields in an electroelastic body, which is called the biasing field method.

It begins with a summary of the nonlinear theory of electroelasticity, as the theoretical foundation for the theory of small displacement fields superposed on a bias. The development of the theory for small displacement fields superposed on a bias, and the development of structural theories for electroelastic beams, plates and shells under biasing fields are discussed. Applications of the theory for small displacement fields superposed on biasing fields in the buckling of thin electroelastic structures, frequency stability of piezoelectric resonators for time-keeping and telecommunication, acoustic wave sensors based on frequency shifts due to biasing fields, characterization of nonlinear electroelastic materials by propagation of small-amplitude waves in electroelastic bodies under biasing fields, and electrostrictive ceramics under a biasing electric field are reviewed. A summary of some current and possible future research topics in this field is given. The article contains 166 references.

Keywords electroelastic mechanics, biasing field method, incremental fields, resonators, nonlinear material constants, frequency shift