

应变梯度理论进展*

陈少华 王自强

中国科学院力学研究所 LNM, 北京 100080

摘要 应变梯度理论是近 10 年来为解释材料在微米尺度下的尺寸效应现象而发展起来的一种新理论. 首先综述了应变梯度理论近年的发展及其对材料力学行为研究方面的进展. 其次主要介绍了不含高阶应力的一类应变梯度理论及其应用; 最后对应变梯度理论的发展做了展望.

关键词 微米尺度, 尺寸效应, 应变梯度

1 引言

连续介质力学广泛应用于许多工程领域, 如宇航、车辆、土木、机械、石油化工与核工程. 这些工程领域的一个共同特点是其部件或变形所涉及的代表性长度比较大, 通常大于若干毫米. 近年来, 连续介质力学开始在其它工程科目中获得新的应用. 例如, 在材料科学与工程, 连续介质力学曾在先进新材料的发展上起了重要作用. 对于微电子工业, 它帮助实现合理的基础上微电子器件的微型化. 在微米水平下的设计与制造问题, 例如薄膜 (其厚度为 $1\mu\text{m}$ 量级或更小); 微传感器, 微致动器, 及微电子机械系统 (MEMS, 整个系统的尺寸小于 $10\mu\text{m}$); 微电子封装与微电子装置 (其器件小于 $10\mu\text{m}$), 颗粒或纤维尺寸为 $10\mu\text{m}$ 量级的先进的复合材料以及微加工. 这些新的应用具有的共同特点是部件或变形所涉及的特征长度尺寸很小, 典型地为 $(0.1\sim 10)\mu\text{m}$, 即所谓的细观尺度.

为了把连续介质力学成功地应用于细观尺度, 必须能精确地测量细观尺度下材料的性质, 它可能与块状材料的性质有很大的差异. 因此, 已发展了一些小尺度实验来测量小尺度材料的性质. 然而, 所有这些实验都表明: 当非均匀塑性变形的特征长度为微米量级时, 金属材料呈现出很强的尺寸效应.

Fleck 等^[1] 利用微米量级的不同直径的细铜丝进行了拉伸及扭转实验, 在拉伸实验中材料没有出现明显的尺寸效应, 但在扭转实验中, 当细铜丝的直径从 $170\mu\text{m}$ 减小到 $12\mu\text{m}$ 时, 无量纲化的扭矩增加至 3 倍. Stolken 和 Evans^[2] 利用镍薄梁进行弯曲实验, 观察到当梁的厚度从 $50\mu\text{m}$ 减小到 $12.5\mu\text{m}$ 时, 无量纲化的弯曲硬度也显著增加. Lloyd 等人^[3~6] 对不同的颗粒增强金属基复合材料进行了研究, 发现当颗粒的体积分数不变时, 随着颗粒尺寸的减小, 复合材料的强度显著增强. 更能说明材料在微米尺度下具有尺度效应的一类实验是微米及亚微米压痕. 压入深度小于 $50\mu\text{m}$ 的微米或亚微米压痕实验中, 压痕硬度表现出非常强烈的尺寸效应^[7~12]. 对于金属材料, 所测的材料硬度值随着压入深度的减小可达到传统硬度值的 2 倍甚至 3 倍左右.

在一组令人瞩目的实验中, Elssner 等^[13] 测量了单晶铌与蓝宝石单晶间界面的宏观断裂韧性与原子分离功. 实验发现这两种材料的裂尖仍然保持有原子的尖锐性, 即裂纹尖端不钝化, 虽然铌是韧性材料并具有众多位错. 此时促使晶格或强界面原子分离所需要的应力水平典型值为屈服应力的 10 倍, 但按照基于经典塑性理论的模型, 裂纹尖端附近所能达到的最大应力水平不超过屈服应力的 4~5 倍^[14]. 这显然不足以造成实验中所观察到的裂纹起裂.

收稿日期: 2001-08-20, 修回日期: 2002-09-20

* 国家自然科学基金 (19704100, 710202023), 中国科学院自然科学基金 (KJ951-1-20) 和中国科学院优秀博士后科研启动基金资助项目

由于经典塑性理论的本构关系不包含任何特征长度尺度, 所以它不可能预测材料力学性能在微米尺度下的尺寸依赖性. 现今的设计工具, 例如有限元方法 (FEM) 和计算机辅助设计 (CAD), 都是以经典连续介质力学为基础的, 已不适用于如此小的尺度. 另一方面, 目前还不可能进行微米尺度构元所需要的实时与实际尺度的量子与原子模拟. 所以, 建立连续介质框架下考虑应变梯度影响的新的本构模型就成为刻画尺度效应的有力工具, 也是联系经典塑性力学与原子模拟之间现实可行的桥梁. 在韧性材料的宏观断裂行为和原子断裂过程之间建立联系是发展微米尺度下连续介质力学理论的另一个目的, 因为经典塑性理论不能够很好地模拟裂纹尖端小尺寸范围内的变形.

应变梯度理论是一种能够解释上述尺度效应的有效方法之一.

20 世纪初 Cosserat 兄弟^[15] 提出微极非线性弹性理论再一次引起人们的注意. Cosserat 理论 (一般偶应力理论) 于 1909 年提出, 在此理论中, 考虑每一个材料粒子作为一个完美的刚性颗粒, 在变形时, 不仅有位移产生还伴随着转动. 每一个物质元有 6 个自由度, 导致了应变和应力张量的非对称性. 由于此理论已经为非线性理论, 且当时并非用来分析弹性理论框架下的一些问题, 而是考虑了一些非理想的流体, 并试图分析了一些电子动力学问题. 在他们的理论中, Cosserat 兄弟没有引进本构关系, 所以一直没有引起人们的关注, 在 20 世纪 60 年代, 由于研究连续介质理论的基本原则, 而引起一些学者的兴趣^[16~21]. 他们将原先的 Cosserat 兄弟的偶应力理论加以拓广, 引入了微极弹性理论的术语, 仅利用位移矢量来描述连续介质理论. Toupin^[16] 讨论了在连续介质中引入高阶梯度的基本原理, 他假定应变能密度函数不仅依赖于应变而且依赖于转动梯度, 得到了线弹性偶应力理论. Mindlin^[17,18] 认为连续介质中每一个物质点, 从微观角度可以看作一个胞元. 这个胞元不仅跟随连续介质作宏观运动和变形, 而且自身还会有微观位移和微观变形. 因此, 应变能密度函数不仅依赖于应变张量而且依赖于变形张量及微观变形梯度. 在 1968 年, Green, Mcinnis 和 Naghdi^[21] 提出了一种塑性微极理论; 另外 Naghdi 和 Srinivasa^[22~24] 发展了 Cosserat 理论^[15] 并分析了含有位错演化的问题. 所有这些理论都是基于简化的偶应力理论基础上, 也就是只有位移矢量为变量, 转动矢量只是物质

转动矢量, 其与位移矢量相互联系, $\theta \equiv (1/2)\text{curl}u$, 这样相对转动张量 α_{ij} 为 0.

近年来, 引进表示长度量纲的参数已提出了几种应变梯度理论^[25~32]. 1993 年 Fleck 和 Hutchinson^[25] 从几何必需位错及统计储存位错角度出发, 发展了一种只考虑转动应变梯度影响的应变梯度理论. 当分析裂纹尖端场或微米压痕时, Fleck 和 Hutchinson^[26] 提出了一种完整的应变梯度理论, 既考虑了转动应变梯度, 又考虑了拉伸应变梯度. Shu 和 Fleck^[32] 在 Fleck 和 Hutchinson^[26] 理论框架上提出了一种适用于晶体的应变梯度公式, 并用来分析了强度及变形都与尺寸有关的单晶材料^[33] 及金属基复合材料的微观应变场^[34]. Nix 和 Gao^[35] 发展了一种简单的位错模型, 用来估计圆锥压头下的几何必需位错密度; 1999 年 Gao, Huang 等^[28,29] 在 Nix 和 Gao^[35] 的启示下, 发展了一种基于位错机制的应变梯度塑性理论, 简称 MSG 理论. 这种应变梯度塑性理论通过一个多尺度、分层次的框架, 实现了宏观塑性理论和位错理论的联系. 然而上述几种理论都引入了高阶应力, 本构关系及边界条件都相当复杂. 比较而言, Aifantis 等^[36~38] 在经典塑性理论的本构中引入了等效应变的一次和二次拉普拉斯算子, 在他们的理论中没有定义应变梯度的功共轭量. Acharya 和 Bassani^[39] 讨论了一种率无关框架, 在这个框架下应力增量和应变增量通过塑性硬化模量相关, 而这个塑性硬化模量不仅依赖于塑性应变, 而且依赖于塑性应变梯度. Chen 和 Wang^[40] 在 J_2 形变理论增量形式的基础上, 给出了一种具体的硬化关系, 应变梯度仅作为内变量来影响材料的切向硬化模量. 随后 Chen 和 Wang^[41] 在一般偶应力理论框架下提出了一种新的转动梯度理论, 结合考虑拉伸应变梯度的增量硬化关系, 形成了一种完整的应变梯度理论^[42]. 同样为了避免引进高阶应力的复杂性, Huang 等^[43] 在 2001 年提出了一种 TNT 理论. 另外, 黄克智院士、余寿文教授等^[44,45] 对应变梯度理论也有系统的研究. 关于 Fleck 和 Hutchinson 于 1993 年及 1997 年提出的应变梯度理论^[25,26] 及 Gao, Huang 等^[28,29] 提出的 MSG 理论, 可详见黄克智院士等人编著的《固体本构关系》^[44].

很多学者利用应变梯度理论对微米及亚微米压痕、裂纹尖端场断裂、颗粒增强金属基复合材料及细丝扭转和微薄梁弯曲的尺寸效应进行了研究.

对于压痕问题, 至今为止已被几种应变梯度理

论 [25,26,28,29] 研究过. 在采用应变梯度理论研究压痕问题中, Shu 和 Fleck^[46] 采用了偶应力理论^[25] 及不可压缩假设分析了当微尺度参量小于压痕接触面径向半径时的情况, 仅考虑了转动梯度的影响, 未能解释实验中观察到的现象; Begley 和 Hutchinson^[47] 利用 Fleck 和 Hutchinson^[26] 理论同时考虑了转动及拉伸梯度, 分析了不可压缩情况下当微尺度小于压痕接触面径向半径时的情况, 并将分析结果应用于 Stemashenko 等人^[9] 关于钨的压痕实验结果中, 获得该材料的微尺度参量在 $(0.25\sim 0.52)\mu\text{m}$ 之间. Huang 等^[48] 利用 MSG 理论, 不考虑弹性变形和材料压缩性研究了微米压痕实验, 得到了无量纲化的压痕硬度的平方 $(H/H_0)^2$ 与压入深度的倒数 $1/h$ 之间的线性关系, 即

$$(H/H_0)^2 \propto 1/h$$

其中 H_0 为无应变梯度时的压痕硬度. Wei 等^[49] 采用 Fleck 和 Hutchinson^[26] 塑性应变梯度模型并对可压缩弹塑性一般情况进行了分析, 还对单晶铜和单晶铝进行了微压痕实验研究, 理论预测结果与实验结果很好地吻合.

关于裂纹尖端场问题, 由 Ellsner 等^[13] 的实验, 我们知道裂纹尖端场在靠近裂尖很小的范围内, 裂尖保持原子的尖锐性, 为了解释这种现象, 利用偶应力应变梯度理论^[25], 文 [50~53] 获得了 I 型、II 型和混合型的裂纹尖端渐近解, Chen 等^[54] 利用打靶法获得了 I 型和 II 型平面应力裂纹渐近场; Chen 和 Wang^[55,56] 利用由他们提出的转动梯度理论^[41] 研究了平面应变及平面应力 I、II 型裂纹尖端渐近场. Xia 和 Hutchinson^[53] 与 Huang 等^[52] 利用有限元研究了裂尖的应变梯度效应, 发现对于 I 型断裂问题, 裂纹尖端应力水平和经典塑性一样, 也就是说, 只考虑转动梯度影响的应变梯度塑性理论对 I 型裂纹尖端的应力水平没有提高. 这是因为偶应力理论只包括了旋转梯度, 没有考虑更重要的拉伸应变梯度. 为了包含拉伸应变梯度的影响, Wei 和 Hutchinson^[57] 与 Chen 等^[58] 研究了拉伸和旋转梯度理论对裂纹尖端场的影响. 数值结果显示, 在准静态裂纹扩展中文 [57] 考虑拉伸梯度确实提高了裂纹尖端的应力水平, 然而, 对于静态裂纹由文 [58] 发现, 无论是打靶法还是有限元方法, 在不可压缩情况下 I 型裂纹延长线方向出现压应力. Shi 等^[59] 研究了 MSG 理论的渐近场, 发现 MSG 塑性理论不象 HRR 场, 它的

渐近解不存在一个可分离的形式. 因此要研究 MSG 塑性理论断裂问题, 必须应用有限元方法或其它数值方法. Jiang 等^[60] 利用有限元研究了 MSG 理论的裂纹尖端断裂行为, 应力水平获得了提高.

对于颗粒增强金属基复合材料, 其力学特性受微结构的影响. 几十年来, 人们一直试图研究这种内在关系, 并在科研及制造业方面取得了很多成就. 文 [61,62] 利用体胞模型研究了颗粒的长径比、颗粒的体积分数、及基体材料的硬化指数对复合材料性能的影响, 并发展了一些定量关系, 预测结果与实验结果符合. 文 [63] 发展了一种自洽分析模型, 成功地分析了颗粒增强金属基复合材料力学行为. 最近, Boland 等^[64] 利用实验系统研究了一系列含不同体积分数金属纤维增强铝合金基体复合材料. 关于颗粒的尺寸效应, 实验结果表明颗粒增强金属基复合材料的力学特性对颗粒尺寸的大小非常敏感^[3~6,65,66]. 最终得到结论为: 同样颗粒体积分数情况下, 颗粒越小, 颗粒增强金属基复合材料的强度越高. 为了预测颗粒尺寸效应, 文 [67,68] 也发展了一些分析模型. 2000 年 Shu 和 Barlow^[34] 分析了金属基复合材料的微观应变场; 2001 年 Bassani^[69] 等利用离散位错及非局部晶体连续塑性理论分析了晶体基弹性颗粒增强二维体胞模型受宏观剪切力的情况. 2001 年, Wei^[70] 利用 Fleck 和 Hutchinson^[26] 应变梯度理论研究了颗粒的尺寸对复合材料强度的影响, 结果与实验结果大致相符. 文 [71] 利用 MSG 理论同样分析了颗粒增强复合材料中颗粒的尺寸效应.

对于细丝扭转及薄梁弯曲, Fleck 等^[1] 利用 Fleck 和 Hutchinson^[26] 应变梯度理论对细丝扭转进行了分析; Stolken 和 Evans^[2] 利用 Fleck 和 Hutchinson^[26] 应变梯度理论对微镍薄梁弯曲进行了分析, 理论结果与实验结果基本吻合. MSG 理论同样也分析了细丝扭转及薄梁弯曲.

2 一般偶应力理论

为了更清楚的给出 Chen 和 Wang 提出的转动梯度理论及应变梯度理论, 我们首先回顾一下一般偶应力理论的基本框架.

在一般偶应力理论中, 微观转动矢量 ω 是不依赖于位移矢量 u 的独立变量, 不同于物质转动矢量 $\theta \equiv (1/2)\text{curl}u$. σ 表示柯西应力的对称部分, τ 表示柯西应力的反对称部分, m 表示偶应力张量.

为了更好地理解微观转动向量, 我们想象真实材料由巨量的离散粒子组成, 这些离散粒子可以是分子、原子、离子等微观粒子, 大小一般在 0.3nm 量级. 当整个物体发生物质转动时, 每个粒子同时也发生相对转动, 粒子自身的转动包括物质转动和粒子的相对转动, 每个粒子含有 6 个自由度. 1mm^3 体元中大约包含有 3×10^{19} 个离散粒子, 约有 18×10^{19} 个自由度. 将其看成场量, 则有位移场量和微观转动场量. 如图 1 为一个含粒子的体元示意图, P 表示粒子的中心, Q 表示体元中一点, 当粒子中心 P 运动到 p 点, Q 伴随体元运动到 q' 点, 但由于粒子的自身运动, 其实 Q 运动到了 q 点, 即

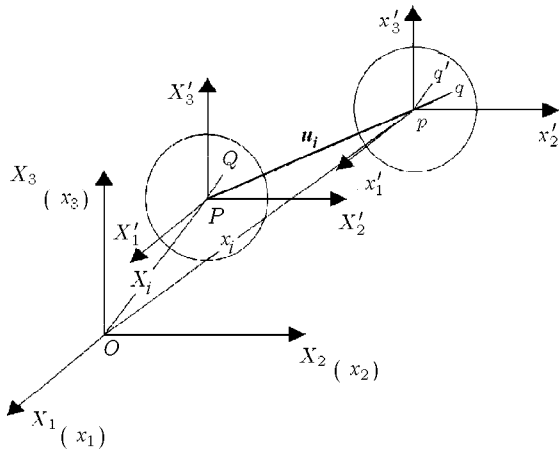


图 1 体元中粒子运动示意图

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T(\mathbf{X} + \mathbf{X}', t) &= \mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{X}', t) + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{X}' = \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{X}' + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{X}' + \\ &+ \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{X}' = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{X}' + \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}' \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u}^T(\mathbf{X} + \mathbf{X}', t)$ 表示宏观与微观的总位移; $\mathbf{u}(\mathbf{X} + \mathbf{X}', t)$ 表示连续介质中任一点处的宏观位移场量, 即粒子中心位移 $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ 与宏观应变和物质转动所产生的位移之和; 而 $\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{X}'$ 表示粒子相对转动产生的微观位移. \mathbf{X} 表示粒子中心初始位置, \mathbf{X}' 表示 Q 点相对于粒子中心的位置, $\boldsymbol{\theta}$ 表示物质转动, $\boldsymbol{\vartheta}$ 表示粒子相对转动. 则

$$\Delta \mathbf{u}^T = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{X}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}' \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\vartheta}$. 可见微观转动包括了物质转动及粒子的相对转动.

不计体力及体力偶的情况下, 一般偶应力理论的

虚功原理写为

$$\int_V [(\sigma_{ij} + \tau_{ij}) \delta \gamma_{ij} + m_{ij} \delta \chi_{ij}] dV = \int_S [T_i \delta u_i + q_i \delta \omega_i] dS \quad (3)$$

其中 $\chi_{ij} = \omega_{i,j}$ 为功共轭的转动梯度张量, $\gamma_{ij} = u_{i,j} + e_{ijk} \omega_k$ 为相对位移梯度张量, e_{ijk} 表示通常的置换符号, V 表示物体的体积, S 表示表面. 定义反对称张量 α_{ij} 为相对转动张量, 即

$$\alpha_{ij} = e_{ijk} \omega_k - (u_{j,i} - u_{i,j}) / 2 = e_{ijk} (\omega_k - \theta_k) \quad (4)$$

相应的平衡方程为

$$t_{ij,j} = \sigma_{ij,j} + \tau_{ij,j} = 0 \quad (5)$$

$$\tau_{jk} = \frac{1}{2} e_{ijk} m_{ip,p} \quad (6)$$

其中, 逗号表示对直角坐标系的偏导数, 重复的下标表示从 1 到 3 的求和在表面 S 上, 面力及面力矩可表示为

$$\begin{aligned} T_i &= (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) n_j \\ q_i &= m_{ij} n_j \end{aligned} \quad (7)$$

一般偶应力理论的应变能密度函数 w 依赖于应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 转动梯度张量 $\boldsymbol{\chi}$ 及相对转动张量 $\boldsymbol{\alpha}$, 相应的本构关系为

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad m_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \chi_{ij}}, \quad \tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \alpha_{ij}} \quad (8)$$

3 Aifantis 理论和 Acharya 与 Bassani 框架

Aifantis 等^[36~38] 在研究局部失稳和剪切带问题时, 将应变梯度引入屈服面中. 当材料进入软化阶段, 应变梯度提供了一种应变软化的力学机制.

应变软化机制可以包括晶格转动的几何软化, 伴随绝热剪切带的热软化和微孔成核、扩展和合并造成的软化. 而 Aifantis 强调剪切带形成过程中细观结构演化, 这其中包括剪切带、滑移面、位错结构的演化, 它导致了应变高度不均匀. Aifantis 等认为对率敏感材料, 这种微结构的演化, 可以用等效应变率行为梯度 $\text{grad} \boldsymbol{\varepsilon}_{ep}$ 及 $\nabla^2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ep}$ 来表征. 对不可压缩材料, 他们提出如下的本构关系

$$d_{ij} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ep} \frac{\sigma'_{ij}}{2\sigma_e} \quad (9)$$

$$\sigma_e = k (\boldsymbol{\varepsilon}_{ep}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ep}, \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{ep}, \text{grad} \boldsymbol{\varepsilon}_{ep}) \quad (10)$$

式中

$$\dot{\epsilon}_{ep} = \sqrt{2d_{ij}d_{ij}} \quad (11)$$

与经典理论的公式差别在于式 (10).

Acharya 和 Bassani^[39] 受到 Aifantis 及其合作者工作的启发, 提出了一种应变梯度理论框架, 他们认为在不引进高阶应力的前提下, 考虑应变梯度的影响. 讨论了一种率无关框架, 在这个框架下应力增量和应变增量通过塑性硬化模量相关, 而这个塑性硬化模量不仅依赖于塑性应变, 而且依赖于塑性应变梯度. 他们提出的本构关系框架为

$$\sqrt{\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} = \tau \quad (12)$$

$$\dot{\tau} = h(\gamma, G)\dot{\gamma} \quad (13)$$

$$\dot{\epsilon}^P = \left(\frac{\dot{\gamma}}{2\tau}\right)\sigma' \quad (14)$$

$$\dot{\sigma} = C(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^P) \quad (15)$$

其中 σ 为柯西应力, σ'_{ij} 为其偏量部分, τ 为剪切流动应力, h 为硬化模量, γ 为与 τ 功共轭的等效塑性应变, G 为适当的梯度项, ϵ^P 为塑性应变, ϵ 为整个应变, C 为弹性模量.

4 考虑微极效应的应变梯度理论^[42]

最近, Chen 和 Wang^[41] 提出了一种考虑微极效应的转动梯度理论. 在一般偶应力理论上, 引进一个材料长度参数 l_{cs} , 除了 3 个位移 u_i 自由度外, 还引进 3 个微观转动角位移矢量 ω_i . 不同于表示物质转动的角位移 θ_i , 微观转动角位移矢量 ω_i 与位移矢量 u_i 之间没有联系, 而 θ_i 为位移 u_i 的旋度. ω_i 则表示物质转动 θ_i 与粒子相对转动之和. 应变能密度假设为应变张量 ϵ_{ij} 及微观转动梯度张量 χ_{ij} 的函数, 导致柯西应力的反对称部分为 0. 在转动梯度理论基础上, 引进一种新的硬化关系^[40], 将拉伸梯度的影响通过增量形式的硬化关系考虑在内, 建立了一种既考虑转动梯度又考虑拉伸梯度的新的应变梯度理论^[42]. 此理论的主要特征为: 转动梯度对材料性能的影响通过应力与偶应力的相互作用来反映, 而拉伸梯度的影响通过引入新的硬化规律来刻画. 拉伸梯度仅作为一个内变量, 影响材料的切向硬化模量. 因此, 同时考虑转动梯度及拉伸梯度时, 新的应变梯度理论未引入任何高阶应力及高阶应变率.

Chen 和 Wang^[41] 假设应变能密度 w 只是应变张量 ϵ 及转动梯度张量 χ 的函数, 而相对转动张量 α 对应应变能密度没有贡献, 则从方程 (8), 可得

$$\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \alpha_{ij}} = 0 \quad (16)$$

物体占有体积 V 和表面积 S , 在表面 S_T 上作用有面力 T_i^0 , 在表面 S_u 上有指定位移 u_i^0 , 在表面 S_q 上作用面力矩 q_i^0 , 表面 S_ω 上有指定微观转动矢量 ω_i^0 , 则应力及偶应力的平衡方程为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 \\ m_{ij,j} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

面力及面力矩的边值条件为

$$\sigma_{ij}n_j = T_i^0 \quad \text{在 } S_T \text{ 上} \quad (18)$$

$$m_{ij}n_j = q_i^0 \quad \text{在 } S_q \text{ 上} \quad (19)$$

位移及角位移的边值条件满足

$$u_i = u_i^0 \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \quad (20)$$

$$\omega_i = \omega_i^0 \quad \text{在 } S_\omega \text{ 上} \quad (21)$$

定义柯西应力的偏量 s_{ij} 及偶应力的偏量 m'_{ij} 分别为应变张量偏量 ϵ'_{ij} 及转动梯度张量偏量 χ'_{ij} 的功共轭; 柯西应力的球形部分 σ_m 及偶应力的球形部分 m_m 与应变张量的球形部分 ϵ_m 及转动梯度张量的球形部分 χ_m 功共轭, 则单位体积内功的增量为

$$\delta w = s_{ij}\delta\epsilon'_{ij} + m'_{ij}\delta\chi'_{ij} + \sigma_m\delta\epsilon_m + m_m\delta\chi_m \quad (22)$$

其中, $s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\sigma_{kk}$ 及 $m'_{ij} \equiv m_{ij} - (1/3)\delta_{ij}m_{kk}$.

由方程 (22) 得到本构关系为

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{\partial w}{\partial \epsilon'_{ij}}, & m'_{ij} &= \frac{\partial w}{\partial \chi'_{ij}} \\ \sigma_m &= \frac{\partial w}{\partial \epsilon_m}, & m_m &= \frac{\partial w}{\partial \chi_m} \end{aligned} \quad (23)$$

对于不可压缩情况, 根据 Fleck 和 Hutchinson^[25] 数学上方便地假设应变能密度 w 仅依赖于广义等效应变 E_e , 广义等效应力 Σ_e 定义为 E_e 的功共轭.

对于可压缩情况, 本文的本构关系方程 (23) 写为

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{\partial w}{\partial \epsilon'_{ij}} = \frac{2\Sigma_e}{3E_e}\epsilon'_{ij} \\ m'_{ij} &= \frac{2}{3}l_{cs}^2 \frac{\Sigma_e}{E_e}\chi'_{ij} \\ \sigma_m &= k\epsilon_m \end{aligned} \quad (24)$$

$$m_m = k_1 l_{cs}^2 \chi_m \quad \Sigma_e = (\sigma_e^2 + l_{cs}^{-2} m_e^2)^{1/2} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} & m_e^2 &= \frac{3}{2} m'_{ij} m'_{ij} \\ \varepsilon_e^2 &= \frac{2}{3} \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} & \chi_e^2 &= \frac{2}{3} \chi'_{ij} \chi'_{ij} \end{aligned} \quad (26)$$

其中, k 为体积模量, k_1 为弯扭体积模量.

对于 Σ_e 与 E_e 之间的硬化关系可以由大尺寸试样单轴拉伸试验来确定.

在 Chen 和 Wang^[41] 的转动梯度理论中, 柯西应力的反对称部分自然消失, 从而使问题大大简化. 偶应力张量包括其偏量及球形分量两部分. 这是与其它理论不同之处, 偶应力的球形部分对边界条件精确满足方面起了重要作用.

当几何尺寸远大于材料内禀长度尺度 l_{cs} 时, 新的转动梯度形变理论将退化成经典 J_2 形变理论.

当只考虑转动梯度时, 假设广义等效应力 Σ_e 与广义等效应变 E_e 之间为幂硬化关系, 则

$$\begin{aligned} \Sigma_e &= A(E_e) & \Sigma_e &\geq \sigma_Y \\ \Sigma_e &= 3\mu E_e & \Sigma_e &< \sigma_Y \end{aligned} \quad (27)$$

其中 σ_Y 为屈服应力. 材料的硬化强度不仅与统计储存位错有关, 还与材料的几何必须位错有关. 由裂纹尖端渐近场^[55,56]的分析可知, 对于裂纹尖端场以及微米压痕等问题, 只考虑转动梯度是不能解释实验中所发现的现象, 必须同时考虑拉伸应变梯度的影响. 我们采用了下面的硬化关系^[40], 将拉伸梯度对材料强度的影响通过影响材料的切线硬化模量引入

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_e &= A'(E_e) \left(1 + \frac{l_1 \eta_1}{E_e}\right)^{1/2} \dot{E}_e = \\ &B(E_e, l_1 \eta_1) \dot{E}_e & \Sigma_e &\geq \sigma_Y \\ \dot{\Sigma}_e &= 3\mu \dot{E}_e & \Sigma_e &< \sigma_Y \end{aligned} \quad (28)$$

等效拉伸应变梯度 η_1 定义为

$$\eta_1 = \sqrt{\eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)}} \quad (29)$$

其中, $A(E_e) = \Sigma_0 E_e^n$, $B(E_e, l_1 \eta_1)$ 即为考虑应变梯度后材料的切线硬化模量; μ 为剪切模量, l_1 为第二个材料内禀尺度, 与拉伸梯度相关联. $\eta_{ijk}^{(1)}$ 的定义详见黄克智院士等人编著的《固体本构关系》^[44].

拉伸应变梯度通过增量形式的硬化关系^[40]引入, 影响材料的切向硬化模量. 考虑拉伸梯度的增量硬化关系结合考虑微观转动梯度的转动梯度理论^[41]则形成了考虑微极效应的应变梯度理论^[42]. 该理论

避免引进高阶应变率及与拉伸应变梯度功共轭的高阶应力. 在每一增量步, 等效应变 ε_e 及等效拉伸应变梯度 η_1 由现时的位移场得到, 而等效转动梯度则由现时的微观转动矢量场得到. 对于每一增量步, η_1 为已知参量.

5 考虑微极效应的应变梯度理论的应用

5.1 单元的选择

许多学者发现对于应变梯度理论有限元计算, 单元的选择是比较复杂的, 尤其是其对具体本构关系的敏感性. Xia 和 Hutchinson^[53] 曾经针对平面应变裂纹问题, 讨论了应变梯度塑性有限元实现的困难. 为了在计算中捕捉应变梯度效应, 已针对 Fleck 和 Hutchinson^[25] 的应变梯度理论发展了很多单元, 并且利用这些单元研究了裂纹尖端场问题^[53,57,58], 微米压痕问题^[46,47]. 这些单元可分为 3 类:

第一类单元是 C_1 单元. 这种单元最早是在研究板单元的时候, 由 Specht^[72] 与 Zienkiewicz 和 Taylor^[73] 提出的, Xia 和 Hutchinson^[53] 与 Begley 和 Hutchinson^[47] 把这种单元应用于应变梯度塑性中. 在这种单元中, 节点变量是位移和它们的导数, 仅仅在节点处 C_1 连续, 每个单元有 3 个节点. 然而 Begley 和 Hutchinson^[47] 指出, 这种单元可以通过分片实验而且可以精确捕捉常应变梯度场, 这就暗示在相邻单元之间出现应变梯度的跳跃, 但是却没有应变能来提供这种跳跃.

第二类单元是混合单元. 这种单元由 Xia 和 Hutchinson^[53] 与 Shu 和 Fleck^[46] 在研究 CS 塑性理论时提出的, 并且它的应用范围由 Shu 等^[32] 拓展到 SG 塑性理论中. 在这种单元中, 节点变量是位移和它们的导数, 单元内的位移和位移的导数由节点变量插值得到. 而位移和位移导数之间的几何关系通过 Lagrange 乘子强制满足.

第三类单元是 9 节点或者 16 节点等参单元^[57]. 这种单元仅仅适用于高阶应力曳力自由的情况. 因为在裂纹面和远处都没有高阶应力曳力, 所以在裂纹问题中可以应用这种单元. 利用这种单元, Wei 和 Hutchinson^[57] 研究了应变梯度塑性理论的裂纹问题. Huang 和 Xue 等^[48] 同样利用了 9 节点单元分析了 MSG 理论下的微米压痕问题.

由于在考虑微极效应的应变梯度理论中^[40~42] 没有高阶应力出现, 所以 Chen 和 Wang

选择了 9 节点等参单元。

5.2 微米压痕问题

利用新的应变梯度理论分析了微米尺度下的压痕问题 [74], 具体采用了有限元数值计算方法分析了无摩擦圆锥压痕. 结果发现包含应变梯度的压痕硬度是经典压痕硬度的 2 倍甚至更多. 压入接触边界处, 材料的挤出或陷入与材料的硬化指数及内禀材料长度有关. 对多晶铜压痕进行计算的结果与实验结果相吻合, 且发现压入硬度的平方值 H^2 与压入深度的倒数 $1/h$ 成线性关系, 即 $H^2 \propto 1/h$, 见图 2. 其中 H_0 为不考虑梯度的材料硬度.

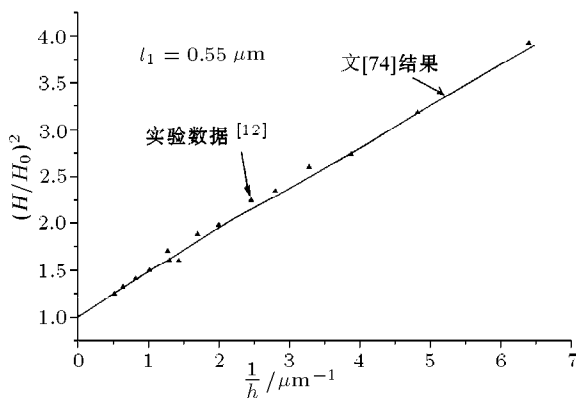


图 2 多晶铜压痕硬度

5.3 裂纹尖端场问题

利用新的应变梯度理论结合有限元方法, 分析了弹塑性硬化材料中裂纹尖端范围屈服时的全场 [75]. 在远处施加经典的 K 场, 得到了整个裂尖场的解. 结果显示裂纹尖端应变梯度主导区的应力水平明显高于 HRR 场的应力水平, 应力奇异性不仅超过 HRR 场的奇异性, 而且接近或等于平方根奇异性; 由于在裂纹尖端几何必须位错密度远大于统计储存位错密度, 裂尖处应力的奇性指数不变, 塑性硬化指数无影响. 具体裂纹尖端场的等效应力分布见图 3.

5.4 界面裂纹问题

同样利用有限元方法, 我们分析了界面裂纹问题 [76,77], 最终结果显示, 由于界面上下材料的弹性不匹配, 改变了裂纹尖端应力场的分布. 不同于均匀材料中的裂纹尖端场, 界面裂纹尖端场由一个广义的塑性区和弹性 K 场组成, 其中广义塑性区包括了应变梯度主导区和一个不同于经典场的塑性区. 如图 4

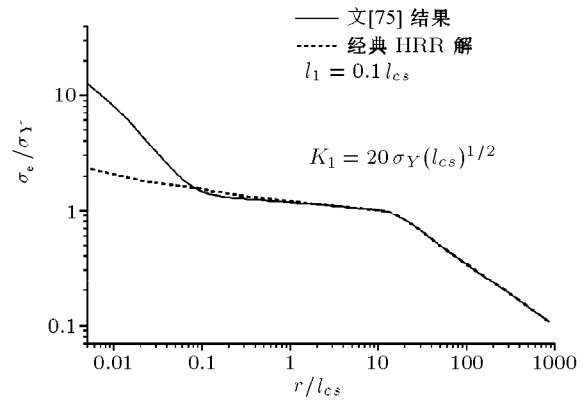


图 3 裂纹前方等效应力

所示, 即为弹塑性材料和刚性材料组成的界面裂纹的尖端场, 其中分析了 l_1 对界面裂纹尖端场的影响. 当 l_1 很小时, 界面裂纹尖端场趋近于经典解, 随着 l_1 的增大, 则远离经典场, 且不存在与经典场重合的塑性区. 同时说明 l_1 对裂纹尖端场的影响占主导地位.

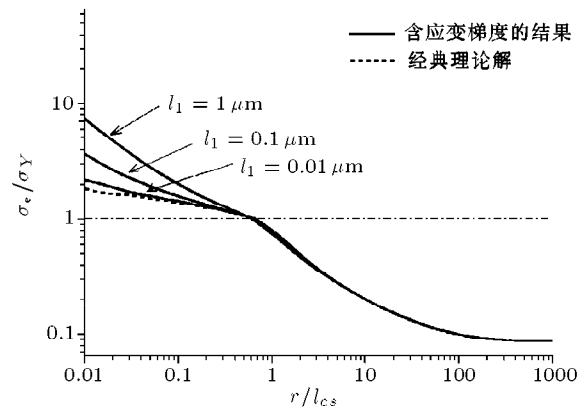


图 4 界面裂纹前方的等效应力

5.5 细丝扭转与微薄梁弯曲

利用 Chen 和 Wang 的应变梯度理论分析了细铜丝扭转、微薄梁弯曲两个典型问题 [40~42], 得到了解析解, 理论结果与试验结果相吻合. 见图 5, 图 6.

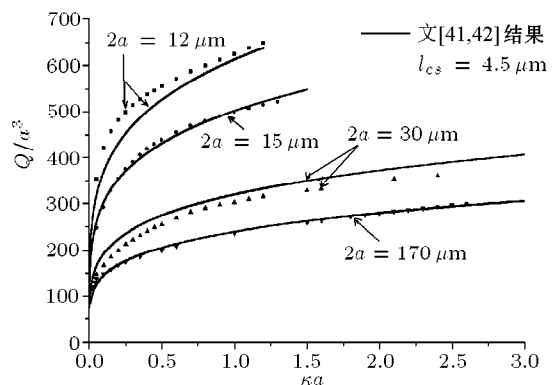


图 5 细铜丝扭转

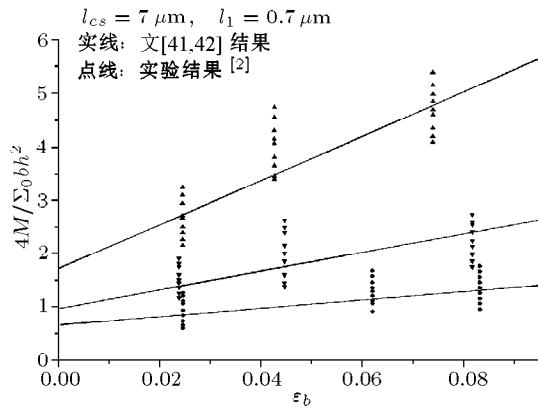


图6 微薄梁弯曲

5.6 颗粒增强金属基复合材料

利用 Chen 和 Wang^[78] 提出的应变梯度理论系统地研究了颗粒尺寸对颗粒增强金属基复合材料力学特性的影响。具体研究了颗粒增强复合材料中的诸多因素, 例如: 颗粒的尺寸、颗粒的长径比、颗粒与基体材料的杨氏模量比、颗粒的体积分数以及基体材料的应变硬化指数。另外对 Ling^[5] 的复合材料实验结果进行了分析, 计算结果与他们的实验结果相吻合, 并给出相应材料长度参数值, 见图 7。

由上述多个典型的例子可见, 考虑微极效应应变梯度理论^[40~42], 简单易用, 并能很好地描述材料在微米尺度下的力学行为。表明该应变梯度理论能非常容易地应用于分析先进的微米尺度下工程材料的力学性质。

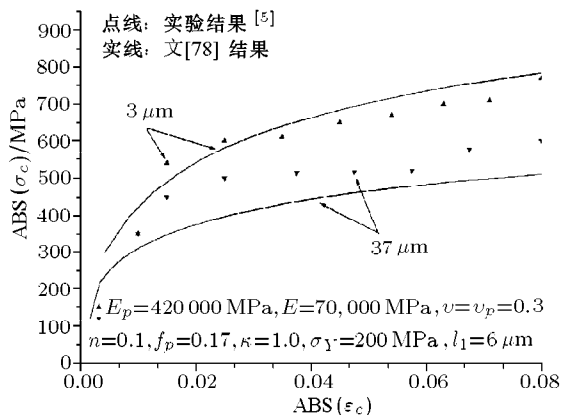


图7 颗粒增强复合材料应力与应变关系

6 应变梯度理论的前景

固体材料在微米和亚微米尺度下将表现出和宏观尺度不同的力学性能。另一方面, 微电子技术的迅猛发展, 同时也对科学技术的深入发展提出了迫切

的要求。微型产品的尺寸已经小到微米及亚微米量级, 产品质量的保证是一个非常期待解决的问题。应变梯度理论必然将对微机械系统与信息材料及微小元件的力学特性产生影响。

当然, 理论是为工程所应用。有效的理论的复杂程度将直接影响工程的应用, 提出更简单可行的理论将是实际工程更迫切需要的。虽然经过近 10 年的发展, 已经有了多种应变梯度理论, 现阶段对理论的复杂程度及简单易用性更为人们关注。

参考文献

- 1 Fleck N A, Muller G M, Ashby M F, Hutchinson J W. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Meta Mater*, 1994, 42: 475~487
- 2 Stolken J S, Evans A G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater*, 1998, 46: 5109~5115
- 3 Lloyd D J. Particle reinforced aluminum and magnesium matrix composites. *Int Mater Rev*, 1994, 39: 1~23
- 4 Yang J, Cady C, Hu M S, et al. Effects of damage on the flow strength and ductility of a ductile Al-alloy reinforced with SiC particulates. *Acta Metall Mater*, 1990, 38: 2613~2619
- 5 Ling Z. Deformation behavior and microstructure effect in 2124Al/SuCu composite. *J Comp Mater*, 2000, 34: 101~115
- 6 Kouzeli M, Mortensen A. Size dependent strengthening in particle reinforced aluminium. *Acta Materialia*, 2002, 50: 39~51
- 7 Doerner M F, Nix W D. A method for interpreting the data from depth-sensing indentation instruments. *J Mater Res*, 1986, 1: 601~611
- 8 Nix W D. Mechanical properties of tin films. *Metall Trans*, 1989, 20A: 2217~2245
- 9 Stenashenko N A, Walls M G, Brown L M, Milman Y V. Microindentation on W and Mo oriented single crystals: an STM study. *Acta Metall Mater*, 1993, 41: 2855~2865
- 10 Ma Q, Clarke D R. Size dependent hardness in silver single crystals. *J Mater Res*, 1995, 10: 853~863
- 11 Poole W J, Ashby M F, Fleck N A. The role of strain gradients in grain size effect for polycrystals. *J Mech Phys Solids*, 1996, 44: 465~495
- 12 McElhaney K W, Vlassak J J, Nix W D. Determination of indenter tip geometry and indentation contact area for depth-sensing indentation experiments. *J Mater Res*, 1998, 13: 1300~1306
- 13 Ellsner G, Korn D, Rühle M. The influence of interface impurities on fracture energy of UHV diffusion bonded metal-ceramic bicrystals. *Scripta Metall Mater*, 1994, 31: 1037~1042
- 14 Hutchinson J W. Linking Scales in Mechanics. In: Karimhaloo B L, Mai Y W, Ripley M I, Ritchie R O, eds. *Advances in Fracture Research*. New York: Pergamon Press, 1997. 1~14
- 15 Cosserat E, Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris: Herman et fils, 1909.

- 16 Toupin R. Elastic materials with couple-stresses. *Arch Rational Mech Anal*, 1962, 11: 385~414
- 17 Mindlin R D. Influence of couple-stress on stress concentrations. *Exp Mech*, 1963, 3: 1~7
- 18 Mindlin R D. Microstructure in linear elasticity. *Arch Rational Mech Anal*, 1964, 16: 51~78
- 19 Schaefer H. Das cosserat-kontinuum. *Z Anew Math Mech*, 1967, 47: 485~498
- 20 Eringen A C. Theory of Micropolar Elasticity. In: Leibowitz H, ed. *Fracture, An Advanced Treatise*. New York: Academic Press, 1968. 621~729
- 21 Green A E, McInnis B C, Naghdi P M. Elastic-plastic continua with simple force dipole. *Int J Engng Sci*, 1968, 6: 373~394
- 22 Naghdi P M, Srinivasa A R. A dynamical theory of structured solids. I basic developments. *Phil Trans R Soc Lond*, 1993, A 345: 425~458
- 23 Naghdi P M, Srinivasa A R. A dynamical theory of structured solids. II special constitutive equations and special cases of the theory. *Phil Trans R Soc Lond*, 1993, A345: 459~476
- 24 Naghdi P M, Srinivasa A R. Some general results in the theory of crystallographic slip. *ZAMP*, 1994, 45: 687~732
- 25 Fleck N A, Hutchinson J W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41: 1825~1857
- 26 Fleck N A, Hutchinson J W. Strain gradient plasticity. In: Hutchinson W, Wu T Y, eds. *Applied Mechanics*. New York: Academic Press, 1997, 33: 295~361
- 27 Shizawa K, Zbib H M. A thermodynamical theory of gradient elastoplasticity with dislocation density tensor I: Fundamentals. *Int J Plasticity*, 1999, 15: 899~938
- 28 Gao H, Huang Y, Nix W D, Hutchinson J W. Mechanism-based strain gradient plasticity —I. theory. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47: 1239~1263
- 29 Huang Y, Gao H, Nix W D, Hutchinson J W. Mechanism-based strain gradient plasticity —II. Analysis. *J Mech Phys Solids*, 2000, 48: 99~128
- 30 Dillon O W, Kratochvil J R, Kratochvil J. A strain gradient theory of plasticity. *Int J Solids Structures*, 1970, 6: 1513~1533
- 31 Nilsson C. On nonlocal rate-dependent plasticity. *Int J Plasticity*, 1998, 14: 551~576
- 32 Shu J Y, Fleck N A. Strain gradient crystal plasticity: size-dependent deformation of bicrystals. *J Mech Phys Solids*, 1999, 7: 297~324
- 33 Shu J Y. Scale-dependent deformation of porous single crystals. *Int J Plasticity*, 1998, 14: 1085~1108
- 34 Shu J Y, Barlow C Y. Strain gradient effects on microscopic strain field in a metal matrix composite. *Int J Plasticity*, 2000, 16: 563~592
- 35 Nix W D, Gao H. Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1998, 46: 411~425
- 36 Aifantis E C. On the microstructural origin of certain inelastic models. *Trans ASME J Eng Mater Technol*, 1984, 106: 326~330
- 37 Aifantis E C. The physics of plastic deformation. *Int J Plasticity*, 1987, 3: 211~248
- 38 Muhlhaus H B, Aifantis E C. The influence of microstructure-induced gradients on the localization of deformation in viscoplastic materials. *Acta Mech*, 1991, 89: 217~231
- 39 Acharya A, Bassani J L. On non-local flow theories that preserve the classical structure of incremental boundary value problems. In: *Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials*, IUTAM Symposium, Paris, 1995-08-29~09-01
- 40 Chen S H, Wang T C. A new hardening law for strain gradient plasticity. *Acta Materialia*, 2000, 48: 3997~4005
- 41 Chen S H, Wang T C. A new deformation theory for strain gradient effects. *Int J Plasticity*, 2002, 18(8): 971~995
- 42 Chen S H, Wang T C. Strain gradient theory with couple stress for crystalline solids, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2001, 20: 739~756
- 43 Gao H, Huang Y. Taylor-based nonlocal theory of plasticity. *Int J Solids Struct*, 2001, 38: 2615~2637
- 44 黄克智, 黄永刚. 固体本构关系. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- 45 Wang G F, Feng X Q, Yu S W. Interface Problem with Strain Gradient Effects. 见: 徐秉业, 张善元主编固体力学的现代进展. 北京: 万国学术出版社, 2000, 63~68
- 46 Shu J Y, Fleck N A. The prediction of a size effect in microindentation. *Int J Solids Struct*, 1998, 35(13): 1363~1383
- 47 Begley M R, Hutchinson J W. The mechanics of size-dependent indentation. *J Mech Phys Solids*, 1998, 46(10): 2049~2068
- 48 Huang Y, Xue Z, Gao H, Nix W D, Xia Z C. A study of micro-indentation hardness tests by mechanism-based strain gradient plasticity. *J Mater Res*, 2000, 15: 1786~1796
- 49 Wei Y, Wang X, Wu X, et al. Theoretical and experimental researches of size effects in micro-indentation test. *Sciences in China (Series A)*, 2001, 44: 74~82
- 50 Huang Y, Zhang L, Guo T F, Hwang K C. Near-tip fields for cracks in materials with strain-gradient effects. In: Willis J R, ed. *Proceeding of IUTAM Symposium on Nonlinear analysis of fracture*. Cambridge, England: Kluwer Academic Publishers, 1995. 231~242
- 51 Huang Y, Zhang L, Guo T F, Hwang K C. Mixed mode near-tip fields for cracks in materials with strain gradient effects. *J Mech Phys Solids*, 1997, 45: 439~465
- 52 Huang Y, Chen J Y, Guo T F, Zhang L, Hwang K C. Analysis and numerical studies on mode I and mode II fracture in elastic-plastic materials with strain gradient effects. *Int J Fract*, 1999, 100: 1~27
- 53 Xia Z C, Hutchinson J W. Crack tip fields in strain gradient plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1996, 44: 1621~1648
- 54 Chen J Y, Huang Y, Hwang K C. Mode I and mode II plane stress near tip fields for cracks in materials with strain gradient effects. *Key Engineering Materials*, 1997, 19: 145~149
- 55 Chen S H, Wang T C. Mode I crack tip field with strain gradient effects. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2000, 13(4): 290~298
- 56 Chen S H, Wang T C. Mode I and mode II crack tip asymptotic fields with strain gradient effects. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 17(3): 269~280
- 57 Wei Y, Hutchinson J W. Steady-state crack growth and work of fracture for solids characterized by strain gradient plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1997, 45: 1253~1273

- 58 Chen J Y, Wei Y, Huang Y, Hutchinson J W, Hwang K C. The crack tip fields in strain gradient plasticity: the asymptotic and numerical analyses. *Eng Fracture Mech*, 1999, 64: 2049~2068
- 59 Shi M X, Huang Y, Gao H, Hwang K C. Non-existence of separable crack tip field in mechanism-based strain gradient plasticity. *Int J Solids Struct*, 2000, 37: 5995~6010
- 60 Jiang H, Huang Y, Zhuang Z, Hwang K C. Fracture in mechanism-based strain gradient plasticity. *J Mech Phys Solids*, 2001, 49: 979~993
- 61 Christman T, Needleman A, Suresh S. An experimental and numerical study of deformation in metal ceramic composites. *Acta Metall Mater*, 1989, 37: 3029~3050
- 62 Bao G, Hutchinson J W, McMeeking R M. Particle reinforcement of ductile matrices against plastic flow and creep. *Acta Metall Mater*, 1991, 39: 1871~1882
- 63 Corbin S F, Wilkinson D S. The influence of particle distribution on the mechanical response of a particulate metal-matrix composite. *Acta Metall Mater*, 1994, 42: 1311~1318
- 64 Boland F, Colin C, Salmon C, et al. Tensile flow properties of Al-based matrix composites reinforced with a random planar network of continuous metallic fibers. *Acta Mater*, 1998, 46: 6311~6323
- 65 Kamat S V, Rollett A D, Hirth J P. Plastic-deformation in Al-alloy matrix-alumina particulate composites. *Scripta Metall Mater*, 1991, 25: 27~32
- 66 Kiser M T, Zok F W, Wilkinson D S. Plastic flow and fracture of a particulate metal matrix composites. *Acta Mater*, 1996, 44: 3465~3476
- 67 Nan C W, Clarke D R. The influence of particle size and particle fracture on the elastic/plastic deformation of metal matrix composites. *Acta Mater*, 1996, 44: 3801~3811
- 68 Maire E, Wilkinson D S, Embury D, et al. Role of damage on the flow and fracture of particulate reinforced alloys and metal matrix composites. *Acta Mater*, 1997, 45: 5261~5274
- 69 Bassani J L, Needleman A, Giessen E, Van Der. Plastic flow in a composite: a comparison of nonlocal continuum and discrete dislocation predictions. *Int J Solids Struct*, 2001, 38: 833~853
- 70 Wei Y. Particulate size effects in the particle-reinforced metal-matrix composites. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 17(1): 45~58
- 71 Xue Z, Huang Y, Li M. Particle size effect in metallic materials: a study by the theory of mechanism-based strain gradient plasticity. *Acta Mater*, 2002, 50: 149~160
- 72 Specht B. Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test. *Int J Numer Methods Eng*, 1988, 26: 705~717
- 73 Zienkiewicz O C, Taylor R L. The Finite Element Method, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1989
- 74 陈少华. 塑性应变梯度理论及其应用: [博士后出站报告]. 北京: 中国科学院力学研究所, 2001
- 75 Chen S H, Wang T C. Finite element solutions for plane strain mode I crack with strain gradient effects. *Int J Solids Struct*, 2002, 39(5): 1241~1257
- 76 Chen S H, Wang T C. Interface crack problems with strain gradient effects. *Int J Fract*, 2002, 117: 25~37
- 77 Chen S H, Wang T C. Crack tip fields with strain gradient effects. *Int J Nonlinear Sci & Numer Simulation*, 2002, 3: 689~693
- 78 Chen S H, Wang T C. Strain gradient effects in the particle-reinforced metal-matrix composites. *Acta Mechanica*, 2002, 157(1-4): 113~117

ADVANCES IN STRAIN GRADIENT THEORY*

CHEN Shaohua WANG Ziqiang

LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

Abstract In order to explain the size effect for materials in the scale of micron meters, the strain gradient theory was developed as a new theory during the past 10 years. In the present paper, strain gradient theories and their corresponding applications to material mechanical behaviors are reviewed first. Then, we introduce a strain gradient theory and its main applications, in which no high-order stresses are included. Lastly, the development of strain gradient theories is forecasted.

Keywords micro-scale, size effects, strain gradient

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(19704100, 10202023), National Science Foundation of Chinese Academy of Sciences (KJ951-1-20) and Excellent Post-doctoral Research-Starting Fund of CAS