第 32 卷　第 4 期　　力 学 进 展　　Vol. 32　No. 4
2002 年 11 月 25 日　　ADVANCES IN MECHANICS　　Nov. 25,　2002

旋涡结构的湍流统计理论*

黄永念
北京大学力学与工程科学系，湍流与复杂系统研究国家重点实验室，北京 100871

摘　要　旋涡结构的湍流统计理论是已故周培源教授在 20 世纪 50 年代率先提出来的. 经过他和他的学生近半个世纪的努力，已经形成具有自身特色的湍流统计理论. 在纪念周培源教授诞辰 100 周年的时候，特贡献本文作为对一代宗师的怀念. 本文是这个理论的一个总结和概括，其中包括：作为湍流元的旋涡结构解的寻找，可能存在的不同旋涡结构解的类别和叠加，统计平均方法的选取和操作，统计平均物理量的规律的探索等.

关键词　湍流元，旋涡结构，统计平均，湍流统计理论

1 引　言

湍流理论的研究已经跨越 2 个世纪了. 至今还没有一个被普遍接受的湍流统计理论. 我们曾在 10 年前介绍过周培源教授的湍流统计理论工作 [1]. 周培源教授本人也在 1995 年给出了他的 50 年湍流研究工作的总结 [2]. 蔡树棠和刘宇陆在他们的专著中也对该理论作了比较详细的介绍 [3]. 在新世纪来临的时候，非常有必要再次提醒大家注意周培源教授提出的旋涡结构的统计理论. 这个理论经过我们近 10 年的努力，又取得了不少进展. 我们知道自 19 世纪末从雷诺开始，一直沿用了他提出的对 Navier-Stokes 方程先平均后求解的方法. 但是这种方法的一个致命的缺陷是方程组的不封闭性. 为了克服这个缺陷，人们不得不人为地提出一些形式逻辑的假设来使方程组封闭，但这些假设都不具有普遍使用的价值. 周培源教授早在上世纪 50 年代就提出先求解后平均的湍流统计理论 [4,5]. 这个理论以湍流是由许许多多旋涡组成的事实为基础，以 Navier-Stokes 方程的某种特定的旋涡解 (我们称为涡元) 作为湍流元，再采用一定的统计平均方法，找到湍流运动的各种物理量的统计平均规律. 这个理论的物理意义非常明确，关键之处是对各种具体的湍流流动的旋涡解的寻找和统计方法的选择. 现在人们使用的湍流直接数值模拟方法其实也是这种思想的发展. 拟序结构的发现和大涡模拟的研究也与湍流流动中存在旋涡的想法直接有关. 印度科学家 Narasimha 等 [6] 在 1990 年也曾指出先求解后平均的方法是与先平均后求解方法不同的另一种传统湍流研究方法. 他还指出所寻找的解就是一种被称为湍流分子 (即湍流元) 的孤立涡结构.

2 旋涡精确解 (湍流元) 的寻找

收稿日期: 2001-08-10
* 国家重点基础研究专项经费 (G20000773) 的资助项目

我们的出发点是不可压缩流体满足的 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\Delta u_i \tag{1}$$

并不是任意一个 Navier-Stokes 方程的解都可以拿来作为湍流元的，作为湍流元的旋涡解 (涡元) 需要满足一定的物理条件，周培源教授和我对均匀各向同性湍流提出的物理条件是旋涡解必须满足角动量守恒条件，准相似性条件和能量条件 [7~9]. 特别是我们提出了一个准相似性条件

$$\frac{a}{\nu}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{Ua}{\nu}+1 \tag{2}$$

这里 a 和 U 分别代表旋涡的特征长度和特征速度. 在复杂流动中他和陈十一推广为湍流微尺度 λ 的广义准相似性条件 [11,12]

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{\nu}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}+U_j\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\right)=\\&\qquad\frac{1}{R_0}\left\{R_\lambda^2+\left[R_1+\frac{k_1}{\nu}\lambda\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^{1/2}+\frac{k_2}{\nu}\lambda^3\left(\frac{\partial\Omega_{ik}}{\partial x_j}\frac{\partial\Omega_{ik}}{\partial x_j}\right)^{1/2}\right]^2+2R_0\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

对于复杂湍流的物理条件还需作进一步的工作. 周培源和蔡树棠给出了作为均匀各向同性湍流的湍流元的所谓周球涡和一种轴对称旋涡 [8,9].

$$u_i=U\alpha_{ij}l_j\ ,\qquad u_i=U\beta_{imn}l_ml_n \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}&\alpha_{ij}=\frac{1}{2\xi}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\xi_i\xi_j-\left(G+\frac{\xi}{2}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\right)\delta_{ij}\\&G=\frac{1}{\xi^3}\int_0^\xi\eta^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\eta^2}\mathrm{d}\eta\ ,\qquad \xi^2=\frac{R^2}{4\nu t}\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\beta_{imn}=\left(\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi}-\frac{H}{\xi^3}\right)\xi_i\xi_m\xi_n+\frac{H}{\xi}\xi_i\delta_{mn}-\left(\frac{H}{\xi}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi}\right)(\xi_m\delta_{in}+\xi_n\delta_{im})\\&H=\frac{1}{\xi^4}\int_0^\xi\eta^4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\eta^2}\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{6}$$

由于他们的工作是用中文发表的，当时没有能引起国际上的注意，将近 20 年后 Kovasznay 和 Lee[10] 发表了类似的结果.

从 80 年代开始，我们还对具有剪应力的湍流流动进行了研究. 由于复杂湍流流动的旋涡精确解无法直接找到，故而我们采用了数值计算的方法. 我们仍将湍流运动的瞬时速度场分解为

$$u_i=U_i+w_i \tag{7}$$

此时雷诺平均运动方程和连续方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}+\nu\Delta U_i\\&\frac{\partial U_j}{\partial x_j}=0\end{aligned} \tag{8}$$

其中雷诺应力 $\tau_{ij}=-\rho\overline{w_iw_j}$.

而脉动运动方程和连续方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial w_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+w_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+w_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varpi}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\nu\Delta w_i\\
&\frac{\partial w_j}{\partial x_j}=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

同时雷诺应力 (脉动速度关联) 满足方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\overline{w_iw_j}+U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{w_iw_j}+\overline{w_iw_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\overline{w_jw_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{w_iw_jw_k}=\\
&\qquad -\frac{1}{\rho}\left(\overline{w_i\frac{\partial \omega}{\partial x_j}}+\overline{w_j\frac{\partial \omega}{\partial x_i}}\right)+\nu\Delta\overline{w_iw_j}-2\nu\overline{\frac{\partial w_i}{\partial x_k}\frac{\partial w_j}{\partial x_k}}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

我们相继提出了奇阶截断法和逐级叠代法，同时对平均运动方程、脉动运动方程和脉动速度关联方程进行求解．奇阶截断法是在偶阶速度关联方程中忽略高一阶的奇阶速度关联，然后进行求解．逐级叠代法是先用常规方法求出平均速度和雷诺应力，然后代入脉动速度方程求出脉动速度，再取脉动速度乘积的平均得到二级近似的雷诺应力，再代入平均速度的方程求出二级近似的平均速度．孟庆国对平面湍流混合层，林建忠对平面湍尾流，范萌对平面湍射流和王晓宏对均匀各向同性湍流分别进行了分析，得到了符合实验测量的计算结果．详细的内容可参考最近发表在力学与实践上的周培源的文章 [13] 和有关的文献 [14~18]．这里需要指出的是旋涡解的初始条件的选取可以有一定的任意性，只要满足计算的收敛性，不同初始条件的解的统计平均规律是差不多的．

我们从 90 年代开始研究了某些特殊流动 (Beltrami 流动) 的一般解 [19]，给出了这些流动的轴对称球形涡、柱形涡以及非轴对称涡等一系列精确解，并研究了这些解可以进行叠加的特性．我们利用解的张量形式的表示将现有的各种旋涡精确解进行了分类，总结成球涡与柱涡两大类．第一类是球形涡和涡环．它们包括： Hill 球涡， Zhou 球涡， Batchelor 球涡， Moffatt 球涡， Beltrami 球涡，椭球涡和 Helmholtz 涡环等．第二类是柱形涡和涡管．它们包括： Rankine 涡，直螺旋涡管， Lamb-Oseen 涡， Taylor 涡， Bergers 涡和 Lundgren 涡等 [22]．在实际流动中，还可能存在其他的旋涡结构．例如在脱体绕流中出现的一种涡层结构．但是这种涡层结构目前还无法用精确解的形式写出，我们没有把它分成另一大类．还有一种是螺旋涡结构以及由此配对形成的蘑菇状涡结构．这种涡结构的解需要作进一步的研究工作．此外，有时流场中还会出现周期涡结构 (如 Taylor- Green 涡)，此时我们只要取其中单个元胞作为涡元即可．这里还要强调一点的是我们将这些旋涡解都写成张量表示的形式．这样做的好处不仅便于对旋涡轴线方向作统计平均处理，而且更适合于对各种不同的旋涡结构进行对称性分析．此外，我们还对一类层状流 (一种涡面) 的结构进行了分析，发现了一种间歇层状流动的存在 [23]．

最近，我们还对旋涡这种三维有序结构的识别进行了探讨．现有的识别方法包括最小压力的低压区定义，速度梯度张量的第二特征值定义和第二不变量定义，以及它的特征值方程的复根判别式定义，还有涡量等值面的定义等．这些方法都不能很好的和准确的识别出真正的旋涡结构来．我们认为旋涡结构应从涡面和物质面去考察，而不应从等涡面或其他物理量的等值面去考察，因此我们提出用一种 $\boldsymbol{\lambda}$ 曲面来识别旋涡结构更为恰当． $\boldsymbol{\lambda}$ 曲面是由 $\boldsymbol{\lambda}$ 矢量作为法向导数来定义的．而 $\boldsymbol{\lambda}$ 矢量则定义为

$$
\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}=g\nabla h \tag{11}
$$

而 h= 常数的曲面就是 $\boldsymbol{\lambda}$ 曲面．在定常情况中，这种 $\boldsymbol{\lambda}$ 曲面是由涡面和流面共同组成的．

3 旋涡解的叠加

由于湍流流场中总是伴随着许多旋涡，这些旋涡如何叠加，如何相互作用是我们非常关心的事情．我们通常在流动中观察到的往往是一种复合涡结构．因此，如何寻找其中的基本涡元结构是非常重要的研究工作． 90 年代后期我们曾发现一类满足非线性 Navier-Stokes 方程的可叠加的旋涡精确解 [22]

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^* \mathrm{e}^{-\lambda^2 \nu t} \tag{12}$$

其中部分解 u_i^* 就是一种特殊的 Beltrami 流动解．它满足条件

$$\omega_i^* = \alpha u_i^* \tag{13}$$

另一部分解 $u_i^{(1)}$ 是一个直螺旋涡管解

$$u_i^{(1)} = \frac{2\Omega}{\lambda^2} l_i + \frac{\Omega}{\lambda} \varepsilon_{ijk} l_j x_k \tag{14}$$

我们还可以分别给出象孤立波那样的离散和连续叠加的 2 种精确解

$$\begin{aligned} u_i(x_k) &= u_i^{(1)}(x_k) + \exp^{-\lambda^2 \nu t} \sum_{j=1}^{n} c_j u_j^* (x_k + d_j l_k) \\ u_i(x_k) &= u_i^{(1)}(x_k) + \exp^{-\lambda^2 \nu t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa) u_i^* (x_k + \kappa l_k) \, \mathrm{d}\kappa \end{aligned} \tag{15}$$

这个理论结果进一步发展了 Batchelor 教授在他的教科书《流体动力学引论》中的结论 [24]．同时发现已知的 Moffatt 球涡实际上是直螺旋涡管和一阶 Beltrami 球涡的叠加。因此可以说 Moffatt 球涡就是一种复合涡结构．我们还考察了 Lundgren 涡，发现它也具有可叠加性．研究结果表明，旋涡相互作用的结果会使弱小旋涡完全改变它自身的形状，除非该旋涡本身是奇异性很强的结构．

旋涡解的叠加可以有很多种方法。它可以包括同心同向，同心异向，异心同向和异心异向 4 种．这里提到的旋涡方向是指在旋涡中心处的速度方向．我们研究了涡球和涡环的叠加，我们发现同心异向和异心异向旋涡的叠加，尽管只有 2 个球涡或 2 个涡环，都会出现非常复杂的混沌流场结构 [19,25,26]，其中包括一种有趣的双环涡结构 [19]．

4 统计平均的计算方法

在找到了恰当的速度场旋涡解以后，重要的一步工作是对它们进行适当的统计平均处理，以求得它们的统计规律．周培源和蔡树棠最早提出的统计平均方法是假定流场是一种涡旋组成的，流场中任意一个物理量 A 的统计平均值是对这种旋涡的中心的空间位置和它的对称轴的方向进行统计平均

$$\overline{A} = \frac{N}{V} \iiint \mathrm{d}V \frac{1}{4\pi} \iint A \mathrm{d}\Omega \tag{16}$$

这种统计平均方法只适用于轴对称旋涡．我们于 1998 年进一步将它推广到非轴对称旋涡的情况 [20,21]．对任意物理量 A 现在采用的统计平均公式是

$$\overline{A} = \frac{N}{V} \iiint \mathrm{d}V \frac{1}{8\pi^2} \iiint A \mathrm{d}\Omega = \frac{N}{V} \iiint \overline{A}^l \mathrm{d}V \tag{17}$$

这里的方向平均是对固定在旋涡中心处的动坐标系的三个欧拉角取平均. 这种平均公式最早是 Saffman 和 Pullin 提出来的 [28]. 我们还首次给出了具有广泛应用价值的计算方向平均的一般公式

$$\overline{l_{i_1}l_{i_2}\cdots l_{i_{2\alpha}}m_{j_1}m_{j_2}\cdots m_{j_{2\beta}}}^{l}=\sum_{k=0}^{\beta}R_k^{(2\alpha,2\beta)}H_{i_1i_2\cdots i_{2\alpha}j_1j_2\cdots j_{2\beta}}^{(2k)} \tag{18}$$

其中 l_i 和 m_j 是动坐标系的第一和第二坐标轴方向的单位矢量

$$R_k^{(2\alpha,2\beta)}=\frac{(-1)^k(\alpha+\beta-k)!\,(2k-1)!!}{2^k\alpha!\beta!\,(2\alpha+2\beta+1)!!} \tag{19}$$

以及 $H_{i_1i_2\cdots i_{2\alpha}j_1j_2\cdots j_{2\beta}}^{(2k)}$ 是所有各种可能包含 $2k$ 个交叉下标的 δ_{ij} 项乘积的总和. 另外总个数为奇数的单位方向矢量的方向平均均为 0. 最简单和最基本的方向平均公式是

$$\overline{l_il_j}^{l}=\frac{1}{3}\delta_{ij}\ ,\qquad \overline{l_im_jn_k}^{l}=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk} \tag{20}$$

我们还发现利用上面给出的方向平均公式可以用来讨论一般 n 阶张量的基本形式.

在进行统计平均之前, 我们首先要将旋涡解写成一种张量表示的形式. 把坐标轴的方向矢量分离出来. 对于一般的非轴对称旋涡结构, 其旋涡解可以写为

$$u_i=\beta_{ijk\ldots no\ldots qr\ldots uv}l_jl_k\ldots l_nm_o\ldots m_qn_r\ldots n_un_v \tag{21}$$

然后对方向的平均就可以单独进行处理了. 这里需要指出的是方向平均实际上是一种各向同性化的处理方式, 如果考虑一般的各向异性湍流, 则不必进行方向平均处理. 在具体求解时, 常用的一种方法是采用 Fourier 变换的方法. 因为这样一来与二元速度关联函数对应的能谱函数就很容易计算了.

$$\varPhi_{ij}=\frac{N}{V}(2\pi)^3\,\overline{\varphi_i^*\varphi_j}^{l} \tag{22}$$

再利用解的张量表示形式和上面给出的方向平均公式, 结果就直接出来了. 另外, 如果考虑具有空间周期性的旋涡结构, 则必须采用有限空间的统计平均来代替上面的平均公式, 然后再采用离散 Fourier 变换来进行计算.

5 统计平均值的规律的探索

上世纪 60 年代我们曾用上面给出的轴对称旋涡模型给出了均匀各向同性湍流衰变后期的三元速度关联的理论预言 [27], 70 年代给出了均匀各向同性湍流从衰变初期到衰变后期的湍能衰变规律和微尺度演化规律的预言 [7], 10 年后都得到了相关实验的证实 [29,30].

其中衰变后期的三元速度关联函数是

$$k(r,t)=\frac{35}{6}SY\left(\frac{r}{\lambda}\right) \tag{23}$$

这里 S 是无量纲偏斜因子, 且

$$Y(\zeta)=\frac{1}{\zeta^4}\left[\int_0^{\zeta}\xi^4\exp^{-\frac{2}{3}\xi^2}\mathrm{d}\xi-\exp^{-\frac{1}{2}\zeta^2}\int_0^{\zeta}\xi^4\exp^{-\frac{1}{6}\xi^2}\mathrm{d}\xi\right] \tag{24}$$

湍能衰变规律是

$$\frac{\overline{u_0^2}}{\overline{u^2}}=c^5a_*^5 \tag{25}$$

和湍流微尺度演化规律是

$$\lambda_*^2 = \frac{a_*^5}{1+a_*^3} \tag{26}$$

其中无量纲特征尺度 a_* 满足公式

$$a_*^2 - \frac{1}{3}\lg\frac{1+a_*^3}{(1+a_*)^3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}a_*}{2-a_*} = t_* \tag{27}$$

80 年代初期我们还给出了符合实验测量的均匀各向同性湍流二元速度关联和三元速度关联以及相应的能谱函数和能谱交换函数的理论计算结果 [9,10].

我们曾用上面给出的方向平均公式得到了均匀剪切湍流的脉动速度梯度的 N 阶矩的 2 个一般表达式，改进了 Saffman & Pullin 在 90 年代中期所做的工作 [28]. 我们得到的广义超偏斜因子为 [21]

$$S_{2m+1} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2m+1}}^{l}\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}}^{l}\right]^{-m-1/2} = \frac{15^{m+1/2}(2m+1)!}{(4m+3)!!}\sum_{k=0}^{\frac{1}{3}(m-1)}\frac{2^{k-m}(2m-2k-1)!!}{(2k+1)!(m-3k-1)!}\left(\frac{49}{135}\right)^{k+1/2}S_3^{2k+1} \tag{28}$$

广义超平坦因子为

$$F_{2m} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2m}}^{l}\left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}}^{l}\right]^{-m} = \frac{15^{m}(2m)!}{(4m+1)!!}\sum_{k=0}^{\frac{1}{3}m}\frac{2^{k-m}(2m-2k-1)!!}{(2k)!(m-3k)!}\left(\frac{49}{135}\right)^{k}S_3^{2k} \tag{29}$$

这些公式表明无量纲速度梯度的高阶矩是无量纲速度梯度三阶矩 (即偏斜因子 S_3) 的多项式函数. 这个结果说明了在一般湍流运动情况中，高阶矩不一定存在只有一项的标度律.

最近，利用我们首次引进的特征张量的概念和并矢张量的表示方式应用于湍流雷诺应力非线性代数模式的分析，严格论证和给出了雷诺应力 τ_{ij} 用速度梯度张量 $U_{i,j}$ 表示的最一般的非线性代数模式表达式 [31]

$$\tau_{ij} = Al_il_j + Bm_im_j + Cn_in_j + D\left(l_im_j + l_jm_i\right) + E\left(m_in_j + m_jn_i\right) + F\left(n_il_j + n_jl_i\right) \tag{30}$$

或

$$\tau_{ij} = a_1\delta_{ij} + a_2P_{ij} + a_3P_{ij}^2 + a_4\left(P_{ik}W_{kj} + P_{jk}W_{ki}\right) + a_5W_{ij}^2 + a_6\left(P_{ik}^2W_{kj} + P_{jk}^2W_{ki}\right) \tag{31}$$

这里 $U_{i,j} = P_{ij} + W_{ij}$ ，分别是对称张量和非对称张量

$$P_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right), \qquad W_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} - U_{j,i}\right) \tag{32}$$

这种表示方式大大简化了现有的雷诺应力代数模式的表示形式.

6 讨　论

上面我们所讨论的内容都是在流场中不存在固壁边界和只考虑一种旋涡的前提下进行的. 如果流场中存在有固壁边界，则涡元如何选取？假定流场中只存在一种旋涡是否合理？如何考

虑多种尺度的旋涡或不同种类的旋涡和它们的影响？以及平均方法如何选取？等等问题都是我们进一步研究面临要解决的课题．特别是有关旋涡的尺度必须把特征速度尺度和特征长度尺度区别开来．前者的大小决定旋涡的强弱，后者才决定旋涡在空间中的大小．

参 考 文 献

1 Huang Yongnian. Prof. Chou's statistical theory of turbulunce. Lin C C ed. Some New Trends on Fluid Mechanics and Theoretical Physics. Beijing: Peking University Press, 1993. 9～19

2 Chou Peiyuan, Chou Ruling. 50 years of turbulence research in China. *Annu Rev Fluid Mech*, 1995, 27: 1～15

3 蔡树棠，刘宇陆．湍流理论．上海：上海交通大学出版社， 1993. 87～123

4 周培源，蔡树棠．涡球在黏性流体中的运动．北京大学学报， 1956, 1(1): 39～49

5 周培源，蔡树棠．均匀各向同性湍流在后期衰变时的涡性结构．力学学报， 1957, 1(1): 3～14

6 Narasimha. Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads. In: Lumley J L, ed. Lecture Notes in Physics, New York: Springer-Verlag, 1990, 357: 36

7 周培源，黄永念．均匀各向同性湍流的涡旋结构的统计理论．中国科学， 1975, 2: 180～198

8 黄永念，周培源． Navier-Stokes 方程的求解和均匀各向同性湍流理论 — 理论与计算方法．中国科学，1981, 7: 826～835

9 黄永念，周培源． Navier-Stokes 方程的求解和均匀各向同性湍流理论 — 数值计算和与实验的比较．中国科学， 1981, 8: 953～964

10 Kovasznay L S G, Lee R L. Viscous and turbulent votices. *Omaggio a Carlo Ferrari*, 1974. 431～447

11 Zhou Peiyuan. On the condition of pseudo-similarity and the theory of turbulence. *Scientia Sinica*, Series A, 1985, 28(4): 405～421

12 周培源，陈十一．不可压缩流体的湍流理论．中国科学 A 辑， 1987, 4: 569～380

13 周培源．非压缩性流体的湍流理论．力学与实践， 2002, 24(4): 1～9

14 周培源，黄永念，孟庆国．平面湍流混合层的准相似性理论．力学学报， 1990, 22(1): 1～8

15 Lin Jianzhong, Huang Yongnian, Zhou Peiyuan. The new method of solving velocity correlation functions and application to the plane tuebulent wake. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, 9(2): 102～109

16 Wang Xiaohong, Huang Yongnian, Zhou Peiyuan. Statistical theory of homogeneous isotropic turbulence for incompressible fluids. *Science in China(Series A)*, 1994, 37(2): 117～1250

17 孟庆国，黄永念，周培源．平面湍流混合层流动的统计理论．水动力学研究与进展， A 辑， 1995, 10(4): 443～450

18 范萌，黄永念，周培源．逐级叠代近似法求解不可压平面湍射流．水动力学研究与进展， A 辑， 1996, 11(4): 465～470

19 黄永念，是长春，朱照宣等． Lagrange 湍流与 Beltrami 流动． Zhao Dagang ed. 现代流体力学进展 II, 北京：科学出版社， 1993. 1～15

20 黄永念．周培源湍流统计理论的新发展．北京大学学报 (自然科学版), 1998, 34(2-3): 151～158

21 Huang Yongnian, Luo Xiongping. On orientation averages for vortex models of turbulence. *Physics of Fluids*, 1999, 14(8): 2381～2386

22 黄永念，胡欣．流体动力学方程的三维旋涡解的可叠加性．应用数学和力学， 2000, 21(12): 1227～1237

23 胡欣，黄永念，崔勇等．一种寻求层状流动新解的方法．力学学报， 2002, 34(3): 314～319

24 Batchelor G K. An Introduction to Fluid Dynamics. London: Cambridge University Press, 1970. 543～546

25 Huang Yongnian, Schorghofer N, Ching E S C. Two vortex rings produce chaos. *Europhysics Letters*, 2000, 52(4): 399～405

26 Ching E S C, Huang Yongnian, Schorghofer N. Regular and chaotic streamlines of two vortex rings. *Fluid Dynamics Research*, 2001, 29: 295～311

27 黄永念．均匀各向同性湍流在后期衰变时的三元速度关联．力学学报， 1965, 8(2): 122～132

28 Saffman P G, Pullin D I. Calculation of velocity structure functions for vortex models of isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 1996, 8(11): 3072～3084

29 Bennett J C, Corrsin S. Small Reynolds number nrarly isotropic turbulence in a straight duct and a contraction. *Physics of Fluids*, 1978, 21(12): 2129～2140

30 魏中磊，诸乾康，钮珍南，俞达成．网格湍流微结构的实验研究．力学学报， 1988, 20(3): 200～205

31 Huang Yongnian, Ching E S C, Reynolds stress modeling using invariant theory. 周哲玮编．湍流理论新进展及其应用，上海：上海大学出版社， 2000. 124～128

ON THE STATISTICAL VORTES STRUCTURE THEORY OF TURBULENCE*

Huang Yongnian
State Key Laboratory of Turbulence and Complex System Research, Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract The statistical vortex structure theory of turbulence was put forward by late professor Zhou in the 1950s'. With the efforts of him and his students during the half century, it has become a statistical theory of turbulence with a special feature. Now in order to commemoration of the 100th anniversary of professor Zhou's birthday, this paper gives a summary and an outline of this theory, which includes the vortex solutions as turbulent elements, the possible vortex structures, the suitable statistical average methods and the statistical rules of turbulence, etc.

Keywords turbulent element, vortex structure, statistical average, statistical theory of turbulence

*The project supported by the Special Funds for Major State Basic Research Projects(G20000773)