第 30 卷　第 3 期　　力 学 进 展　　Vol. 30　No. 3
2000 年 8 月 25 日　　ADVANCES IN MECHANICS　　Aug. 25, 2000

非完整系统动力学中的 Vakonomic 模型和 Четаев 模型*

梁立孚

哈尔滨工程大学航天工程系，哈尔滨 150001

摘　要　综述了非完整系统动力学中 Четаев 模型和 Vakonomic 模型. 论证了 Hertz, Capon 和 Lindelöf 的工作与 Vakonomic 模型相吻合，而 Hölder, Pars 和 Чаплыгин 的工作与 Четаев 模型相吻合，Vakonomic 模型和 Четаев 模型两类模型并存的局面可以追溯到非完整力学发展的初期. 说明了伴随两类模型并存的现象而出现的两个问题：d-δ 交换性问题和 $\int$-δ 交换性问题. 综述了我国学者为统一两类模型作出的贡献. 最后，展望了该领域的研究方向.

关键词　非完整系统，Vakonomic 模型，Четаев 模型

1 引 言

在非完整系统分析动力学中，存在若干有待进一步澄清和发展的问题，在这些问题中，Vakonomic 模型与 Четаев 模型之间的关系问题是一个核心问题.

对于非线性非完整系统，Четаев 和他的继承者 Румянцев 建立了 Четаев 模型；Козлов 认为，他在推广最小作用量原理的基础上，研究了带有不可积约束系统分析动力学的新的数学模型，称之为 Vakonomic 模型. 本文描述了 Четаев 模型和 Vakonomic 模型，论证了 Hertz 和 Capon 的工作与 Vakonomic 模型相吻合，而 Hölder 和 Pars 的工作与 Четаев 模型相吻合. 还论证了 Lindelöf 的工作与 Vakonomic 模型相吻合，而 Чеплыгин 的工作与 Четаев 模型相吻合. 说明了伴随两类模型并存的现象而出现的两个问题：d-δ 交换性问题和 $\int$-δ 交换性问题. 通过研究 Vakonomic 学派与 Четаев 学派之间的长期争论发现，这一次又一次的争论不是机械的重复，而是螺旋式的上升，但继续争论下去不会有实质性的进展. 本文作者注意到，Vakonomic 学派按照规范的变分程序，应用 Hamilton 原理，只能导出非完整系统的测地轨道方程；而 Чатаев 学派并不遵循规范的变分程序，对变分方法在非完整系统分析动力学中的应用提出某些限制，却能导出非完整系统的真实轨道方程；文章说明了我国学者为统一两类模型作出的贡献. 最后，展望了今后这方面的研究方向.

2 线性非完整系统

1894 年 Hertz 引入非完整系统的概念，他认为 Hamilton 原理不能应用于非完整系统，更确切地说，对 Hamilton 原理的数学上可能的应用导致物理上错误的结果 [1]. 1952 年 Capon 重申

收稿日期：1998-10-05，修回日期：1999-01-28
* 国家自然科学基金 (19872022) 和国家教委博士点专项基金资助课题

Hertz 的观点，他认为 Hölder 的方法是错误的 [2].

Hertz 和 Capon 都是以线性非完整系统为研究对象，按照变分学中规范的步骤，应用 Hamilton 原理，导出系统的测地轨道方程．应用通用的符号， Hamilton 原理的泛函为

$$\pi=\int_{t_0}^{t_1} L(q_s,\dot{q}_s,t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

其线性非完整约束方程为

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\dot{q}_s+A_\beta=0, \qquad \beta=1,2,\cdots,g, \quad s=1,2,\cdots,n, \quad g<n \tag{2}$$

引入 Lagrange 乘子 μ_β, 构造一个新泛函

$$\pi^*=\int_{t_0}^{t_1}\left[L(q_s,\dot{q}_s,t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\dot{q}_s+A_\beta\right)\right]\mathrm{d}t \tag{3}$$

将 π^* 变分，并令 $\delta\pi^*=0$, 经分部积分，并按惯例在时域边界 ($t=t_0$ 和 $t=t_1$) 处取 $\delta q_s=0$, 则有

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{\beta k}}{\partial q_s}-\frac{\partial A_{\beta s}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+\right.\right.$$
$$\left.\left.\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial q_s}-\frac{\partial A_{\beta s}}{\partial t}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta A_{\beta s}\right]\delta q_s\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{4}$$

其中， $A_{\beta s}$ 为 q_s 和 t 的函数， $k=1,2,\cdots,n$. 由于引入 Lagrange 乘子，使得 δq_s 相互独立，故由 (4) 式可得系统的测地轨道方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{\beta k}}{\partial q_s}-\frac{\partial A_{\beta s}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial q_s}-\frac{\partial A_{\beta s}}{\partial t}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta A_{\beta s}=0 \tag{5}$$

若将约束方程 (2) 变换为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\dot{q}_\sigma+B_\beta, \quad \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon, \quad \varepsilon=n-g \tag{6}$$

其中 $B_{\beta\sigma}$ 和 B_β 均为 q_s 和 t 的函数．此时，泛函 (3) 变换为

$$\pi^*=\int_{t_0}^{t_1}\left[L(q_s,\dot{q}_s,t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\dot{q}_\sigma+B_\beta-\dot{q}_{\varepsilon+\beta}\right)\right]\mathrm{d}t \tag{7}$$

系统的测地轨道方程 (5) 变换为

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{l=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta l}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial t}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta B_{\beta\sigma}=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\nu}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\nu}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\sum_{l=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\beta l}}{\partial q_{\varepsilon+\nu}}\dot{q}_l+\frac{\partial B_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\nu}}\right)+\dot{\mu}_\nu=0, \quad l=1,2,\cdots,\varepsilon, \ \nu=1,2,\cdots,g \tag{9}$$

1896 年，Hölder 指出，对非完整系统，Hamilton 原理没有像对完整系统那样使 Lagrange 函数积分取驻值的形式 $\delta\int L\mathrm{d}t=0$, 而有取 Lagrange 函数变分对时间的积分为零的形式 $\int\delta L\mathrm{d}t=$

0[3]. 1954 年 Pars 不同意 Capon 对 Hölder 的批评，他认为 Hölder 的著名论文 [3] 是变分原理的奠基性论文之一. Pars 进一步指出，“当我们考虑非完整系统时，我们至少能将 Hamilton 原理推广为两种不同的形式：……. 首先要注意的是，对非完整系统，一种推广给出一个正确的定理，而另一种推广给出一个错误的定理”[4].

Hölder 和 Pars 也都是以线性非完整系统为研究对象，将 Hamilton 原理的泛函表示为

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L(q_s, \dot{q}_s, t)\mathrm{d}t = 0 \tag{10}$$

对线性非完整约束方程 (2) 应用 Hertz-Hölder 原则 [5], 则有

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\delta q_s = 0 \tag{11}$$

引入 Lagrange 乘子 λ_β, 将 (11) 纳入泛函 (10) 中，可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta L(q_s, \dot{q}_s, t) + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\delta q_s\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{12}$$

将 $\delta L(q_s, \dot{q}_s, t)$ 展开，经分部积分，并按惯例在时域边界处 $\delta q_s = 0$, 则有

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta A_{\beta s}\right)\delta q_s \mathrm{d}t = 0 \tag{13}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得 δq_s 相互独立，故由 (13) 式可得系统的真实轨道方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta A_{\beta s} = 0 \tag{14}$$

若将约束方程 (2) 变换为约束方程 (6), 经应用 Hertz-Hölder 原则，可得

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma \tag{15}$$

因而使泛函 (13) 变换为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta L(q_s, \dot{q}_s, t) + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \left(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma - \delta q_{\varepsilon+\beta}\right)\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{16}$$

进而使系统的真实轨道方程变换为

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta B_{\beta\sigma} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} - \lambda_\beta = 0 \tag{18}$$

3 非线性非完整系统

1982 年 ~1983 年，Козлов 在莫斯科大学校刊数学和力学卷上连载论文“不可积约束系统的动力学”, 用 Козлов 的话说，该论文是在推广最小作用量原理的基础上，研究了带有不可积约束的系统的分析动力学的新的数学模型 [6]. 人们称这类模型为 Vakonomic 模型.

Козлов 是以非线性非完整系统为研究对象，按照变分学中规范的步骤，应用 Hamilton 原理，导出系统的测地轨道方程．应用通用的符号， Hamilton 原理的泛函表示为 (1) 式，即

$$\pi=\int_{t_0}^{t_1}L(q_s,\dot{q}_s,t)\mathrm{d}t,\quad s=1,2,\cdots,n$$

其非线性非完整约束方程为

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\quad \beta=1,2\cdots,g,\quad g<n \tag{19}$$

引入 Lagrange 乘子 μ_β, 将约束方程 (19) 纳入泛函 (1) 中，构造一个新泛函

$$\pi^*=\int_{t_0}^{t_1}\left[L(q_s,\dot{q}_s,t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)\right]\mathrm{d}t \tag{20}$$

将 π^* 变分，并令 $\delta\pi^*=0$, 经分部积分，并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s=0$, 则有

$$\delta\pi^*=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right]\delta q_s\mathrm{d}t=0 \tag{21}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得 δq_s 相互独立，故由 (21) 式可得非线性非完整系统的测地轨道方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}=0 \tag{22}$$

若将约束方程 (19) 变换为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t),\quad \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon,\quad \varepsilon=n-g \tag{23}$$

则泛函 (20) 变换为

$$\pi^*=\int_{t_0}^{t_1}\left[L(q_s,\dot{q}_s,t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta(\varphi_\beta-\dot{q}_{\varepsilon+\beta})\right]\mathrm{d}t \tag{24}$$

系统的测地轨道方程 (22) 变换为

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}=0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\nu}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\nu}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\nu}}+\dot{\mu}_\nu=0,\quad \nu=1,2,\cdots,g \tag{26}$$

1933 年， Четаев 引入著名的 Четаев 条件 [7]. 当时 Четаев 条件是以定义的形式被引入的：让我们约定，将 $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ 称为系统的各点的可能位移，在条件

$$x_i'=a_i(t,q_s,q_s'),\quad y_i'=b_i(t,q_s,q_s'),\quad z_i'=c_i(t,q_s,q_s') \tag{27}$$

约束下，可用下式确定

$$\delta x_i=\sum\frac{\partial a_i}{\partial q_s'}\delta q_s,\quad \delta y_i=\sum\frac{\partial b_i}{\partial q_s'}\delta q_s,\quad \delta z_i=\sum\frac{\partial c_i}{\partial q_s'}\delta q_s \tag{28}$$

其中 δq_s 是任意的无限小量．作为 Четаев 的当然的继承人， Румянцев 在本世纪 70 年代和 80 年代相继撰文，完善了 Четаев 模型 [8,9]. Румянцев 支持 Hölder 和 Pars 的理论．并将之成功地应用于非线性非完整系统．

Hamilton 原理的泛函为 (10) 式，即

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L(q_s,\dot{q}_s,t)\mathrm{d}t=0$$

对非线性非完整约束方程应用 Четаев 条件，则有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \tag{29}$$

引入 Lagrange 乘子 λ_β, 将 (29) 纳入泛函 (10) 中，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L(q_s,\dot{q}_s,t)+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right]\mathrm{d}t=0 \tag{30}$$

将 $\delta L(q_s,\dot{q}_s,t)$ 展开，经分部积分，并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s=0$, 则有

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\mathrm{d}t=0 \tag{31}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得 δq_s 相互独立，故由 (31) 式可得系统的真实轨道方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0 \tag{32}$$

若将约束方程 (19) 变换为约束方程 (23), 并应用 Четаев 条件，则有

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma,\quad \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon,\quad \varepsilon=n-g \tag{33}$$

进而使泛函 (30) 变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L(q_s,\dot{q}_s,t)+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\lambda_\beta\left(\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma-\delta q_{\varepsilon+\beta}\right)\right]\mathrm{d}t=0 \tag{34}$$

因而使真实轨道方程变换为

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}=0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}-\lambda_\beta=0 \tag{36}$$

将非线性非完整系统的情况与线性非完整系统的情况加以比较可以发现：非线性非完整约束方程 (19) 和 (23) 退化到线性情况则为 (2) 和 (6), 非线性系统中的 Четаев 条件 (29) 和 (33) 退化到线性情况则为 Hertz-Hölder 原则 (11) 和 (15), 将非线性非完整系统的测地轨道方程 (22) 和 (25), (26) 退化到线性情况则为 (5) 和 (8), (9); $\cdots$. 由以上比较可见，在非完整系统动力学中， Vakonomic 模型和 Четаев 模型两类模型并存的局面可以追溯到非完整力学发展的初期. 换句话说， Козлов 的工作与 Hertz 和 Capon 的工作相吻合，而 Четаев 和 Румянцев 的工作与 Hölder 和 Pars 的工作相吻合，只不过 Hertz, Capon, Hölder 和 Pars 研究的是线性非完整系统，而 Козлов, Четаев 和 Румянцев 研究的是非线性非完整系统.

4 Lindelöf 和 Чаплыгин 的工作

在变分学中，将有约束条件的变分问题转化为无约束条件的变分问题的方法有两种，一是

Lagrange 乘子法，一为代入法 [10]. 前面在 §2 和 §3 中，都是应用 Lagrange 乘子法来处理问题的，那么，在非完整系统动力学中有没有用代入法来处理问题的呢？有的，不过在非完整系统动力学中不称为代入法，而称为约束对动能的嵌入 [11,12]. 有趣的是，在用代入法处理问题的过程中，发生了像在 Lagrange 乘子法处理问题过程中类似的现象，即按照变分学中规范的方法来处理问题的 Lindelöf 得不到系统的真实轨道方程，而对约束方程应用 Hertz-Hölder 原则 (在非线性非完整系统中为 Четаев 条件) 的 Чаплыгин 却能导出系统的真实轨道方程.

1895 年， Lindelöf 应用系统的非完整约束的关系式来简化系统的动能表达式，消去因非完整约束的存在而产生的不独立的广义速度，导出与 Lagrange 方程相似的动力学方程. 尽管也有满足这类方程的真实轨道，但有无限多满足这类方程的轨道不是真实的，因此， Lindelöf 的工作被 Чаплыгин 说成是 Lindelöf 错误 [13]. 以下我们将说明， Lindelöf 的工作与 Vakonomic 模型相吻合.

应注意， Lindelöf 处理的是有循环坐标的线性非完整系统. 其线性非完整约束方程为

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\dot{q}_s = 0, \quad s=1,2,\cdots,n. \quad \beta=1,2,\cdots,g \tag{37}$$

其中 $A_{\beta s}$ 仅为 q_σ 的函数， $\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon$, $\varepsilon=n-g$. 为了方便起见，有时将约束方程 (37) 变换为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\beta\sigma}\dot{q}_\sigma, \quad \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon, \quad \varepsilon=n-g \tag{38}$$

其中 $B_{\beta\sigma}$ 仅为 q_σ 的函数，即存在循环坐标 $q_{\varepsilon+\beta}$. 对于如上的系统， Hamilton 原理表示为

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} L(q_\sigma, \dot{q}_s, t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} [T(q_\sigma, \dot{q}_s, t) + U(q_\sigma, t)]\mathrm{d}t \tag{39}$$

其约束条件为 (38), 其中 T 为动能， U 为力函数. 将 π 变分，并令 $\delta\pi=0$, 则有

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma + \frac{\partial U}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right) + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{40}$$

其约束方程 (38) 可以变换为

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\beta\sigma}\delta\dot{q}_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{l=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_l}\dot{q}_\sigma\delta q_l, \quad l=1,2,\cdots,\varepsilon \tag{41}$$

将 (41) 代入 (40), 经分部积分，并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s=0$, 则可导出如下方程

$$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} + \frac{\partial U}{\partial q_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{l=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta l}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l - \sum_{\beta=1}^{g} B_{\beta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} = 0 \tag{42}$$

利用方程 (38) 将 T 的表达式中的 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 消去，而名其所得结果为 $\widetilde{T}$, 则有

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{l=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\beta l}}{\partial q_\sigma}\dot{q}_l \tag{43}$$

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}B_{\beta\sigma} \tag{44}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_{\beta\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g} B_{\beta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} \tag{45}$$

将 (43) 和 (45) 代入 (42), 可得 Lindelöf 的结果

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}=0 \tag{46}$$

若用 Lagrange 乘子法来处理问题，则采用 §2 中的步骤可得测地轨道方程

$$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{l=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta l}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta B_{\beta\sigma}=0 \tag{47}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\dot{\mu}_\beta=0 \tag{48}$$

由 (48) 解得

$$\dot{\mu}_\beta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}},\quad \mu_\beta=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} \tag{49}$$

将 (49) 代入 (47) 可得 (42), 进而可得 (46). 可见， Lindelöf 的工作与 Hertz 和 Capon 的工作是吻合的. 如前所述， Hertz 和 Capon 的工作与 Vakonomic 模型是吻合的，故知 Lindelöf 的工作与 Vakonomic 模型也是吻合的.

1897 年 Чаплыгин 指出, 在 Lindelöf 的著作的开始数页里, 当推导微分方程的时候, Lindelöf 造成一个重大的错误，因而他所得出的方程比作者 (指 Чаплыгин) 实在所得到的要简单些. 我们知道， Чаплыгин 与 Lindelöf 研究的是同一类问题，都是带有循环坐标的线性非完整系统的动力学问题. Чаплыгин 与 Lindelöf 的区别，仅在于 Чаплыгин 对约束方程 (38) 应用了 Hertz-Hölder 原则，从而可得

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma \tag{50}$$

将 (50) 代入 (40), 经分部积分，并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s=0$, 则可导出如下方程

$$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}B_{\beta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}=0 \tag{51}$$

将 (43) 和 (45) 代入 (51), 可得 Чаплыгин 方程

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{l=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta l}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l=0 \tag{52}$$

若用 Lagrange 乘子法来处理问题，采用 §2 中的步骤，可得真实轨道方程

$$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta B_{\beta\sigma}=0 \tag{53}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}-\lambda_\beta=0 \tag{54}$$

由 (54) 解得

$$\lambda_\beta=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} \tag{55}$$

将 (55) 代入 (53), 可得 (51), 进而可得 (52). 可见， Чаплыгин 的工作与 Hölder 和 Pars 的工作是吻合的. 如前所述， Hölder 和 Pars 的工作与 Четаев 模型是吻合的，故知 Чаплыгин 的工作与 Четаев 模型也是吻合的.

5 两个相关的问题

由于 Четаев 条件是以定义的形式引入的，多年来人们既不能以力学分析的形式得到它，又不能用约束方程的逻辑诱导得到它，因而限制了人们对它的深入的认识. Четаев 模型并不遵循变分学的规范的程序，但是，应用 Четаев 条件确实能导出系统的真实轨道方程. 由于 Четаев 学派对变分方法在非完整系统动力学中的应用提出一些限制，从而产生了 d-δ 交换性和 $\int$-δ 交换性问题.

关于 d-δ 交换性问题，主要存在两种观点. 一种观点认为，对独立的广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 而言，d-δ 交换关系成立

$$\delta\dot{q}_\sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma \tag{56}$$

而对不独立的广义速度 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 而言，d-δ 交换关系不成立. 作出这一结论的理由是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_{\varepsilon+\beta} - \delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} A_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma \neq 0 \tag{57}$$

其中

$$A_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} - \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma} - \sum_{\nu=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{58}$$

持这种观点的学者的代表是 Суслов[14]. 值得注意的是，在 (57) 式中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_{\varepsilon+\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \tag{59}$$

是应用了 Четаев 条件后的算式，而

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_s}\delta q_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma \tag{60}$$

是采用了应用 Четаев 条件前的算式.

另一种观点认为，对所有的广义速度 d-δ 交换性都成立

$$\delta\dot{q}_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s \tag{61}$$

根据这一关系得出

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_s \tag{62}$$

一般说来 $\delta f_\beta \neq 0$. 持这种观点的学者的代表是 Hölder[3] 或 Воронец[15]. 值得注意的是，上式是对

$$\delta f_\beta = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s \tag{63}$$

应用 Четаев 条件而得到的.

关于 $\int$-δ 交换性问题也是伴随着 Четаев 条件 (对线性系统退化为 Hertz-Hölder 原则) 而产生的，即长期以来非完整系统动力学界的学者们无法将下式中的变分号提到积分号外

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L(q_s,\dot{q}_s,t) + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q'_s}\delta q_s\right]\mathrm{d}t = 0$$

对此，Hölder 的说法是对非完整系统 Hamilton 原理只能取对 Lagrange 函数的变分积分为零的形式；Pars 的说法是 Hamilton 原理的一种推广 $\int \delta L dt = 0$ 给出一个正确的定理；Greenwood 公开指出对非完整系统积分和变分次序不能交换 [16].

$\int$-δ 交换性问题的重要性在于它与非完整系统的 Hamilton 原理是否是驻值变分原理密切相关 [17].

6 我国学者的研究

专著 [18] 和译文 [19]、[20] 将我国学者对非完整力学的研究引导到世界性研究的前沿. 我国学者的研究是历史上对这类研究的继续，但比起以往的研究来更加深入、更加全面.

首先要提到的是我国学者关于 Четаев 模型和 Vakonomic 模型的有益讨论 [21~23]. 文献 [21] 和 [23] 指出 Четаев 条件的不足：为了得到约束加在虚位移上的条件，必须在方程

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\dot{q}_s + A_\beta = 0$$

中舍去自由项 A_β, 并将约束方程写成微分形式. 再用 δq_s 代替 dq_s, 可得 (11) 式，即

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\delta q_s = 0$$

可是，变分和微分是两个不同的数学概念，它们间的替代并无逻辑的根据，条件 (11) 充其量只能是 (2) 的启发. 对于一般情况，Четаев 条件仍然只是一个假设. 文献 [23] 还进一步指出，Четаев 条件既不是力学分析的结果，也不是约束方程的逻辑诱导，不可取.

文献 [22] 认为 Четаев 理论在经典的非完整力学研究中是适用的. 它具有如下特征：(1) 符合约束力作用的力学原理与规律；(2) 符合不变性准则；(3) 符合协调准则. 但在 Четаев 模型的理论框架中，以下三者不能同时成立：(1) Четаев 条件；(2) d-δ 普遍交换性；(3) 状态变分满足约束方程. 以一阶线性非完整约束为例

$$f = \dot{y} - z\dot{x} = 0 \tag{64}$$

(1) Четаев 条件

$$\delta y - z\delta x = 0 \tag{65}$$

(2) d-δ 普遍交换性

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \delta\dot{x} \tag{66}$$

$$\frac{d}{dt}(\delta y) = \delta\dot{y} \tag{67}$$

$$\frac{d}{dt}(\delta z) = \delta\dot{z} \tag{68}$$

(3) 状态变分满足约束方程

$$\delta f = \delta\dot{y} - z\delta\dot{x} - \dot{x}\delta z = 0 \tag{69}$$

但实际上，(65)~(69) 是矛盾的. 例如，从 (65) 出发，可得

$$\frac{d}{dt}(\delta y) = \frac{d}{dt}(z\delta x) = \dot{z}\delta x + z\frac{d}{dt}(\delta x) \tag{70}$$

从 (69) 得到

$$\delta\dot{y} = z\delta\dot{x} + \dot{x}\delta z \tag{71}$$

利用 (66), 从 (70), (71) 就可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta y) - \delta\dot{y} = \dot{z}\delta x - \dot{x}\delta z \neq 0 \tag{72}$$

这就是说 (67) 不成立.

文献 [24] 研究非线性约束的完整性, 指出: 对于状态空间里一般的非奇异的流形 π, 它在区域 D 内具有完整性的充要条件是: 在 D 区域内, 沿 π 流形上的任一协调可能轨道, 都有约束动力矢量和 T_π^* 恒正交, 即满足

$$\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\right]\delta q_s = 0 \tag{73}$$

文献 [25] 应用 Newton 力学的方法, 得到一类非完整力学的合理解, 客观上建立了非完整力学中的 Newton 力学模型. 在该文献中, 除研究了多种约束方程相同而约束反力不同的系统外, 还实践了一个判定非完整力学模型合理性的准则, 那就是要看它是否与 Newton 力学相吻合. 以垂直滚动圆盘为例, 文献 [25] 给出的动力学方程有以下几组:
自由滚动的动力学方程为

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad I\ddot{\varphi} = M_\varphi, \quad I_0\ddot{\theta} = M_\theta \tag{74}$$

跟随力作用的动力学方程为

$$\ddot{x} = -f\sin\varphi, \quad \ddot{y} = f\cos\varphi, \quad I\ddot{\varphi} = M_\varphi, \quad I_0\ddot{\theta} = M_\theta \tag{75}$$

常力作用的动力学方程为

$$\ddot{x} = f, \quad \ddot{y} = 0, \quad I\ddot{\varphi} = M_\varphi, \quad I_0\ddot{\theta} = M_\theta \tag{76}$$

文献 [26] 在同一种约束方程对应的多种不同约束反力中, 找出其中特别重要的一种, 即非完整约束的约束反力为零的情况. 并且推导出非完整约束的约束反力为零的充要条件

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial f_r}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_l}\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m,s]\dot{q}_k\dot{q}_m + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \right.$$
$$\left. Q_s + \frac{\partial T_0}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\} = 0 \tag{77}$$

在该文献中, 还应用这个判别条件考察了几种典型问题.

胡海昌曾经指出, 在研究变分原理时, 应强调要明确 δq 的选择范围, 简称选值域. 如果在一篇文章中出现两种不同选值域的 δq, 最好分别将它们记为 δq_1 和 δq_2, 这样, 好多误解在写方程时便澄清了. 文献 [27] 论述了非完整约束系统中广义位移变分的选值域问题.

文献 [28] 和文献 [29] 分别应用凑合法和 Lagrange 乘子法建立了一般力学的二类变量的广义变分原理, 为研究非完整力学中的 Четаев 模型和 Vakonomic 模型提供了新的基础. Четаев 模型的二类变量的广义变分原理为

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta\left[T - V + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \nu_s^q}\left(\dot{q}_s - \nu_s^q\right)\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{78}$$

Vakonomic 模型的二类变量的广义变分原理之一为

$$\pi_2 = \int_{t_0}^{t_1}\left[T - V + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \nu_s^q} + \sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \nu_s^q}\right)(\dot{q}_s - \nu_s^q) + \sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta f_\beta\right]\mathrm{d}t \tag{79}$$

7 展望

由于历史较短和问题复杂，围绕非完整系统动力学中的 Vakonomic 模型和 Четаев 模型，仍有许多问题有待人们去研究和探索.

(1) 文献 [23] 指出， Четаев 条件既不是力学分析的结果，也不是约束方程的逻辑诱导，因此，对于一般情况， Четаев 条件仍然只是一个假设. 这一论断启示我们，研究 Четаев 条件，应当从力学分析和约束方程的逻辑诱导两个方面去探索. 而深入研究 Четаев 条件是研究非完整系统动力学中的 Vakonomic 模型和 Четаев 模型的关键.

(2) 对于线性非完整系统， Hölder 和 Pars 曾经应用变分方法研究过 Hertz-Hölder 原则. 两位非完整系统动力学的先驱，通过引入非等时变分的概念，推导出 Hertz-Hölder 原则. 由于非等时变分的复杂性，继承这类研究的学者较少. 需要深入研究非等时变分，进而研究 Четаев 条件和其它有关问题.

(3) 在非完整系统动力学中，出现了一类约束方程对应多种约束反力的情况. 要研究产生多种约束反力的原因，研究如何从多种可能的约束反力中寻求真实的约束反力.

(4) 文献 [25] 建立了非完整系统动力学的 Newton 力学模型，这是非完整系统动力学的一种重要的理论框架. 用近代数学描述非完整系统动力学，已经出现了一些框架，但仍存在许多困难 [30]. 应继续探讨统一 Vakonomic 模型和 Четаев 模型的理论框架. 这类研究能够较好地继承 Vakonomic 学派和 Четаев 学派几十年来的研究成果，可能是一条较好的途径.

(5) 通过实例研究 Vakonomic 模型和 Четаев 模型是一个好方法. 这类研究还能够为非完整系统动力学的工程应用奠定基础.

参 考 文 献

1 Hertz H. Die Prizipien der Mechanik in Neoen Zusammhage Dargestellt. Ges Werke, Bd3, Leipzip, 1894. 18~163

2 Capon R S. Hamilton principle on relation to nonholonomic mechanical systems. *Quart J Mech and Appl Math,* 1952, 5(4): 472~480

3 Hölder O, Nachrichten kön. Ges der Wissenchaften zu Göttingen. *Math Phys,* 1896, (2): 122~157

4 Pars L A. Variation principles in dynamics. *Quart J Mech and Appl Math,* 1954, 7(3), 338~351

5 梅凤翔. 高等分析力学. 北京：北京理工大学出版社， 1991. 1~251

6 Козлов В В. Динамика систем с неинтегруемыми связями. *Вести Моск ун-та матем, механ,* 1982 (4): 70~76

7 Четаев Н Г. О прицинпе Гаусса. Работа выполнена в казани, опубликована в 《Изв.-матем. об-ва при Казон. Гос. ун-те》 в 1932~1933 Г Г, 323~326

8 Румянцев В В. О прицинпе гамильтона для неголономных систем. *ПММ*, 1978, 42(3): 387~399

9 Румянцев В В. Об интегральных принципах для неголономных систем. *ПММ*, 1982, 46(1): 3~12

10 胡海昌. 变分学. 北京：中国建筑工业出版社， 1987. 50~137

11 陈滨. 分析动力学. 北京：北京大学出版社， 1987. 6~398

12 Rosenberg R M. Analytical Dynamics of Discrets Systems. New York: Pleum Press, 1977. 236~245

13 Чаплыгин С А. Исследования по динамике неголономных систем. Моск: Гостехиздат, 1949. 1~20

14 Суслов Г К. Об одном видоизмененные начала. *Доламбра, Мат сб*, 1901, 22(4): 681~695

15 Воронец П В. Об уравненмях движения для неголономных систем. *Мат сб*, 1901, 22(4): 659~680

16 Greenwood D T. Classical Dynamics. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, NJ O7632, 1977. 9~162

17 梁立孚. 非完整系统 Hamilton 原理的驻值特性. 应用数学和力学， 1997, 18(12): 1089~1096

18 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京：北京工业学院出版社， 1985. 1~313

19 Rumyantsev V V. 梅凤翔译. 非完整系统分析动力学中的某些问题. 力学进展， 1987, 17(2): 278~290

20 Rumyantsev V V. 梅凤翔译. 欧拉和力学的变分原理. 力学进展， 1993, 23(1): 86～103
21 郭仲衡，高普云. 关于经典非完整力学. 力学学报， 1990, 22(2): 185～190
22 陈滨. 关于非完整力学的一个争议. 力学学报， 1991, 23(3): 379～384
23 郭仲衡，高普云. 再关于非完整力学. 力学学报， 1992, 24(2): 253～257
24 陈滨. 状态空间非线性约束完整性与非完整性. 中国科学 (A), 1993, 23(8): 839～846. 18(12): 1089～1096
25 郭仲衡. 一类非完整问题的合理解. 中国科学 (A), 1994, 24(5): 485～497
26 梅凤翔. 非完整系统的自由运动与非完整性的消失. 力学学报， 1994, 26(4): 470～477
27 梁立孚. 非完整约束系统广义位移的选值域问题. 固体力学学报， 1993, 14(3): 189～193
28 朱如曾. 非完整力学的第二类、第一类和中间类型的变分原理. 中国科学 (A), 1999, 29(1): 49～54
29 梁立孚. 应用 Lagrange 乘子法推导一般力学中的广义变分原理. 中国科学 (A), 1999, 29(12): 1102～1108
30 梅凤翔. 经典力学从牛顿到伯克霍夫. 力学与实践， 1996, 18(4): 1～8

THE VAKONOMIC MODEL AND CHETAEV'S MODEL IN ANALYTICAL DYNAMICS OF NONHOLONOMIC SYSTEMS

Liang Lifu

Dept. of Airspace Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

Abstract The Chetaev's model and Vakonomic model are described in this paper. It is proved that the model of Hertz, Capon and Lindelöf are identical to Vakonomic model while the model of Hölder, Pars and Chaplygin are identical to Chetaev's model. The fact that Vakonomic model and Chetaev's model exist simultanously can be traced back to the early days of non-holonomic mechanics. These two models cause two problems: the d-δ and $\int$-δ permutable problems. A review of the contribution of scholars in China to unify these two models is presented. Finally, the research prospects in this field are discussed.

Keywords nonholonomic system, Vakonomic model, Chetaev's model