

# 随机有限元方法与结构可靠性

郭书祥

冯元生 吕震宙

空军工程大学工程学院, 西安 710038 西北工业大学飞机工程系, 西安 710072

**摘要** 简要介绍和综合论述了随机结构的有限元分析及可靠性分析方法的研究及发展情况. 包括随机结构的离散化、随机有限元控制方程的求解、随机有限元可靠性方法及随机结构的可靠性分析等. 讨论了随机结构分析中存在的一些问题. 概要论述了可能的发展方向.

**关键词** 有限元方法, 随机结构, 随机有限元方法, 功能函数, 结构可靠性

## 1 引言

有限元方法 (FEM) 作为一种非常有效的数值方法, 广泛应用于各工程领域. 在结构工程中发挥着尤为重要的作用. 尤其是随着自适应 FEM<sup>[1]</sup> 的发展, 从理论上讲, 确定性物理模型的有限元分析可达到任意所要求的精度. 但是, 在实际工程中, 由于各种因素的影响, 各类结构或构件的物理特性、几何参数等和结构所处载荷环境一样, 具有一定程度的不确定性. 结构参数的不确定性将导致结构力学特性的不确定, 往往对结构的临界性能和可靠性有较大影响. 尤其是在随机结构动力分析中, 结构参数的变异可能引起结构动态响应的大幅变化. 这种影响甚至可能超过外激励随机性对动响应的影响. 如何对参数变化的影响作出定量评估也是结构设计中人们极为关心的问题. 因此, 20 多年来, 将常规的确定性 FEM 推广用于随机力学问题的分析及 FEM 和结构可靠性分析的结合受到了人们的广泛关注. 因为数值方法是复杂随机结构分析的唯一可行的求解方法. 随机结构的数值分析始于 70 年代初期<sup>[2]</sup>. 但真正的随机有限元方法 (SFEM) 则建立于 70 年代末到 80 年代初<sup>[3~6]</sup>, 并逐步得到发展和完善, SFEM 可有效地处理结构分析中所涉及的有关参量的随机性. 通过随机结构的离散, 借助常规的确定性 FEM, 利用一些能考虑随机性的合理算法, 可较准确地确定结构的随机力学特性, 进而较准确、合理地估计结构的可靠性. 与确定性 FEM 相比, SFEM 在物理建模上更符合客观实际, 也更合理. 尤其是当有关参数的统计特性可知时, SFEM 可提供较精确的分析结果.

## 2 随机结构的有限元离散

与常规的确定性 FEM 一样, SFEM 中的首要问题是随机结构的离散化. 一般, 随机结构的离散既要考虑结构分析的要求、结构及载荷的特征 (同确定性 FEM), 又要考虑随机场在空间的随机波动. 由于随机场的离散形式对 SFEM 的计算效率和精度有很大影响, 因此, 这是随机有限元数值方法中人们所关注的键问题之一, 已提出多种不同的处理方法. 常用的有: 点离

收稿日期: 1999-02-01, 修回日期: 1999-05-17

散化方法 (包括中点法、结点法、积分点法等)、形函数插值法<sup>[7]</sup>、空间局部平均法<sup>[8,9]</sup>、最优线性估计法 (随机插值法)<sup>[10]</sup> 和级数展开法 (包括基本变量展开法<sup>[11]</sup>、Fourier 型正交级数展开法<sup>[12]</sup>、Karhunen-Lueve 级数展开的谱分解法<sup>[13]</sup> 和齐次混沌展开法等). 近年来, Zeldin 等<sup>[14]</sup> 从中点法、插值法和平均法是基于同样的原理出发, 提出一种可把三种传统方法组合在一起的统一方法: 转换 - 不变离散化方法, 并研究了这些方法的精度估计问题. 所有离散化方法的根本目的都是用一系列随机变量近似描述随机场的连续波动. 用级数展开法对随机场的离散, 实际上是数学的离散, 不用网格化. 在前几种离散化方法中, 需将随机场离散为随机单元网格.

与确定性单元的选取一样, 随机单元网格的选取也需考虑精度、稳定性和计算效率等问题. 从精度方面讲, 随机网格应能描述随机场的波动. 因而, 单元大小应随随机场的相干尺度控制. 且

www.cnki.net



解耦, 可根据不定参数直接得到响应的统计矩. 由于是根据随机刚度联合概率分布函数的信息获得位移的方差函数, 即使随机刚度的变异系数很大, 也可得到准确解, 且适于任何分布, 并已成功地用于静定梁. 此法突破了基于摄动或展开的 SFEM 的局限, 开辟了随机结构有限元分析的一种新途径. 类似方法可望用于板壳等随机结构. 只要能建立起相应的随机变分原理.

随机有限元线性动力控制方程, 原则上可用与静力问题同样的方法求解. 即将原随机参数动力系统用相应有效随机动载作用下的若干个等同的确定系统代替, 利用确定性动力系统的求解方法, 借助随机振动理论求解. 因此, 前述各法也常用于线性随机动力方程和随机特征值问题的求解. 但和静力问题一样, 摄动或展开法计算量大的缺点依然存在, 只适于随机参数的变异系数很小的情况. 和确定性问题一样, 静力 FEM 直接用于解动力问题, 其误差大大增加<sup>[25]</sup>. 近年来, Zhao 等<sup>[26]</sup> 提出用动态形函数阵代替随机位移向量的静态形函数阵, 可在摄动 SFEM 的基础上较好地描述框架结构的随机动位移. Cheng 等<sup>[27]</sup> 则将随机场表达直接代入桁架的有限元列式, 用等效线性化方法和摄动法联合求解随机结构在随机动载下的响应统计量. 和确定性问题的摄动解法一样, 在用基于摄动或展开的 SFEM 求解随机动力系统时, 由于递推方程中出现共振因素, 且低阶解中的瞬态共振项在高阶递推方程中被放大, 导致其解的精度随时间变差, 此即为所谓的长期项问题<sup>[28]</sup>. 由于长期项的存在, 对瞬态响应的方差, 二阶摄动法可能比一阶摄动法效果更差, 很多情况下甚至不收敛. 所以摄动 SFEM 用于解动力响应问题, 一般只适于较短的时间历程. 目前, 还没有一种有效的方法消除由于摄动展开而产生的长期项, 尤其是对非线性随机结构. 李<sup>[29]</sup> 基于泛函空间中的次序正交分解提出的随机结构动力分析的扩阶系统方法, 是直接从随机结构动力方程按次序分解原理得到扩阶系统动力方程, 可不受参量变化范围的限制. 不存在长期项问题, 是一种较好的处理. 但扩阶系统的阶数远大于原系统, 在随机变量较多或其变异系数较大时, 计算量很大. SFEM 用于随机结构动力问题时, 其计算效率、精度和稳定性等都比静力问题更突出、更重要. 因此, 如何基于随机变分原理, 建立真正意义上的动态 SFEM 还有待进一步研究. 对参数随时间随机变化的动态系统, 其分析一般很复杂. 因为动响应和可靠度与这些参数是统计相关的. 在实际工程中, 重要的一类问题是衰变结构系统. 结构参数的变化往往由于诸如腐蚀、疲劳、老化等引起. 如随着损伤的扩展, 损伤区的弹性模量和有效承载面积将逐渐减小. 这种变化对动特性、动响应及可靠性的较长时期的预测有着不可忽视的影响. 因为系统中衰变机制的存在将导致应力的重分布. 由于这类问题中不仅系统的特性具有随机性, 而且需考虑系统的衰变演化过程. 这一衰变历程为非线性过程, 且描述这一过程的有关参数随时间的变化具有较强的随机性. 人们对其统计规律还缺乏足够的认识, 使这一复杂问题的研究难度较大, 是一有待研究的领域.

非线性平衡方程的求解需利用迭代法. 对弹塑性静力问题, 增量刚阵与加载历程有关. 对非线性动力平衡方程则需求解大量的增量方程. 其分析更为复杂. 在 SFEM 和可靠性分析中, 一项重要的工作是计算结构响应对随机参量的梯度. 一般亦可用 Taylor 展开法、摄动法或线性偏导法等计算. 尤其是摄动法中易于考虑非线性, 被广泛采用. Ryu 等<sup>[30]</sup> 曾给出非线性结构响应梯度的一般算式. Liu 等<sup>[31]</sup> 将其和摄动法结合用于非线性静、动力问题的概率分析. Chang 等<sup>[32]</sup> 基于二阶摄动技术, 利用 Newton-Raphson 迭代, 用几何非线性随机薄板有限元研究了随机复合材料层板结构的响应及可靠性问题. Engelsted 等<sup>[33]</sup> 也提出一种层压复合材料壳体结构分析的非线性 SFEM, 将层级材料刚度和微观材料刚度作为随机场, 厚度、方向角等作为随机变量, 分析了随机壳体结构的响应及壳体后曲屈的影响. 非线性 SFEM 已有很多研究, 取得了较大进展. 但要达到实用化、通用化还有很多问题有待研究. 应该指出, 非线性问题的研究具有重要的理论意义和实用价值. 在随机结构分析中存在大量非线性现象, 有些非线性因素是不可忽略的. 而且, 绝大多数结构在破坏前是处于非线性状态.

## 4 随机结构的可靠性分析

### 4.1 基本方法

结构的失效概率可用基本参数向量  $x$  属于失效区域的概率表征. 其一般形式可表为

$$P_f = \int_{\Omega} h(x)f(x)dx$$

其中  $h(x)$  为某光滑函数,  $f(x)$  为随机向量  $x$  的联合概率密度函数.  $\Omega$  为积分区域. 一般  $\Omega = \bigcap_{i=1}^m \Omega_i$ , 且  $\Omega_i = \{g_i(x) \leq 0\}$  为由第  $i$  个功能函数  $g_i(x)$  决定的失效区域. 对一确定的静力失效问题,  $h(x) = 1, m = 1$ . 即使如此, 上式也为一多维积分. 通常难以求解. 一般可用数值仿真法或用简单的表面形状近似失效域的边界, 利用一阶或二阶可靠性方法 (FORM/SORM) 求解.

FORM/SORM 为近似的解析概率算法. 涉及三步主要工作: 首先, 将基本变量  $x$  空间变换为由独立标准正态变量组成的  $u$  空间, 同时, 极限状态曲面 (或失效面)  $g(x) = 0$  变为  $G(u) = 0$ ; 再确定  $u$  空间的设计点; 并将极限状态曲面  $G(u) = 0$  用一过设计点与其相切的超平面或二次超曲面近似, 以求解失效概率. 这一重要思想最早由 Hasofer 和 Lind (H-L) 提出. 他们把失效面上与原点距离最短的点 (即设计点) 作为功能函数的线性化点. 且把可靠性指标定义为标准正态空间中从坐标原点到失效面的最短距离. 适用于正态分布及极限状态曲面曲率较小的情况. 对非正态变量, Rackwitz 和 Fiessler (R-F) 提出一种当量正态转换法. 可把非正态变量变换为等价的正态变量. 同时提出了求设计点的迭代算法. Hasofer, Rackwitz 等人的工作, 较好地解决了求设计点和可靠性指标的问题. 一般被统称为 HL-RF 法. HL-RF 法要求每一随机变量和功能函数必须连续, 对非线性功能函数须光滑、二阶可微. 对非线性程度不高的功能函数通常很有效, 但对复杂的或强非线性的功能函数, R-F 迭代算法的效能不很理想. 其精度受失效面在设计点附近局部形状的影响很大. 且仅适于单约束问题. 不少学者对此提出过一些改进和发展. Abdo 等<sup>[34]</sup> 利用非线性约束优化中的序列二次规划法研究过多约束情况下设计点的求法. Guan 等<sup>[35]</sup> 提出用多点切平面近似实际的非线性极限状态曲面. 贡<sup>[36]</sup> 针对强非线性功能函数 R-F 迭代可能不收敛的问题, 提出了一种新的迭代算法. 张等<sup>[37]</sup> 提出了对失效概率积分进行坐标转换, 把原多维不规则积分转换为简单积分求解的转换积分法, 可不限制功能函数的非线性程度. Wu 等<sup>[38]</sup> 提出的改进均值法, 可极小化对非线性功能函数获取设计点所需迭代次数, 并可估计全概率分布, 且无需转换到标准正态空间. 现代一般认为, Wu 的方法具有较高精度. 对曲率较大的非线性功能函数, 响应面法也是一种较好的方法. 值得一提的是, Liu 等<sup>[39]</sup> 对有限元可靠性分析中几种约束最优化算法的适用性作了比较研究. 结果表明: 序列二次规划法和修正 HL-RF 法较为有效, 尤其对非线性有限元可靠性分析.

### 4.2 随机有限元可靠性 (SFER) 方法

复杂随机结构的分析, 必须借助 SFEM 等数值方法. 其响应及功能函数没有显式表达. 由于在 HL-RF 法的迭代过程中仅需要功能函数在任意迭代点处的值和梯度, 而不需要功能方程的精确解, 可用于非显式功能函数的情况. 因此, 在 SFER 分析中常采用 HL-RF 迭代法. 迭代过程中, 功能函数在任意迭代点处的值可由确定性分析部分求得. 在迭代点处的梯度则由 SFEM 应用微分的链式规则求得. 在 SFER 分析中, 梯度的计算对可靠性分析非常重要. 文 [40] 比较研究了常用的梯度计算方法.

在通常的基于 HL-RF 法的 SFER 分析中, 由于是把 SFE 递推方程的求解放入求可靠性指标的迭代循环中, 因而整个计算量随迭代次数成倍增加, 使实际问题的求解很困难. 如何改进这一求解过程, 使之更加有效、实用是一很重要的问题. 在用 SORM 计算可靠度时, 一般还需计算极限状态曲面在设计点处的二阶导数阵, 并求解相应的特征值问题以确定主曲率. 在 SFER

分析中,基本随机变量数一般很大.而二阶导数的计算需用有限差分法或摄动法等数值方法,需多次重复计算功能函数,每一次都要用 FEM 求解,计算量非常庞大.为解决这一问题,Der Kiureghian A. 等<sup>[41]</sup>提出一种计算 SORM 中极限状态曲面在设计点处主曲率的改进方法,只需利用最后两次迭代点的有关信息,可有效地计算响应的梯度,并可避免计算二阶导数阵及相应特征值问题,适于 SFE 二阶可靠性分析. Abdo 等<sup>[34]</sup>的改进方法,提高了对大曲率问题的迭代效率,适于涉及多极限状态问题的求解. Wu<sup>[37]</sup>针对非显式功能函数可靠性问题所提出的一些方法,可用于需用 FEM 或 SFEM 分析的复杂结构的分析.在线性或非线性 SFER 分析中进行可靠性指标优化求解时,序列二次规划法是一种较为有效的方法<sup>[39]</sup>.

在 SFER 分析中,随机结构经离散化后所得基本随机变量数一般很大,往往会造成计算量过大,因此需要对随机变量进行合理缩减.较常用的是采用敏度分析法,通过敏度分析筛选出对功能函数或可靠性影响较大的主要随机变量,而忽略影响不大的次要变量的随机性.或通过矩阵凝聚<sup>[42]</sup>,仅保留主要自由度,以减小求解规模,提高求解效率. Der Kiureghian A. 等<sup>[6]</sup>提出的敏度向量法可给出可靠性指标对随机变量的敏度向量.吕等<sup>[43]</sup>提出将敏度法与基本变量的变异系数相结合,以相对重要度选择主要变量. Wu<sup>[44]</sup>提出的基于自适应重要抽样的敏度分析法,可有效减小数值仿真的计算工作量.合理、有效的主要变量的选择是 SFEM 用于大型复杂随机结构的响应及可靠性分析的重要问题.合理地简化功能函数也是减小计算工作量的有效途径. Bucher 等<sup>[45]</sup>提出的响应面法及其一系列改进<sup>[46]</sup>,可有效地简化功能函数,且可用于需建立显式功能方程的可靠性分析问题.

### 4.3 结构体系的可靠性

对涉及多极限状态的体系可靠性问题,前述极限状态可靠性分析方法可用于所有的功能函数.但由于结构体系的失效概率与结构的失效模式有关.一个失效模式可能涉及一个或多个极限状态.而且大型复杂静不定结构的破坏模式很多,一般需枚举出所有主要的破坏模式,以建立系统的功能方程,并需考虑各破坏模式间的相关性,其分析较为复杂.结构体系可靠性分析一般包括四步主要工作:结构主要失效模式的枚举、各单模式功能方程的建立、各失效模式的可靠性计算、体系可靠性计算或界限估计.一般,结构体系的可靠性主要由发生概率相对很高的主失效模式决定,所以主失效模式的枚举是结构体系可靠性分析中的关键问题之一.较常用的方法有: $\beta$ -展开( $\beta$ -unzipping)法、分枝限界法、工程准则及优化准则法等.前两种方法是通过失效事件树分析,利用失效模式的网络选定主失效模式.其中,分枝限界法包括分枝和限界两步主要工作.通过分枝,找出全部失效模式的失效路径.再通过限界处理舍弃其中对体系可靠度贡献很小的次要失效模式,仅保留主要失效模式所对应的失效路径.此法遗漏主失效模式的可能性小,对冗余度较低的结构系统非常有效.但对高冗余结构,计算量很大.因此,分枝限界过程中失效模式的自动生成及自适应控制方法的研究对提高此法的效率和精度都很重要.准则法是用增量载荷荷法确定结构体系的强度,用元件的承力比或承力比的变化率确定主失效模式.最早由 Moses 提出.后经 Feng<sup>[47]</sup>、冯<sup>[48]</sup>、吕等<sup>[49,50]</sup>的一系列改进,使此法逐渐完善,并可用于大型结构体系的可靠性分析.目前的体系可靠性分析方法,基本上是把结构看作确定性的(除强度外),借助确定性 FEM 枚举结构的主失效模式.正如结构的失效概率对强度的变异系数很敏感<sup>[49]</sup>一样,它对结构参数的变异也可能很敏感.参数的变化对失效模式和体系可靠性必有一定影响.随机结构失效模式的枚举是随机结构体系可靠性分析的主要障碍.从算法本身的可靠性方面讲,体系可靠性分析中应枚举出全部主失效模式而不能漏掉,并使所涉及的总失效模式数尽量减少.这取决于枚举失效模式方法本身的合理性.由于还没有一种有效的误差估计方法,主失效模式的枚举及可靠性计算方法本身的可靠性不容忽视.另外,结构的破坏往往要经历一个强度衰变的渐进累积过程.其可靠性分析需考虑系统的衰变演化过程<sup>[51,52]</sup>.因此,

强度衰变结构体系的可靠性分析是复杂但很重要的研究方向。

#### 4.4 数值仿真法

在结构可靠性分析中,以 Monte-Carlo (MC) 法为基础的各类数值仿真法一直起着非常重要的作用。直接 MC 法是按照基本随机变量的概率密度函数抽取样本,并代入功能函数进行统计试验而求解。其适用性强,应用简单。对简单而失效概率并非很小的可靠性分析问题很有效。但对失效概率很小的复杂结构体系则不实用。重要抽样法<sup>[44,53~55]</sup>、方向模拟法<sup>[56]</sup>、分层抽样法<sup>[57]</sup>及描述性抽样法<sup>[58,59]</sup>等是在此基础上发展起来的一些更为有效的仿真方法。重要抽样法中,随机变量是按照不同的概率密度函数(称为抽样密度)抽取样本,其目的是在感兴趣的区域(如失效域)中产生更多的样本,以减小所需抽样的样本容量,提高抽样效率。常用的有直接重要抽样法和自适应重要抽样法等。重要抽样技术的主要任务之一是选择重要抽样密度。直接重要抽样法中,抽样密度通过 FORM/SORM 分析直接构造。自适应重要抽样法则是通过修正样本密度或抽样区域以渐进改进估计概率。涉及两个主要问题:初始样本密度和/或初始抽样区域的选择及失效概率估计值的自适应修正。这方面的重要工作可见文<sup>[44, 54, 55]</sup>等。方向模拟法是在特定方向上构造抽样密度,以减小抽样方差。分层抽样法的思想和重要抽样法一致,是系统抽样和重要抽样的组合。其中,将失效区域划分为若干互不相交的子区域,通过在概率密度函数值较大的区域中抽取较多子样达到提高抽样效率和减小方差的目的。描述性抽样法是先产生一个能够描述要求分布的样本集合,然后变化其取值顺序,以在较少的抽样时间内获取更多的服从所要求分布的随机变量的样本。数值仿真是结构可靠性分析的一种非常重要的方法,研究成果很多。随机结构的可靠性分析中, SFEM 和数值仿真技术的结合是一个可能的重要的发展方向。

#### 5 结束语

SFEM 是在广泛应用的确定性 FEM 基础上发展起来的进行随机结构分析的有效方法,在工程中发挥着非常重要的作用,有着极大的应用价值和发展前途。但 SFEM 及随机结构的可靠性方法还不完善。与确定性 FEM 相比, SFEM 计算量很大,尤其是 SFER 分析。其分析效率和自动化程度的提高,及其与一些先进算法(如并行算法、自适应方法等)的结合是很重要的问题。随机结构的动力 SFEM 及动态可靠性分析还有待进一步改进和完善。另外,由于结构的可靠度对随机参数分布的尾部很敏感,随机参数的小变化可能导致其分析结果的较大误差<sup>[60]</sup>。因此,结构的合理随机参数建模及其分析结果的可靠性评估也是非常重要的问题。结构的随机参数建模对参数的统计数据要求较多。在实际中,往往难以得到足够的描述所有参数的分布特性,但参数的变化范围则往往易于确定。而且,非概率模型用于有限元及可靠性分析的计算量要小得多<sup>[61,62]</sup>。因此, SFEM 和模糊 FEM 及近年来兴起的不确定结构分析的反优化模型的结合将是非常重要和有意义的发展方向。

致谢 第一作者感谢重庆大学殷学纲教授曾给予的引导和指教。

#### 参 考 文 献

- 1 郭书祥. 自适应有限元方法及其工程应用. 力学进展, 1997, 27(4): 479~488
- 2 Astill J, Nosseir C J, Shinozuka M. Impact loading on structures with random properties. *Journal of Structural Mechanics*, 1972
- 3 Contreras H. The stochastic finite-element method. *Computers & Structures*, 1980, 26(12): 341~348
- 4 Varmarcke E H, Grigoriu M. Stochastic finite element analysis of simple beams. *Journal of Engineering Mechanics*, 1983, 109(5): 1203~1214
- 5 中桐滋, 九田俊明. 確率有限要素法入門. 东京: 培風館, 1986
- 6 Der Kiureghian A, Ke J B. The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering*

- Mechanics*, 1988, 3(2): 83~91
- 7 Liu W K, Belytschko T, Mani A. Random field finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, 23: 1831~1845
  - 8 朱位秋, 任永坚. 随机场的局部平均与随机有限元法. *航空学报*, 1986, 7(6): 604~611
  - 9 Zhu W Q, Ren Y J, Wu W Q. Stochastic FEM based on local averages of random vector fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 1992, 118(3): 496~511
  - 10 Li C C, Der Kiureghian A. Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 1993, 119(6): 1136~1154
  - 11 Lawrence M. Basis random variables in finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24: 1849~1854
  - 12 Zhang J, Ellingwood B. Effects of uncertain material properties on structural stability. *Journal of Structural Engineering*, 1995, 121(4): 705~716
  - 13 Ghenam R G, Spanos P D. Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 1991, 117(10): 2351~2372
  - 14 Zeldin B A, Spanos P D. On random field discretization in stochastic finite elements. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, 65(2): 320~327
  - 15 Liu P L, Liu K G. Selection of random field mesh in finite element reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 1993, 119(4): 667~680
  - 16 Liu P L. Size effects of random field elements on finite-element reliability methods. In: Der Kiureghian A, et al, eds. *Reliability and Optimization of Structural System'90*. Springer-Verlag, 1990. 223~238
  - 17 刘宁, 吕泰仁. 随机有限元及其工程应用. *力学进展*, 1995, 25(1): 114~126
  - 18 Beneroya H, Rehak M. Finite element methods in probabilistic structural analysis: a selective review. *Applied Mechanics Review*, 1988, 41(5): 201~212
  - 19 Shinozuka M, Yamazaki F. Stochastic finite element analysis: an introduction. In: *Stochastic Structural Dynamics Progress in Theory and Application*. 1988
  - 20 Nagpal V K, Rubinstein R. Probabilistic structural analysis to quantify uncertainties associated with turbopump blades. *AIAA Journal*, 1989, 27(6): 809~813
  - 21 Ren Y J, Elishakoff I, Shinozuka M. Finite element method for stochastic beams based on variational principles. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64(3): 664~669
  - 22 Elishakoff I, Ren Y J, Shinozuka M. New formulation of FEM for deterministic and stochastic beams through generalization of Fuchs' approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, 114(3/4): 235~243
  - 23 Elishakoff I, Ren Y J, Shinozuka M. Some exact solutions for bending of beams with spatially stochastic stiffness. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, 32: 2315~2327
  - 24 Elishakoff I. Three versions of the finite element method based on concepts of either stochasticity, fuzziness, or anti-optimization. *Applied Mechanics Review*, 1998, 51(3): 209~218
  - 25 张汝清, 殷学纲, 董明. *计算结构动力学*. 重庆: 重庆大学出版社, 1987
  - 26 Zhao Lei, Chen Qiu. A dynamic stochastic finite element method based on dynamic constraint mode. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 16(3/4): 245~255
  - 27 Cherng R H, Wen Y K. Reliability of uncertain nonlinear trusses under random excitation I. *Journal of Engineering Mechanics*, 1994, 120(4): 733~747
  - 28 朱位秋. *随机振动*. 北京: 科学出版社, 1992
  - 29 李杰. 随机结构动力分析的扩阶系统方法. *工程力学*, 1996, 13(1): 93~102
  - 30 Ryu Y S, Haririan M, Wu C C. Structural design sensitivity analysis of nonlinear response. *Computers & Structures*, 1985, 21(1): 245~255
  - 31 Liu W K, Belytschko T, Mani A. Probabilistic finite elements for non-linear structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, 56: 61~81
  - 32 Chang C, Yang H T Y. Reliability of uncertain flexible laminated skewed plated under random compressions. *AIAA Journal*, 1992, 30(2): 464~472
  - 33 Engalsted S P, Reddy J N. Probability nonlinear finite element analysis of composite structures. *AIAA Journal*, 1993, 31(2): 362~369
  - 34 Abdo T, Rackwitz R. A new beta-point algorithm for large time-invariant and time-variant reliability problems. In: Der Kiureghian A, et al, eds. *Reliability and Optimization of Structural System'90*. Springer-Verlag, 1990. 1~11
  - 35 Guan X L, Melchers R E. Multitangent-plane surface method for reliability calculation. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 123(10): 996~1002
  - 36 贡金鑫. 结构可靠性指标求解的一种新的迭代方法. *计算结构力学及其应用*, 1995, 12(3): 369~373
  - 37 张立, 冯元生. 求解结构可靠性的转换积分法. *机械强度*, 1996, 18(3): 27~30
  - 38 Wu Y T, Millwater H R, Cruse T A. Advanced probabilistic structural analysis methods for implicit performance functions. *AIAA Journal*, 1990, 28(9): 1663~1669
  - 39 Liu P L, Der Kiureghian A. Optimization algorithms for structural reliability. *Structural Safety*, 1991, 9(3): 161~177
  - 40 Guan X L, Melchers R E. An efficient formulation for limit state function gradient calculation. *Computers & Structures*, 1994, 53(4): 929~935
  - 41 Der Kiureghian A, Stefano M D. An efficient algorithm for second-order finite element reliability analysis. In: *Mechanics Computing in 1990's & Beyond*. 1999, 1. 248~252

- 42 Mahadevan S, Mehta S. Dynamic reliability of large frames. *Computers & Structures*, 1993, 47(1): 57~67
- 43 吕震宙, 冯元生. 结构刚度可靠性分析方法. *机械强度*, 1994, 10(3): 1~5
- 44 Wu Y T. Computational methods for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis. *AIAA Journal*, 1994, 32(8): 1717~1723
- 45 Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural Safety*, 1990, 7(1): 57~66
- 46 Kajashekhar M R, Ellingwood B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Structural Safety*, 1993, 12(3): 205~220
- 47 Feng Y S. Enumerating significant fail mode of structural system by using criterion methods. *Computers & Structures*, 1988, 30(5): 1153~1157
- 48 冯元生, 冯蕴雯. 可靠性设计与可靠性试验评估理论. 西安: 西北工业大学, 1996
- 49 吕震宙, 岳珠峰, 冯元生. 元件与模式相对重要度对静强度可靠度的影响分析. *上海力学*, 1996, 17(4): 320~328
- 50 刘长虹, 来新泉, 吕震宙. 枚举结构静强度广义可靠性主要失效模式的准则法. *机械强度*, 1998, 20(2): 153~157
- 51 Guo Shuxiang. Dynamic stochastic finite element method for the damage structural analysis and dynamic reliability. In: *Engineering Computation and Computer Simulation: Theories & Applications (II)*. Changshai: Hunan University Press, 1995. 35~41
- 52 郭书祥. 疲劳裂纹扩展的随机模型和动态可靠性. *机械强度*, 1998, 20(2): 120~125
- 53 贡金鑫, 赵国藩. 结构可靠性分析中的最小方差抽样. *上海力学*, 1996, 17(3): 245~252
- 54 Ibrahim Y. An adaptive importance sampling strategy. In: *Mechanics Computing in 1990's & Beyond*, 1991. 253~256
- 55 Mori Y, Ellingwood B R. Time-dependent system reliability analysis by adaptive importance sampling. *Structural Safety*, 1993, 12(1): 59~73
- 56 Bjerager P. Probability integration by direction simulation. *Journal of Engineering Mechanics*, 1988, 114(8): 1285~1302
- 57 李强, 冯元生. 解结构可靠性问题的改进分层抽样法. *航空学报*, 1995, 16(5): 513~520
- 58 吕震宙, 岳珠峰. 结构可靠度计算中的描述性抽样法. *力学与实践*, 1998, 20(5): 52~54
- 59 Ziha K. Descriptive sampling in structural safety. *Structural Safety*, 1995, 17(1): 33~41
- 60 Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from A M Freudenthal's criticisms to modern convex modeling. *Computers & Structures*, 1995, 56(6): 871~895
- 61 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 区间运算和区间有限元. *应用数学和力学*, (待发表)
- 62 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型. *计算力学学报*, (待发表)

## STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD AND STRUCTURAL RELIABILITY

Guo Shuxiang

Faculty of Mechanics, Air Force University of Engineering, Xi'an 710038, China

Feng Yuansheng      Lü Zhenzhou

Aircraft Department, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China

**Abstract** The paper presents a brief introduction and review for the finite element analysis and reliability analysis of stochastic structures, which includes the discretization of stochastic structures, the solution of stochastic finite element control equations, stochastic finite element reliability methods and the other methods of reliability analysis of stochastic structures. Some unsolved problems are discussed.

**Keywords** finite element method, stochastic structures, stochastic finite element method, performance function, structural reliability