第 30 卷 第 3 期 力 学 进 展 Vol.30 No.3
2000 年 8 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Aug 25, 2000

结构动力分析自适应有限元方法综述 *

龚国庆 刘寒冰 魏 媛
吉林工业大学工程力学系，长春 130025

摘 要 结构动力分析自适应有限元方法主要研究有限元动力分析的误差估计理论，建立适用于复杂结构动力分析的有限元网格自适应过程．介绍了结构动力问题自适应有限元方法的重要发展，包括固有振动和动响应分析的误差估计及相应的自适应策略；且简要介绍了几种现有的网格生成技术及其特点．最后指出这种方法存在的问题和今后的研究方向．

关键词 结构动力分析，误差估计，自适应有限元方法

1 引 言

60 年代以来，随着计算机技术的迅速发展，有限元技术得以发展，使得求解大型复杂结构的力学问题成为可能．有限元方法 (FEM) 作为一种近似计算方法，不可避免地会产生离散误差，有时此类误差会非常大，以致结果失去了实际意义．因此，研究有限元方法的误差估计和自适应过程是很有必要的．

目前，有关静力问题有限元方法的误差估计和自适应过程的研究已经取得了一定进展．在误差估计方面， Babuska 和 Rheinboldt[1,2] 等提出了残差型误差估计法，并给出了一个效率指标以评估某种误差估计法的可靠性． Demkowicz 和 Oden[3] 等提出的插值型误差估计法特别适合于误差指示，应用起来也较方便． Zienkiewicz 和 Zhu[4~7] 等提出的 Zienkiewicz-Zhu 后验误差估计法，利用最小二乘应力平滑技术进行误差估计，对于平面线弹性问题以及板弯曲问题是十分有效的．在自适应方面， Wiberg 和 Moller[8] 提出了一个应用于椭圆和双曲问题的升阶谱有限元方程，并利用此方程研究了静态和特征值线弹性问题以及对流扩散问题． Zienkiewicz 和 Zhu[9,10] 等研究了 h-, p- 以及 h-p 自适应过程，以提高有限元方法的计算精度及收敛率． Gallimard 和 Pelle[11] 等研究了弹塑性系统误差估计和自适应过程． Manolis 和 George[12] 还研究了自适应有限元方程中 p 法的求解技术．但上述研究大多集中在静力问题上．由于动力问题涉及到时间步长的自适应过程，因此，动力问题要比静力问题复杂得多．而且，就目前出现的文献上看，主要是讨论特征值和特征向量问题，有关动力响应问题的文献则更少．

80 年代中期， Friberg[13] 利用升阶谱有限元方法对广义特征值问题进行了误差估计． 90 年代初， Cook 和 Avrashi[14] 提出用平滑单元应力场和修改质量矩阵的方法对结构的固有频率进行误差估计，并用 r 方法 (节点位移法) 和 h 方法 (网格重分法) 进行自适应网格再生成过程．随后， Steven 和 Stephen[15] 运用块恢复技术进行有限元分析以改进特征值的解． 90 年代初，

收稿日期：1998-09-14，修回日期：1999-01-28
* 国家自然科学基金 (19872029) 资助项目

Wiberg[16,17] 等还分析了动力响应解的自适应过程，包括空间网格的自适应和时间步长的自适应．此外，80 年代中期，Babuska 和 Osborn[18] 从理论上给出并证明了用有限元方法 (通常指 Galerkin 法) 求得的特征值和特征向量近似解的误差范围．Belytschko 和 Tabbara[19] 用 h 自适应有限元方法分析了结构动力学问题．Kuan-Jung 和 Edward L. Wilson[20] 利用特殊的里兹向量，提出了一种自适应有限元离散技术用以解决结构动力学问题．Zhao 和 Steven[21] 给出了一种质量转移问题的有限元 / 无限元方法误差估计的分析解．一些学者 [22~25] 还研究了有关固有频率的估计和优化的其它一些方法．

2 特征值的离散误差估计

一般地，在进行有限元动力分析时，首先是生成结构的粗网格，然后用有限元方法建立系统运动微分方程

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{F_{(s,t)}\} \tag{1}$$

这里，$[M]$ 是系统质量阵，$[C]$ 是粘性阻尼阵，$[K]$ 是总体刚度阵，$\{F_{(s,t)}\}$ 是外力矢量，$\{D\}$ 是节点位移矢量，$\{\dot{D}\}$ 和 $\{\ddot{D}\}$ 分别表示节点速度和加速度．

对于无阻尼的自由振动，特征值问题为

$$\left([K_0] - \omega_0^2[M_0]\right)\{D_0\} = \{0\} \tag{2}$$

式中，ω_0 表示固有频率，$\{D_0\}$ 是节点位移矢量，$[K_0]$ 和 $[M_0]$ 分别表示初始网格下的刚度阵和质量阵．有许多成熟的方法可以求出初始网格下的特征值 ω_0 和特征向量 $\{D_0\}$．

但是，用上述有限元方法求出的 ω_0 和 $\{D_0\}$，必然会产生离散误差．对于特征值和特征向量问题会产生空间离散误差；对于动力响应解问题则会同时产生空间离散误差和时间离散误差．因此，有必要对求得的结果进行误差估计，并通过误差估计值来判定网格划分的粗细程度和好坏，然后改进网格的划分，完成自适应过程．

由于对于较复杂的结构，往往找不到精确解，因此也就无法对初始结果进行误差估计．就目前各文献中采取的办法来看，都是对结果进行一定的后处理，然后以处理后的结果作为“精确解”来进行误差估计过程．

2.1 平滑单元应力场和修改质量矩阵法

以上通过常用的方法求出粗网格下的固有频率 ω_{0i} 和相应的第 i 阶模态 $\{D_{0i}\}$．通过修改质量阵，如改变结构的网格或改变单元插值函数的阶次，则原始单元 j 的动能和修改质量阵后单元的动能分别为

$$(V_{0i})_j = \frac{\omega_{0i}^2}{2}\{d_{0i}\}_j^{\mathrm{T}}[m_0]_j\{d_{0i}\}_j \tag{3}$$

$$(V_{Ri})_j = \frac{\omega_{0i}^2}{2}\{d_{0i}\}_j^{\mathrm{T}}[m_R]_j\{d_{0i}\}_j \tag{4}$$

注意，$(V_{Ri})_j$ 是一个近似值，因为它用的是 ω_{0i} 和 $\{d_{0i}\}_j$，而不是修改质量阵后较为精确的解 ω_{Ri} 和 $\{d_{Ri}\}_j$，这样可以减少因求解修改质量阵后特征值问题的计算费用，只要初始离散不是特别地稀疏，方程 (4) 的近似解对于误差估计而言是足够精确的 [14]．而单元 j 的 $\{d_{0i}\}_j$ 可以从总体 $\{D_{0i}\}$ 中得到．那么，单元 j 的动能变化量为

$$\Delta(V_i)_j = (V_{Ri})_j - (V_{0i})_j \tag{5}$$

结构的总动能等于单元动能之和

$$^{s}V_{0i} = \sum(V_{0i})_j, \quad ^{s}V_{Ri} = \sum(V_{Ri})_j \tag{6}$$

下面通过平滑单元应力场以得到改进后的系统总势能 ${}^sU_{Ri}$. 在原始模态下，单元的势能由下式计算

$$(U_{0i})_j = \frac{1}{2}\int \{\sigma_{0i}\}_j^{\mathrm{T}}[E]_j^{-1}\{\sigma_{0i}\}_j \mathrm{d}V \tag{7}$$

单元应力按通常的计算方法得到，即： $\{\sigma_{0i}\}_j = [E]_j[B]_j\{d_{0i}\}_j$. 这里 $[E]_j$ 是材料性质矩阵， $[B]_j$ 是应变 - 位移关系矩阵. 单元势能求和就可得到结构总的势能 ${}^sU_{0i}$. 利用节点平均应力和原始单元中心应力，对每个单元应力 $\{\sigma_{0i}\}_j$ 进行二次插值 [26], 就可以得到平滑处理后的应力场 $\{\sigma_{Ri}\}_j$, 原始网格下的应力分布是阶跃式的，进行平滑处理后的应力分布是光滑的曲线. 由此得到处理后的单元势能

$$(U_{Ri})_j = \frac{1}{2}\int \{\sigma_{Ri}\}_j^{\mathrm{T}}[E]_j^{-1}\{\sigma_{Ri}\}_j \mathrm{d}V \tag{8}$$

结构的总势能

$${}^sU_{Ri} = \sum (U_{Ri})_j \tag{9}$$

单元 j 的势能变化量为

$$\Delta(U_i)_j = (U_{Rri})_j - (U_{0i})_j \tag{10}$$

这时，我们可以利用瑞利商来求解经处理后的固有频率

$$\omega_{Ri}^2 = \frac{{}^sU_{Ri}}{{}^sV_{Ri}/\omega_{0i}^2} \tag{11}$$

(1) 平滑单元应力场时的误差估计式

若仅平滑单元应力场，而结构的质量矩阵保持不变，即 $[m_R] = [m_0]$, 则 ω_{0i} 的相对误差估计式为 [14]

$$e_i = \frac{\omega_{0i} - \omega_{Ri}}{\omega_{Ri}} \tag{12}$$

(2) 修改质量矩阵时的误差估计式

若不进行单元应力平滑处理，仅改变结构的质量矩阵，即 $[m_R] \neq [m_0]$, 此时 ω_{0i} 的相对误差估计式可表示为 [14]

$$e_i = \frac{\omega_{0i} - \omega_{Ri}}{\omega_{0i} + \omega_{Ri}} \tag{13}$$

此方法利用了原始解的模态信息 (特征值 ω_{0i} 和特征向量 $\{\mathrm{d}_{0i}\}$ 以及应力 $\{\sigma_{0i}\}$), 而不是通过增加系统的自由度数来求解更高精度的固有频率，因而减少了计算量.

2.2 升阶谱有限元法

升阶谱有限元概念是 Zienkiewicz[27] 等提出的，实际上是 p 法中的一种. 所谓 p 法就是保持有限元的网格划分固定不变，而是增加各单元上插值函数的阶次，以提高求解精度. 这里所谓的升阶谱有限元就是以逐次升幂的多项式函数作为插值函数，并使低阶升阶谱元的自由度是高阶升阶谱元自由度的一个子集，因而，其刚度和质量矩阵以及载荷矢量乃是同一问题更高阶升阶谱元相应矩阵的子矩阵，以及相应矢量的子矢量. 这样，在升阶过程中，只需在原有矩阵方程的基础上扩充新的行和列，即可得到新的矩阵方程. 此外，还可充分利用原有的计算结果作为出发点，经过迭代，求取扩大后矩阵方程的新结果. 从计算角度看，这显然是一个十分有用的特性，不仅可使在 p 收敛过程中的总计算工作量大为节省，又可为编制自适应分析程序提供极为有利的条件 [28].

下面通过升阶谱有限元法导出一个固有频率的误差估计式. 由瑞利商

$$\lambda_i = \frac{k_i}{m_i} \tag{14}$$

这里 λ_i 是第 i 阶特征值，k_i 和 m_i 分别为模态刚度和模态质量.

假设已经求出自由度数为 n 时的特征对 $(\lambda_i^{(n)}, \phi_i^{(n)})$, 这样

$$\lambda_i^{(n)} = \frac{k_i^{(n)}}{m_i^{(n)}} = \frac{\phi_i^{(n)\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{(n)} \phi_i^{(n)}}{\phi_i^{(n)\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_{(n)} \phi_i^{(n)}} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{15a}$$

相应地，进行升阶谱加密后 (增加 m 阶自由度), 有

$$\lambda_j^{(n+m)} = \frac{k_j^{(n+m)}}{m_j^{(n+m)}} = \frac{\varphi_j^{(n+m)\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{(n+m)} \varphi_j^{(n+m)}}{\varphi_j^{(n+m)\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_{(n+m)} \varphi_j^{(n+m)}} \qquad j = 1, 2, \cdots, n+m \tag{15b}$$

式中

$$\boldsymbol{K}_{(n+m)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{(n)} & \boldsymbol{K}_{(n,m)} \\ \boldsymbol{K}_{(m,n)} & \boldsymbol{K}_{(m)} \end{bmatrix} \tag{16a}$$

$$\boldsymbol{M}_{(n+m)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{(n)} & \boldsymbol{M}_{(n,m)} \\ \boldsymbol{M}_{(m,n)} & \boldsymbol{M}_{(n)} \end{bmatrix} \tag{16b}$$

这里特征模态 $\varphi_j^{(n+m)}$(是未知的) 才是真正的由升阶谱加密后得到的第 j 阶特征模态. 向量 $\varphi_j^{(n+m)}$ 可根据式 (16a,b) 写成分块形式

$$\varphi_j^{(n+m)} = \begin{bmatrix} \varphi_j^{(n)} \\ \varphi_j^{(m)} \end{bmatrix} \tag{16c}$$

这时通过升阶谱加密后，特征值的相对误差为

$$e_i = \frac{\lambda_i^{(n)} - \lambda_i^{(n+m)}}{\lambda_i^{(n)}} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{17}$$

如果把特征值 λ_i 看成是两个独立变量 k_i 和 m_i 的函数，由式 (14) 的泰勒级数展开式及 (17) 式可导出特征值的相对误差近似为 [13]

$$e_i \approx \frac{\Delta k_i - \lambda_i^{(n)} \Delta m_i}{k_i^{(n)}} \tag{18}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} \Delta k_i &\approx -2\varphi_i^{(m)\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{(m,n)} \phi_i^{(n)} - \varphi_i^{(m)\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{(m)} \varphi_i^{(m)} \\ \Delta m_i &\approx -2\varphi_i^{(m)\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_{(m,n)} \phi_i^{(n)} - \varphi_i^{(m)\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_{(m)} \varphi_i^{(m)} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

矢量 $\varphi_i^{(m)}$ 可由下式导出

$$\left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{(n)} & \boldsymbol{K}_{(n,m)} \\ \boldsymbol{K}_{(m,n)} & \boldsymbol{K}_{(m)} \end{bmatrix} - \lambda_i^{(n+m)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{(n)} & \boldsymbol{M}_{(n,m)} \\ \boldsymbol{M}_{(m,n)} & \boldsymbol{M}_{(m)} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \varphi_i^{(n)} \\ \varphi_i^{(m)} \end{bmatrix} = 0 \tag{20}$$

假设 $\lambda_i^{(n+m)} \approx \lambda_i^{(n)}$, 可得

$$\varphi_i^{(m)} \approx \left[\boldsymbol{K}_{(m)} - \lambda_i^{(n)} \boldsymbol{M}_{(m)}\right]^{-1} \left(-\left[\boldsymbol{K}_{(m,n)} - \lambda_i^{(n)} \boldsymbol{M}_{(m,n)}\right] \phi_i^{(n)} \right) \tag{21}$$

若 $\left[\boldsymbol{K}_{(m)} - \lambda_i^{(n)} \boldsymbol{M}_{(m)}\right]$ 是非奇异矩阵，将 (21) 式代入 (18) 式后，就可估计广义特征值的相对误差.

升阶谱方法虽然增加了系统的自由度数，但由于新的刚度阵和质量阵是在原有矩阵上扩展得到的，因而在重建刚度阵和质量阵过程中，并没有增加太多的计算量. 同时，在求解特征值和特征向量时，还可以直接利用原有刚度阵和质量阵以及特征模态，使得计算量大为降低.

2.3 块恢复技术

块恢复技术的思想是这样的：先由通常的有限元方法求出初始网格下的固有频率 λ_{0i} 和特征向量 $\{d_{0i}\}$. 然后分别以初始网格下的每一个单元作为中心单元，以中心单元周围的单元作为补块单元，中心单元和补块单元合称为块单元 (patch element). 求出当前块单元内中心单元里新增节点的位移 $\{d_c\}$. 重复以上步骤，求出每一个中心单元里新增节点的位移，然后以初始的特征向量 $\{d_0\}$ 和新增节点向量 $\{d_c\}$ 组成新的向量，用此新向量，利用瑞利商，就可求得改进后的固有频率.

具体过程如下：定义块单元的特征向量为

$$\{d_p\} = \begin{Bmatrix} \{d_0\} \\ \{d_c\} \\ \{d_s\} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

这里 $\{d_0\}$ 是已知的块单元节点位移量，$\{d_c\}$ 是中心单元中需要求的新增节点位移量，$\{d_s\}$ 是中心单元周围单元里新增节点的位移量. $\{d_c\}$ 和 $\{d_s\}$ 都是未知的. 块单元所形成的特征方程为

$$([K_p] - \lambda[M_p])\{d_p\} = \{0\} \tag{23}$$

矩阵 $[K_p]$ 和 $[M_p]$ 是细分过的网格中块单元的刚度阵和质量阵. 方程 (22) 以分块的形式写为

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{0,0} & \boldsymbol{K}_{0,c} & \boldsymbol{K}_{0,s} \\ \boldsymbol{K}_{c,0} & \boldsymbol{K}_{c,c} & \boldsymbol{K}_{c,s} \\ \boldsymbol{K}_{s,0} & \boldsymbol{K}_{s,c} & \boldsymbol{K}_{s,s} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{0,0} & \boldsymbol{M}_{0,c} & \boldsymbol{M}_{0,s} \\ \boldsymbol{M}_{c,0} & \boldsymbol{M}_{c,c} & \boldsymbol{M}_{c,s} \\ \boldsymbol{M}_{s,0} & \boldsymbol{M}_{s,c} & \boldsymbol{M}_{s,s} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_0 \\ \boldsymbol{d}_c \\ \boldsymbol{d}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

令

$$[Q_{A,B}] = [K_{A,B}] - \lambda[M_{A,B}] \tag{25}$$

由 (24) 式可得到中心单元所需的节点位移量

$$\{d_c\} = \left([Q_{c,c}] - [Q_{c,s}][Q_{s,s}]^{-1}[Q_{s,c}]\right)^{-1}\left([Q_{c,s}][Q_{s,s}]^{-1}[Q_{s,0}] - [Q_{c,0}]\right) - \{d_0\} \tag{26}$$

由瑞利商

$$\lambda_p = \frac{\{d\}^{\mathrm{T}}[K]\{d\}}{\{d\}^{\mathrm{T}}[M]\{d\}} \tag{27}$$

得改进后的固有频率 λ_p. 式中 $\{d\} = \{\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_c\}^{\mathrm{T}}$. $[K]$ 和 $[M]$ 分别是总体刚度阵和总体质量阵.

最后得到相对误差估计式

$$e = \frac{\lambda_0 - \lambda_p}{\lambda_p} \tag{28}$$

由于块恢复技术在求解新增节点特征模态时，是在块单元上建立的特征方程中求得的，因而自由度数相对整个系统的自由度数而言要少得多，使得计算量大为降低.

3 动力响应解的误差估计

自适应有限元过程最终的目的就是找到一种经济而有效的离散方法，以使离散误差在总体上小于给定的允许值，在局部上是均匀分布的. 即找到一个所谓的优化离散. 自适应有限元过程的关键问题是：有一个可靠的离散误差估计办法和能够有效地构造离散过程.

一般地，我们首先用有限元方法在空间上进行离散，离散后就会产生一组关于时间的二阶常微分方程组，也就是结构动力方程. 然后通过数值时间积分法对结构动力方程进行求解. 很明显，在处理过程中存在两种离散误差：(a) 由有限元近似引起的空间离散误差；(b) 由数值

时间积分法引起的时间离散误差. 这里我们需要研究一下空间离散和时间离散上的后验误差估计. 假设

$$\boldsymbol{u}(x,t) \approx \underline{\boldsymbol{u}}^h(x,t) = \boldsymbol{N}_{(x)}\boldsymbol{d}(t) \tag{29}$$

这里 $\boldsymbol{N}_{(x)}$ 是形函数矩阵, $\boldsymbol{d}(t)$ 是节点位移矢量, $\underline{\boldsymbol{u}}^h(x,t)$ 表示仅包括空间离散误差时 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 的近似值.

用有限元方法得到如下结构动力方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{d}}(t) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{d}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{F}(t) \tag{30}$$

$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}$ 分别为结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵.

这里我们用 HHT-α 时间积分法 [29](Hiber, Hughes, Taylor) 求解动力响应.

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{d}}_{n+1} + (1+\alpha)\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{d}}_{n+1} - \alpha\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{d}}_n + (1+\alpha)\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}_{n+1} - \alpha\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}_n = \boldsymbol{F}(t_{n+\alpha}) \tag{31}$$

$$\dot{\boldsymbol{d}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{d}}_n + [(1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{d}}_n + \gamma\ddot{\boldsymbol{d}}_{n+1}]\Delta t \tag{32}$$

$$\boldsymbol{d}_{n+1} = \boldsymbol{d}_n + \dot{\boldsymbol{d}}_n\Delta t + [(1-2\beta)\ddot{\boldsymbol{d}}_n + 2\beta\ddot{\boldsymbol{d}}_{n+1}]\frac{\Delta t^2}{2} \tag{33}$$

式中 $\boldsymbol{d}_n, \dot{\boldsymbol{d}}_n$ 和 $\ddot{\boldsymbol{d}}_n$ 分别是 $\boldsymbol{d}_{(tn)}, \dot{\boldsymbol{d}}_{(tn)}, \ddot{\boldsymbol{d}}_{(tn)}$ 的近似值. $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ 表示时间步长; 而 $t_{n+\alpha} = t_{n+1} + \alpha\Delta t_n$. 参数 α, γ 和 β 决定了所用方法的稳定性和精确性. 如果参数选择为: $\alpha \in [-1/3, 0]$, $\gamma = (1-2\alpha)/2$, $\beta = (1-\alpha)^2/4$, 则这种方法是无条件稳定的二阶精确方法 [17].

现在我们得到最终的近似解

$$\boldsymbol{u}^h(x,t_n) = \boldsymbol{N}_{(x)}\boldsymbol{d}_n; \quad \dot{\boldsymbol{u}}^h(x,t_n) = \boldsymbol{N}(x)\dot{\boldsymbol{d}}_n; \quad \boldsymbol{\sigma}^h(x,t_n) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}\boldsymbol{d}_n \tag{34}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}^h$ 是应力, $\boldsymbol{S}$ 是一个由下式定义的算子

$$\varepsilon = \boldsymbol{S}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$\boldsymbol{D}$ 是弹性矩阵: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\varepsilon$.

我们清楚地看到, 在以上有限元求解过程中, 存在两种离散误差: (1) 用有限元方法形成 (30) 式过程中产生的空间离散误差; (2) 由 (30) 式 ~(33) 式过程中的时间离散误差, 即 $\underline{\boldsymbol{u}}^h(x,t)$ 与 $\boldsymbol{u}^h(x,t)$ 之间的区别.

3.1 后处理误差估计

近似解与精确解之差称为误差, 它们是

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^h, \quad \dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{u}} - \dot{\boldsymbol{u}}^h, \quad \boldsymbol{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h \tag{36}$$

分别表示位移, 速度和应力的误差. 为了适当地估计误差, 我们将误差写成分段形式: $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_s + \boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{e}_s$ 和 $\boldsymbol{e}_t$ 分别表示空间和时间误差. 这样, 误差以总能量范数的形式表示为 [17]

$$\|\boldsymbol{e}\|_E = \|\boldsymbol{e}_s\|_E + \|\boldsymbol{e}_t\|_E \tag{37}$$

式中

$$\|\boldsymbol{e}_s\|_E = \left[\int_\Omega (\dot{\boldsymbol{u}} - \dot{\underline{\boldsymbol{u}}}^h)^{\mathrm{T}}\rho(\dot{\boldsymbol{u}} - \dot{\underline{\boldsymbol{u}}}^h)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}^h)^{\mathrm{T}}D^{-1}(\boldsymbol{\sigma} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}^h)\mathrm{d}\Omega\right]^{1/2} \tag{37a}$$

是以总能量范数表示的空间离散误差. 而

$$\|e_t\|_E = \left[\int_\Omega (\underline{\dot{u}}^h - \dot{u}^h)^T \rho (\underline{\dot{u}}^h - \dot{u}^h) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\underline{\sigma}^h - \sigma^h)^T D^{-1} (\underline{\sigma}^h - \sigma^h) \mathrm{d}\Omega\right]^{1/2} \tag{37b}$$

是以总能量范数表示的时间离散误差.

3.2 后处理技术

3.2.1 时间上后处理过程

首先我们在时间上进行后处理以找到节点值 d^* 和 $\dot{d}^*$, 以便 (37a) 和 (37b) 式中的 $\underline{\dot{u}}^h$ 和 $\underline{\sigma}^h$ 可以近似为

$$\underline{\dot{u}}^h \approx \underline{\dot{u}}^* = N\dot{d}^* \tag{38a}$$

$$\underline{\sigma}^h \approx \underline{\sigma}^* = SNd^* \tag{38b}$$

由泰勒级数展开式可以导出 d^* 的后处理解为 [17]

$$d^*_{n+1} = d_n + \dot{d}_n \Delta t + \ddot{d}_n \frac{\Delta t^2}{2} + \left(\dddot{d}^A_n + \dddot{d}_n\right)\frac{\Delta t^3}{12} \tag{39}$$

$$\dot{d}^*_{n+1} = \dot{d}_n + \ddot{d}_n \Delta t + \left(\dddot{d}^A_n + \dddot{d}_n\right)\frac{\Delta t^3}{6} \tag{40}$$

式中 $\dddot{d}^A_n = \dfrac{(\ddot{d}_{n+1} - \ddot{d}_n)}{\Delta t}$. 将 (39) 和 (40) 式与 (32) 和 (33) 式进行比较, 马上就得到后验局部时间误差估计式

$$e_t = \left[(1 - 12\beta)\dddot{d}^A_n + \dddot{d}_n\right]\frac{\Delta t^3}{12} \tag{41a}$$

$$\dot{e}_t = \left[(2 - 6\gamma)\dddot{d}^A_n + \dddot{d}_n\right]\frac{\Delta t^2}{6} \tag{41b}$$

它们分别表示位移和速度. 这样, 以总能量范数表示的局部时间离散误差可估计为

$$\|e_t\|_E \approx \|\overline{e}_t\|_E = \left(\dot{e}_t^T M \dot{e}_t + e_t^T K e_t\right)^{1/2} \tag{42}$$

3.2.2 空间上后处理过程

空间误差估计式可写成

$$\|e_s\|_E \approx \left[\int_\Omega (\dot{u}^* - \underline{\dot{u}}^*)^T \rho (\dot{u}^* - \underline{\dot{u}}^*) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega (\sigma^* - \underline{\sigma}^*)^T D^{-1} (\sigma^* - \underline{\sigma}^*) \mathrm{d}\Omega\right]^{1/2} \tag{43}$$

这里, $\underline{\dot{u}}^*, \underline{\sigma}^*$ 就是时间上后处理的值. $\dot{u}^*, \sigma^*$ 需要空间上进一步的后处理来确定.

有许多后处理技术来确定高阶精确应力. 这其中, 最近发展起来的超收敛块恢复技术 [29,30] 似乎非常有效. 由于还不知道 (43) 式中后处理解 $\dot{u}^*$ 如何求得, 暂时将 (43) 式简化为

$$\|e_s\|_E \approx \|\overline{e}_s\|_E = \left[\int_\Omega (\sigma^* - \underline{\sigma}^*)^T D^{-1} (\sigma^* - \underline{\sigma}^*) \mathrm{d}\Omega\right]^{1/2} \tag{44}$$

最后求得相对局部时间误差和相对空间误差分别为

$$\overline{\eta}_t = \frac{\|\overline{e}_t\|_E}{(\|u^h\|_E)_{\max}} \times 100\% \tag{45a}$$

$$\overline{\eta}_s = \frac{\|\overline{e}_s\|_E}{(\|u^h\|_E)_{\max}} \times 100\% \tag{45b}$$

这里 $(\|u^h\|_E)_{\max}$ 是计算过程中有限元解的最大总能量范数.

4 自适应策略

4.1 特征值问题

自适应分析的最终目的就是要实现有限元的自动离散以提高求解精度. 其依据就是以上求得的误差估计, 它要求所估计的各单元误差都应满足规定的误差指标. 不同的误差估计方法, 自适应策略也不尽相同.

4.1.1 平滑单元应力场和修改质量矩阵法

对于自适应网格划分, 我们遵循这样一条准则 [14]: 能量变化最大的单元才是最需要加密的单元. 对于每一个单元 j, 我们计算

$$(\Delta T_i)_j = |(1-\alpha)\Delta(U_i)_j + \alpha\Delta(V_i)_j| \tag{46}$$

式中, $\Delta(U_i)_j$ 和 $\Delta(V_i)_j$ 分别由 (10) 式和 (5) 式求得. 而 $0 \le \alpha \le 1$. $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$ 分别表示纯平滑单元应力场和纯修改质量矩阵法. $\alpha = 0.5$ 表示两种方法同时采用.

4.1.2 升阶谱有限元法

在 2.2 节我们已求得广义特征值的相对误差 e_i. 令

$$e_{\max} = \max(e_i) \tag{47}$$

$$\alpha_i = e_i / e_{\max} \tag{48}$$

取一控制参数 v (通常可取 $v = 0.25 \sim 0.5$)[2,31]. 如果 $\alpha_i \ge v$, 则在第 i 个自由度上加高阶项.

4.2 动力响应问题

在动力响应自适应分析中, 我们希望最终解的相对误差满足

$$\overline{\eta}_t \le \eta_t^{\mathrm{TOL}} \tag{49a}$$

$$\overline{\eta}_s \le \eta_s^{\mathrm{TOL}} \tag{49b}$$

η_t^{TOL} 和 η_s^{TOL} 是规定的容许值.

4.2.1 时间步长的调整

如果 (49a) 式不满足, 则丢弃其解并进行时间步长加密. 新的时间步长预测为 [17]

$$\Delta t_n' = \left(\frac{\theta_t \eta_t^{\mathrm{TOL}}}{\overline{\eta}_t}\right)^{1/3} \Delta t_n \tag{50}$$

式中安全因子 $\theta_t < 1.0$.

如果估计的误差比容许值 η_t^{TOL} 小, 则接受其解.

4.2.2 空间网格自适应

如果 (49b) 式不满足, 则丢弃其解并进行空间网格自适应过程. 与其它的加密策略相似, 我们的目的就是产生一个所谓的优化网格, 使得每一个单元上误差均匀分布且满足条件 (49b).

每一个单元上误差的容许值为[17]

$$\bar{e}_m = \frac{\theta_s \eta_s^{\mathrm{TOL}} (\|u^h\|_E)_{\max}}{\sqrt{M}} \tag{51}$$

式中 M 是当前网格上单元总数，$\theta_s < 1.0$ 是安全因子．我们定义一个单元 k 的局部加密数

$$\xi_k = \frac{\|\bar{e}_s\|_{E(k)}}{\bar{e}_m} \tag{52}$$

这里 $\|\bar{e}_s\|_{E(k)}$ 是单元 k 上所估计的误差．参数 ξ_k 用来预测新单元的大小．如果误差的收敛率为 $O(h^p)$ 则单元 k 的大小预测为[17]

$$h_k' = h_k / \xi_k^{1/p} \tag{53}$$

若每一个单元上的误差比容许值 $\bar{e}_m$ 小且满足条件 (49b), 则停止网格重分过程.

4.3 自动网格生成技术

在现有的网格生成算法中，主要有以下几种网格生成方法：

(1) Delaunay 三角化网格生成法

这种方法比较成熟，不足之处是只能生成三角形单元，因而影响有限元分析的精度.

(2) Zienkiewicz 法[32]

它是以任意三角形网格为基础，通过单元合并，构成四边形、三角形共存的网格．因这种方法是从较成熟的三角形网格生成法出发，故具有良好的任意性和通用性．缺点是在边界部位不可避免地存在一些三角形单元.

(3) 逐点插入法[33]

首先生成三角形网格，同时构造单元尺寸场，使网格的疏密分布在生成过程中得到控制，然后采用 Rank 等的网格转化方法，将网格转换为全四边形网格．这种方法具有良好的灵活性和自适应性.

(4) 叉树法 (四叉树法和八叉树法)[34~36]

这种方法完全面向几何特征，它通过一系列几何操作，同时从几何模型数据库中取得分析物体的几何信息，以及网格控制参数信息等，来完成网格划分．这种方法非常适合自适应有限元分析，主要原因是它具有丰富的数据结构；单一的、极易操作的、面向整个分析域的网格控制机理.

(5) 改进的前脸技术[37]

这种方法是在构造三角形之前，先引入所有的节点．这种技术要求在前脸上不断地搜索节点和面.

5 存在的问题及研究方向

由于动力问题有限元方法与静力问题有限元方法既有共同之处, 也存在着明显不同的特征，因此，在动力问题有限元方法中可以利用静力问题有限元方法中一些较成熟的理论和技术，但应根据动力问题的具体特点，有些内容应有所改变．在研究中应注意以下几个方面：

(1) 自适应方面

尽管在结构动力问题有限元方法的误差估计中，有了几种提高精度的后处理方法，如平滑单元应力场和修改质量矩阵法、升阶谱有限元法和块恢复技术等，但提高有限元精度的最终途径也许只有两条：(i) 加密网格，即所谓 h 法．当单元的特征长度趋向于零时，所得的解可以逼近精确解．但这种方法会增加系统的自由度数，从而使计算量增大．(ii) 提高单元插值函数的阶次，即所谓 p 法．从理论上讲，当阶次趋向于无穷大时，所得的解也会逼近精确解．p 法与

h 法相比，其收敛效率要优于 h 法．在自适应分析中，如何合理地、有效地将 h 法和 p 法结合起来，即所谓的 h-p 组合法，是今后需要研究的课题之一．

(2) 网格自动生成方面

4.3 节中所介绍的几种自动网格生成技术大多集中于静力方面，有关动力方面网格自动生成技术的研究却很少．显然，动力方面的网格生成技术与静力方面的网格生成技术是有区别的．譬如，在求解特征值和特征向量时，节点的分布应尽量与结构的固有振型相符，即在固有振型变化较大的区域，节点分布应密一些；反之，节点分布应疏一些．对于二维或三维问题还要复杂得多．因此，如何对节点的分布进行有效地控制，是动力问题网格自动生成技术需要研究的问题．

(3) 算法方面

虽然我们已经有了一些关于误差估计、自适应策略以及网格自动生成等方面的理论基础，但在这些方法的计算机程序的具体实施时却并不那么简单．其主要内容有：升阶谱有限元方法的求解技术，如迭代法、多重网格法；动力响应解的求解技术，如 HHT-α 时间积分法，时间和空间上自适应后处理技术；以及自适应有限元网格生成技术等．编制相关技术的有效的、实用的计算机软件将是今后研究的主要内容．

参 考 文 献

1 Babuska I, Rheinboldt W C. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1978, 12: 1597～1615

2 Babuska I, Zienkiewicz O C, Gago J, et al. Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations. John Wiley & Sons, 1986

3 Demkowecz L, Devloo Ph, Oden J T. On an *h*-type mesh refinement strategy based on a minimization of interpolation error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 1985, 3: 67～89

4 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1987, 24: 337～357

5 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1989, 28: 2839～2853

6 Ainsworth M, Zhu J Z, Craig A W, et al. Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a posteriori error estimator in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1989, 28: 2161～2174

7 Zhu J Z, Zienkiewicz O C. Super-convergence recovery technique and a posteriori error estimators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1990, 30: 1321～1339

8 Wiberg Nils-Erik, Moller Peter. Formulation and solution of hierarchical finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1988, 26: 1213～1233

9 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. Adaptivity and mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1991, 32: 783～810

10 Zienkiewicz O C, Zhu J Z, Gong N G. Effective and practical h-p-version adaptive analysis procedures for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1989, 28: 879～891

11 Gallimard L, Ladeveze P, Pelle J P. Error estimation and adaptivity in elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1996, 39: 189～217

12 Manolis Papadrakakis, George P Babilis. Solution techniques for the p-version of the adaptive finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1994, 37: 1413～1431

13 Friberg P O. An error indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,*1986, 23: 91～98

14 Cook R D, Avrashi J. Error estimation and adaptive meshing for vibration problems. *Computers & Structures,* 1992, 44(3): 619～626

15 Stephen D B, Steven G P. Error estimation for natural frequency finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design,* 1997, 26: 21～40

16 Wiberg Nils-Erik, Zeng Lingfu, Li Xiangdong. Error estimation and adaptivity in elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 1992, 101: 369～395

17 Wiberg N E, Li X D. A post-processed error estimate and an adaptive procedure for the semi-discrete finite element method in dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1994, 37: 3585～3603.

18 Babuska I, Osborn J E. Estimates for the errors in eigenvalue and eigenvector approximation by Galerkin methods, with particular attention to the case of multiple eigenvalues. *SIAM Journal Numerical Analysis,* 1987, 24(6): 1249～1276

19 Belytschko T, Tabbara M. H-adaptive finite element methods for dynamic problems, with emphasis on localization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, 36: 4245~4265
20 Kuan-Jung Joo, Edward L Wilson. An adaptive finite element technique for structural dynamic analysis. *Computers & Structures*, 1988, 30(6): 1319~1339
21 Zhao Chongbin, Steven G P. Analytical solutions of mass transport problems for error estimation of finite/infinite element methods. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1995, 11: 13~23
22 Chen Y Z, Xie J R. Evaluation of natural frequencies of non-uniform beams by numerical integration. *Computers & Structures*, 1988, 29(4): 693~697
23 Chen R S. Evaluation of natural vibration frequency and buckling loading of bending bar by searching zeros of a target function. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1997, 13: 695~704
24 Papadopoulos M, Papadopoulos L, Garcia E. Eigen-analysis using optimization with Rayleigh's quotient. *Computers & Structures*, 1997, 65(4): 551~559
25 Lee In-Won, Kim Man-Cheol, Robinson A R. Determination of the natural frequencies and mode shapes for large structures by accelerated Newton-Raphson method. *Computers & Structures*, 1997, 63(1): 61~68
26 Huang X, Cook R D. Application of the finite element difference method to vibration problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24: 1581~1591
27 Zienkiewicz O C, Gago J P de S R, Kelly D W. The hierarchical concept in finite element analysis. *Computers & Structures*, 1983, 16(1-4): 53~65
28 诸德超. 升阶谱有限元法. 北京: 国防工业出版社, 1993
29 Hughes T J R. The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987
30 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The super-convergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I: the recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 33: 1331~1364
31 郭书祥. 自适应有限元方法及其工程应用. 力学进展, 1997, 27(4): 479~488
32 Zienkiewicz O C, Phillips D V. An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1971, 3: 519~528
33 窦一康. 用逐点插入法自动生成全四边形的自适应有限元网格. 计算力学学报, 1997, 14(3): 317~323
34 魏红宁, 周本宽. 基于叉树法的自适应有限元局部网格加密研究. 计算力学学报, 1997, 14(3): 324~331
35 杨名生, 吴京宁. 基于四叉树法的有限元网格自动生成及凝聚方法. 计算力学学报, 1995, 12(4): 409~416
36 Zhu J Z, Zienkiewicz O C, Hinton E, et al. A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, 32: 849~866
37 Jin H, Wiberg N E. Two-dimensional mesh generation, adaptive remeshing and refinement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, 29: 1501~1526

THE STRUCTURE DYNAMIC ANALYSIS BY ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD

Gong Guoqing Liu Hanbing Wei Yuan
Jilin University of Technology, Changchun 130025, China

Abstract The adaptive finite element method in structure dynamic analysis is mainly used to study the error estimation in finite element dynamic analysis and establish adaptive finite element mesh generation procedure for dynamic analysis of complex structure. In this paper, the authors first review the important development in dynamic problem of structure by adaptive finite element method, including error estimation and adaptive strategy for the analysis of the free vibration and dynamic response to the external loading. Several present schemes of mesh generation are briefly described. Finally, the existing problems and future trends are discussed.

Keywords structure dynamic analysis, error estimation, adaptive finite element method