第 30 卷 第 1 期 力 学 进 展 Vol.30 No.1
2000 年 2 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Feb.25, 2000

非定常不定边界问题边界元法的若干进展 *

冯振兴 唐少武 张 明

武汉大学数学科学学院，武汉 430072

摘 要 对于复杂的非线性工程问题的数值模拟，边界元法 (BEM) 日益显示出优于区域解法的长处，特别是时间相关 (需按时段逐步迭代推进) 和含各种不定边界 (造成可变区域，网络需不断重分) 的情形， BEM 可显著减少存贮要求与计算量. 针对非线性问题数值模拟的主要难点，即微分算子线性化，时间相关项与可动边界 (非线性边条) 的处理等，综述了国内外边界元法学术界的近期研究进展，总体目标是寻求一种适应多种微分算子、非线性迭代和时段推进计算效能高的稳定数值模式.

关键词 非线性边界元，微分算子线性化，非定常可动边界，体积分处理

1 引 言

边界元法 (BEM) 自 70 年代末在全世界流行，在我国的研究推广与国际学术同行大致同步，不仅深入到各个工程领域，也吸引了数学界、力学界和计算界的众多学者. 二十年来，以工程院士杜庆华教授为主要学术带头人，已先后召开了 5 次全国性边界元法学术会议 [1~5] 和多次国内召开的国际 BEM 会议. 80 年代中开始，与一批日本学者合作，举办了 8 次双边合作 BEM 讨论会 [6~13] (每隔一年半一次，在日本和中国轮流举行)，延续了十多年，使两国在边界元研究方面与国际同步. 由 C.A. Brebbia 召开的每年一次世界性 BEM 大会，至今已召开 20 多次，我国学者基本上轮流参加或递交论文，在历次论文专集中能够反映我国的研究状况.

边界元法作为有限元法 (FEM) 的发展与补充，现已公认有取长补短的众多优点，有时还有独到好处. 对于近期人们关注的非线性、非定常、强耦合复杂课题， BEM 有以下长处:

(1) 整个问题降维. 方程规模仅取决于边界结点个数，初始数据容易准备，单元重分和方程反复迭代求解工作量均显著减少.

(2) 着力于边界结点值及导数值的计算，且精度可优于 FEM (后者的缺点正是位移值精确，应变应力值不理想). 内点值又可按需算出.

(3) 易模拟无穷域. 特别是能找到满足无穷远处衰减的所谓辐射条件的基本解，则可免去“无穷远”大边界的单元布置，对海洋波浪及岩基土壤等介质这一点有突出优越性.

收稿日期：1998-09-11，修回日期：1999-02-23

* 国家自然科学基金资助项目 (19772036)

(4) 易于处理时间相关问题. 时间相关 (非定常) 问题通常采用按时段逐步推进求解, 且为保证精度和计算稳定, 复杂问题时段取得很小, 从而整个计算量急剧增长 (如孤立波计算持续上千个时段). 为此, 采用 BEM 模式尽量减小每个时段的计算量无疑有助于效能的提高.

(5) 易于描述激烈变化部位. 如裂纹尖缘处可引入奇异单元建立 BEM 模式.

总之, 为了充分发挥 BEM 的长处求解各类非线性问题和时间相关问题 (包括微分算子非线性, 介质特性非线性, 可动边界运动及动力非线性等), 从国内外文献和我们多年计算经验看, 特别需要处理好以下几方面的难点:

(1) 微分算子的线性化. 计算机模拟本质上都是用四则运算逼近微积分, 线性化往往有较大随意性, 何种途径属于 "最优" (收敛快, 精度佳, 模式简单等) 则研究不够.

(2) 非线性迭代的效能. 理论上保证收敛和运算减少 CPU 时间均极为重要, 为此人们企求将基本解的有关积分尽量解析完成而减少数值积分计算量.

(3) 近代复杂工程问题大多时间相关, 相应微分方程统称为 "发展方程", 它的边界元求解常需时段推进. 这样, 时段迭代和非线性迭代嵌套进行, 计算量比之线性定常问题高出几个数量级.

(4) 对存在不定边界或可动边界的情形, BEM 模式需按时段完成可变区域和可变边界上的时 - 空双重积分. 试设想, 边界不断变化时, 若需同时保留每个时段的边界形状几何信息, 存储要求将十分惊人.

(5) 非线性项及非齐次项在边界积分方程 (BIE) 表达式中常相应于体积分 (不能转换为边界积分). 为此, 每个时段均需作体积元网格重分并完成数值积分, 存贮量和计算量将大幅度增长, 乃至 BEM 优于 FEM 的特点将被磨灭.

以上难点最重要的是可动边界与非定常这两个因素同时出现的情形, 典型实例即热扩散含相变的凝结 - 熔化问题. 正因如此, 90 年代众多学者从事扩散方程为主的瞬时传热与相变可动边界计算研究, 但其难度比自由面可动边界问题 (内流晃动与外流大振幅波浪) 要大得多, 处理不当往往得不到稳定精确的数值结果. 本文着重这几方面综述计算经验, 同时述及所见国内外进展近况.

2 微分算子线性化

众所周知, 工程问题的数学表述首先归结为各类微分方程. 在多年流固耦合计算中, 作者体会到: 虽说固体和流体均有各自的 Navier-Stokes 方程, 但至今尚缺乏直接求解的完美数值方法. 因此, 只能由简到繁, 逐步深入. 在许多耦合系统中, 固体结构已有较成熟的 FEM 软件可资引用, 流体 (或温度场、电磁场等) 则采用 BEM 模式有独到好处.

为建立 BEM 模式, 控制微分方程 (算子) 的线性化有以下几种途径:

(1) 简单移项. 即将非线性项移至右端, 视为 "已知项", 建立一种迭代格式, 每次迭代求解线性化问题的 BEM 方程, 直至收敛. 这是 FEM 与 BEM 长时期沿用的常规处理方法. 记非线性算子为 A, 原始微分方程为

$$A(\Phi) = f(r) \tag{1}$$

设算子 A 由线性部分 L 与非线性部分 N 叠加组成, 则 (1) 式的移项处理可写成

$$[L(\Phi)]^{(k)} = [f(r) - N(\Phi)]^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

式中上标代表迭代次数. 给出 $k = 1$ 时的初值 Φ_0. 代入右端, 求解 (2) 得到 Φ^k, 依次类推. 当

然实际计算需形成 (2) 式相应的 BEM 方程组. 这种方法的不足之处是显而易见的. 第一, 若算子 A 本身只有非线性项, 反而不能建立线性迭代格式; 第二, 若线性算子 L 本身较复杂, 相应的基本解尚未找到或难以处理, 也就不适用; 第三, 反过来讲, 若 L 过于简单, 例如它的微分阶次低于 A, 则相应于 A 的多个边界条件无法配置到 L 的线化方程求解; 最后, 此法必然造成冗长的右端项, 在 BEM 模式中出现无法消去的体积分, 妨碍 BEM 的降维优越性.

(2) 部分差分化. 作者推荐这一方案. 实际上, 对较复杂的非线性方程及时间导数项, 都可以用局部差分的办法改造成 "恰当的线性方程". 这里所谓的 "恰当" 是指比移项法剩下的算子 L 可以稍复杂些, 只要它的基本解已知且数值处理较成熟就行. 事实上, 不少工程问题的微分方程多属二阶算子, 非线性表现为算子的幂次方及其与函数的乘积, 以及两个线性算子之积. 因此, 局部差分可以做到既不简化得太过分影响精度, 又可能利用基本解的特性免去体积分. 由于这种线性化途径同样适用于时间相关问题, 所以后面将结合扩散方程再予细述.

(3) 拓扑同伦展开. 最近, 年轻的留德博士廖世俊教授提出将任意非线性算子 A 作 "同伦" 展开, 建立系统的线性迭代求解格式, 并命名为 "广义边界元法"[14]. 这一思路格式统一, 有较好理论基础, 而线性算子 L 的选取也有较大自由度. 其低阶迭代格式恰与简单移项模式一致. 所谓同伦展开, 主要是引入一个 "嵌入参数" $p \in [0,1]$, 要求原控制方程的非线性微分算子 A 和某个恰当选定的线性算子 L 作用于已知的初解 Φ_0 及新的解 ψ 时满足下式 [14]

$$L(\psi) = (1-p)L(\Phi_0) + p[L(\psi) - A(\psi) + f(r)] \tag{3}$$

不难看出, $p=0$ 时 $\psi = \Phi_0$ 即初解; $p=1$ 时 ψ 为原方程 (1) 的解. 从 (3) 式出发, 对 p 逐步求导, 则可建立以线性算子 L 作用于 Φ 的 "同伦函数" v 上, 使得 v 对 p 的各阶导数满足一系列线性方程

$$L\left(v_0^{[m]}\right) = f\left(r, \Phi_0, v_0^{[m-1]}\right) \tag{4}$$

由于 L 的基本解已知, 所以由 $m = 1, 2, 3, \cdots$ 可建立 (4) 式的线性 BEM 方程组逐次求解.

当然, 同伦展开乃归结为一系列线性求解. 但算子 L 选择得当, 可望 m 值较小时就获得较精确的结果. 它的突出优点是 $A = N + L$ 型, $A = k(r) * L$ 型或 $A = f(r,t) + L$ 型非线性算子均可在统一格式下线性化. 但此法如何应用于时间相关及带可动边界的情形, 尚待深入研究.

3 可动边界追踪

近代工程力学分析亟需考虑结构大变形 (强振动) 和液面大幅度晃动或波动的强耦合效应, 因此小变形小振幅假定不再成立, 且流固介面、波浪自由面、装液晃动面、过水坝或堰流表面、以及热问题中的熔化 (溶化, 融化) 或凝结 (结晶, 固化) 相变波前面等都是一种可动边界. 这种问题不仅时间相关, 还要同时求解场参数和可动边界几何位置与曲面、曲线形状, 采用 BEM 模式 (着重求解边界信息) 无疑更优于 FEM[15]. 问题在于, 此类现象的控制方程即使仍为线性, BEM 模式还是需按时段不断作时间积分和边界积分. 试想, 单元插值仅在一个时段内有效, 所以基本解 (与场参数之积) 的各个积分均需每个时段、每个单元反复完成数值积分运算, 上千个时段、上百个单元的总运算量就十分惊人, 存贮要求也常常远超出微型计算机 (如 IBM586) 的容量.

作者在近 10 年内完成了线性方程控制的多种可动边界 BEM 模拟, 并可在 586 微机上实施. 主要手段是对时段的积分先予解析完成 (免去数值积分运算), 对单元 (二次模式) 的积分同样尽量先完成解析积分推演, 使 CPU 时间显著节省. 其次是设法做到对单元 (可动边界) 的积

分每个时段只作一次，免去同时存贮所有时段边界形状的庞大信息量，使计算机存贮要求也显著节省．例如，对一大类有势流，外流波浪有波动方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \tag{5}$$

不可压时 $c \to \infty$, (5) 式简化为 Laplace 方程

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{6}$$

对内流装液晃动同样可简化为 (6) 式．而非线性则集中体现在自由面动力条件 (Bernoulli 方程，需保留全部二次项), 以及可动边界变位的几何非线性．

对于时间相关微分方程，最典型的发展方程是扩散方程 (diffusion equation)

$$\frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \tag{7}$$

虽然它只比 Laplace 方程多了一个时间偏导数项 $\frac{\partial T}{\partial t}$，但相应基本解较复杂，记作

$$T^* = \frac{1}{4\pi K(\tau - t)} \exp\left[\frac{-r^2}{4K(\tau - t)}\right] \tag{8}$$

建立 (7) 式的 BEM 模式时，将出现对时间和边界的多重积分．研究表明，T^* 与边界单元形函数乘积的时段积分可以解析完成，导致一种特殊函数 (指数积分函数), 从而可再作级数展开予以解析表述．不过，时间积分的解析表达式，级数的大参数、小参数展开，时段推进求解的稳定性和收敛性等均需倍加小心．这方面的文献可见者不足 80 篇，存在各种错漏与不足者却不少．这里只能提及最具代表性的一些文献．例如文献 [16] 较早用 FEM 模式作凝结过程计算模拟；文献 [17] 最先用 BEM 作相变计算，但方程仅取 Laplace 算子 (计算表明只适用于土壤冻结一类缓变过程); 文 [18] 计及了非线性条件但未考虑可动边界；文 [19, 20] 提出了较完整的扩散方程的 BEM 模式，但时间积分解析处理及级数展开不够完备，算例也较粗糙．

可喜的是，多年计算经验表明：对于各种内外流，采用 (6) 式所示 Laplace 方程相应的 BEM 模式，配以精度较高的二次边界元，并将动力学自由面边界条件和自由面变位的 Lagrange 型方程归结为一组常微分方程，可以使计算模型大为简化，在微机上完成了浮体、潜体、水底障碍物及造波器 (横向活塞推进或往复加压) 等诱导的大振幅正则波和孤立波的一系列数值模拟 [13]；同样成功地模拟了不同容器 (矩形、半圆型和任意形状) 内装液的"自晃频率"和"高阶晃动振型"计算，以及容器作往复移动或转动 (模拟地震效应) 时装液强迫晃动的低频、高频响应及同频共振"共晃"响应 [15]．日本学者 N. Tosaka 和国内黄玉盈、叶天麒教授等也作了晃动及水面撞击等一系列计算分析，均可在文献 [1~13] 中找到．对 (7) 式所示瞬时传热并计及相变可动面的情形，作者发现缓变过程采用 (6) 式已较精确，速变过程 (金属材料的熔化与凝结) 则应采用 (7) 式并完成 (8) 式的时间积分及其级数展开．为避免体积分并减少各时段可变边界上的积分运算，采取了一系列数值措施 [12,21]．

4 时间相关问题

前节内容实际上已提及时间相关问题的一些处理方法，因为可动边界一定时间相关．基本思想仍是要设法寻找"恰当"的线性算子代替或逼近非线性微分方程，同时希望该算子的基本解已知，便于积分 (特别是时间积分，最好能推导得出解析公式)．

至此已可看到，非线性控制方程本身的线性化相对而言并非主要难点，可动边界与时间相关这两个因素处置不当才导致存贮量与计算量猛增．一般讲，时间相关问题不可避免地要采用按时段逐次迭代，逐步逼近，且时段大多要取得较小 (0.01 s 左右)，还要按可动边界移位快慢控制时段步长 (可变步长)．如孤立波的形成、扩展、传播乃至孤波的碰撞等全过程总得延续成千个时段，微机运行十多个小时，还得防止计算失稳．

迄今为止，时间相关算子仍主要采用差分离散．以方程 (7) 所示扩散算子代表的凝结过程为典型实例，它的 BIE 表达式比定常问题多了一重时间积分 [12]

$$C_iT_i+\frac{1}{\rho c}\int\limits_t\int\limits_\Gamma q^*T\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t=\frac{1}{\rho c}\int\limits_t\int\limits_\Gamma T^*q\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t+\int\limits_t\int\limits_\Gamma T^*Tv_n\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \tag{9}$$

其中 $q^*=\partial T^*/\partial n$ 可由 (8) 式得出解析式， v_n 为可动边界结点法向移动速度，可由当时当地温度场与潜热常量算出．研究表明， (9) 式经时段 (Δt_i) 和单元 $(\Delta\Gamma_j)$ 离散化后，所有积分首先涉及到 T^* 的时间积分 [22]．为此，时间相关问题的 BEM 模拟可有两种格式：

第一格式，以 (9) 式为基本出发方程，完成 T^* 的时间解析积分，得到指数积分特殊函数 Ei，再作级数展开 (注意视参变量大小有两种展开，许多文献遗漏了)，然后再完成边界单元 (包括可动边界) 上的二次元模式空间积分．它的优点是精度高，易于处理可变时段 [12]．缺点是如果边界移动后下一时段又得重作时间积分和边界积分，计算量太大，且可动边界信息难以存贮．作者提出一种按时段局部加权的基本解选择法 [21]，使每个时段的时 - 空积分只作一次，极大节省了存贮量与 CPU 时间．

第二格式，一开始就在 (7) 式中引入部分差分，相当于第 2 节算子线性化所述第 (2) 种方法，如将 $\partial T/\partial t$ 取中心差分，微分算子剩下 Laplace 算子 (i 时刻) 加上函数项 (i 时刻)，即得到 i 时刻的一个 Helmholtz 方程

$$\nabla^2T^{(i)}-\frac{1}{\Delta t}T^{(i)}=-\Big(\frac{1}{\Delta t}T^{(i-1)}+f^{(i-1)}\Big) \tag{10}$$

它比 (7) 式多了一个非齐次项．

由于 Helmholtz 方程比 Laplace 方程逼近真实情况要好，且对应的基本解已知而又与时间无关，属于另一类特殊函数 Bessel 函数 [23]

$$T^*=\frac{1}{2\pi}K_0\Big(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\Big) \tag{11}$$

它的 BEM 方程只涉及边界元积分而没有时间积分．若时段步长 $\tau=\Delta t=\mathrm{const}$，则可以得出所有积分在二次单元上的解析表达式或递推式，从而免去大量数值积分运算量 [23,24]．

由此推而广之，对二阶微分方程控制的各类工程问题，如 Laplace 方程， Helmholtz 方程 (椭圆型) 和扩散方程 (抛物型)，波动方程 (双曲型) 等，均可通过局部差分化为按时段的 Laplace 或 Helmholtz 型，建立统一的 BEM 模式．不言而喻，带可动边界的时间相关问题，在变时段及边界积分难以解析完成的情况下，如何提高计算效能仍有待进一步深入研究，希望本文能引起众多同行专家的关注．

5 体积分的处理

边界元法的主要优点是未知元仅限于边界结点，特别是建立 BEM 方程时只涉及边界积分，因此只需对边界作单元剖分．可是，微分方程的右端非齐次项 (如 Poisson 方程右端项) 和时间

相关或非线性算子经线性化之后形成的右端项恰恰不可避免地导致方程右端出现体积分. 对存在不定边界的时间相关问题，这意味着需要每个时段作整个内部区域的内部元素和边界单元网格重分，再完成积分运算，这就与 FEM 格式没有什么区别了. 因此，实际上边界元计算总想回避出现体积分，它也正是非线性问题求解的一大障碍，至今尚属良医乏术.

迄今所见处理体积分有以下几种方案：

(1) 按物理背景消去体积分. 如凝结过程，从全液相定常态一直算到全固相定常态，则初始时刻区域 Ω_0 上的体积分可消去. 当然，这种处理有赖于工程经验.

(2) 采用所谓对偶互易法，逐次引人高阶调和函数基本解，将体积分项化为一系列关于高阶调和函数基本解的边界积分. 文献 [25] 已给出高阶调和函数基本解的表达式通式，建立相应 BEM 模式当不成问题. 但对非调和函数的一般非线性问题，体积分处理仍有待深入研究. 对于对流 - 扩散问题， Poisson 问题，乃至 diffusion 问题，经过离散化后出现的相应体积分，作者仍致力于得出解析表达式以免去数值积分计算量 [23,24], 取得了部分成功.

(3) 由于 BEM 模式对内部元素单元网格剖分要求不高 (只要提供对边界结点的 "贡献"), 所以寻求一种快速有效的粗网格自动生成算法亟有必要，特别是当可动边界逐步移动时，如何快速有效地作边界附近域内单元网格的局部调整，看来是提高计算效能的一个关键. 目前自适应网格重分技巧文献众多，方法过于复杂又极不统一，希望见到有针对性而简便易行的方案问世. 此外，近年有些学者提出所谓 "无单元有限元法", 即引入特殊插值函数，使体积分只与结点坐标有关而无需形成单元网络，可望借鉴用于处理 BEM 体积分.

6 结束语

各种介质或物理场如固体结构位移场、流体速度场、温度场的强耦合 (简称 "多场耦合"), 如果再包含各种不定边界 (可以与时间无关，只是边界形状事先未知而不确定) 或可动边界 (随时变动，如波浪面和相变波前面), 则问题将变得高度非线性.

(1) "非线性" 首先表现在控制方程中微分算子本身的非线性. 因此，算子线性化是数值计算的第一步. 但这还不是主要困难，原因是不少问题本身用线性方程已能很好地描绘 (非线性表现在材料非线性，几何非线性). 或者可以说，非线性迭代既然不可避免，重点只能是保证线性化后迭代能稳定、精确、高效.

(2) 可动边界上的动力非线性和几何非线性才是主要的非线性因素，数值模拟十分费时，存贮要求也激增.

(3) 时间相关通常归结为按时段逐步推进，相当于非线性迭代又嵌入时段迭代双重进行，运算量自然惊人. 时间相关问题加可动边界，即使微分方程属线性，计算难度也很大，应属研究重点.

(4) BEM 模式无疑比区域算法更有利于着重边界信息的问题求解. 对许多工程问题，可归结为二阶微分方程，大体说来 Laplace 方程的模式最成熟 (二次元模式已有完整程序),Poisson 方程相应体积分最近已推得解析解 [24], Helmholtz 方程也已完成全部解析积分 [23]. 至于时间相关的二阶方程，不论是抛物型 (扩散型) 或双曲型均可局部差分 "椭圆型化", 例如以 Helmholtz 型方程的求解为基准作时段推进计算，这也是本文推荐的主要思路.

目前，用边界元法作时间相关问题、对流 - 扩散问题及可动边界问题的研究仍受到广泛关注. 亟待改进之处仍在提高计算效能和节省存贮信息. 对流扩散问题的误差分析等理论研究也有代表性. 这方面的最新文献如 [26~28].

参 考 文 献

1 杜庆华主编. 第一届全国工程中的边界元法会议文集. 重庆: 重庆建工学院出版社, 1985

2 杜庆华主编. 第二届全国工程中的边界元法会议文集. 西安: 西安交通大学出版社, 1988

3 杜庆华主编. 第三届全国工程中的边界元法会议文集. 西安: 西安交通大学出版社, 1992

4 杜庆华主编. 第四届全国工程中的边界元法会议文集. 南京: 河海大学出版社, 1994

5 姚振汉主编. 第五届全国工程中的边界元法会议文集. 北方工业大学学报, 1998, 10(增刊)

6 Tanaka M, Du Q H eds. Proceedings of first Japan-China Symposium on BEM. Tokyo: Pergamon Press, 1987

7 Du Q H, Tanaka M eds. Proceedings of 2nd China-Japan Symposium on BEM. Beijing: Tsinghua University Press, 1988

8 Tanaka M, Du QH eds. Proceedings of 3rd Japan-China Symposium on BEM, Boundary Element Methods, Principles and Applications. Beijing: Pergamon Press, 1990

9 Du QH, Tanaka M eds. Proceedings of 4th China-Japan Symposium on BEM, Theory and Applications of Boundary Element Methods. Beijing: International Academic Publication, 1991

10 Tanaka M, Du Q H eds. Proceedings of 5th Japan-China Symposium on BEM. Sapporo, Japan: Elsevier Publication, 1993

11 Du Q H, Tanaka M eds. Proceedings of 6th China-Japan Symposium on BEM. Shanghai: International Academic Publication, 1994

12 Tanaka M, Yao Z H eds. Proceedings of 7th Japan-China Symposium on BEM. Fukuika: Elsevier Publisher, 1996

13 Yao Z H, Tanaka M eds. Proceedings of 8th China-Japan Symposium on BEM. Beijing: International Academic Publication, 1998

14 Liao S J. High-order BEM formulations for strongly nonlinear problems governed by quite general nonlinear differential operators (part 1). *International Journal of Numerical Methods in Fluids,* 1996, 23: 739～751

15 Feng Z X. Lagrange BEM for unsteady sloshing model suitable to arbitrary tank. In: Computational Methods in Engineering, Advances & Applications. Singapore: World Science Publication, 1992

16 Dalhuijson A J, Segal A. Comparison of FE technique for solidification problems. *Int J for Num Methods in Eng,* 1986, 23: 1807～1829

17 Oneill K. Boundary integral equation solution of moving boundary phase change problems. *Int J for Num Methods in Eng,* 1983, 19: 825～835

18 Oneill K, Kuroki T. On the nonlinear heat transfer problems. In: Banerjee PK eds. Developments in BEM-4, Oxford: Elsevier, 1985. 149～158

19 Zabaras N, Mukherjee S. An analysis of solidification problems by BEM. *Int J for Num Methods in Eng,,* 1987, 24(10): 1879～1900

20 Zabaras N, Mukherjee S. Solidification problems by the BEM. *International Journal for Solid Structures,* 1994, 31(12/13): 1829～1836

21 Feng Z X et al. A new time marching BE scheme for transient heat transfer with a thermal moving boundary. *Engineering Analysis with Boundary Elements,* 1998, 22(1): 71～75

22 冯振兴等. 扩散方程基本解的积分处理. 武汉大学学报, 1997, 43(3): 289～295

23 Tang S W, Feng Z X. Reduction of developing equations for analytical integration in BEM model. In: ECCM'99, Europe Conference in Computational Mechanics. Munich, Germany, September, 1999 (with CD-ROM)

24 Tang S W. Feng Z X. On analytical treatment of all boundary and volume integrals in BEM. Academic Journal of Wuhan University, 1998 (4): 407～410

25 Wrobel L C, Brebbia C A. The dual reciprecity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanic & Engineering,* 1987, 65: 147～164

26 DeSilva S J, Chan C L, Chandra A. Boundary element method analysis for the transient conduction-convection in 2-D with spatially variable convective velocity. *Applied Mathematical Modelling,* 1998, 22: 81～112

27 Zerroukat M. A fast boundary element algorithm for time-dependant potential problems. *Applied Mathematical Modelling,* 1998, 22: 183～196

28 Taigbenu A E, Onyejekwe O O. Green's function-based integral approaches to nonlinear transient boundary-value problems. *Applied Mathematical Modelling,* 1999, 23: 241～253

SOME RECENT ADVANCES IN BEM SOLUTION OF TIME-DEPENDENT PROBLEMS WITH MOVING BOUNDARIES

Feng Zhenxing Tang Shaowu Zhang Ming
Department of Mathematics, Wuhan University, Wuhan 430072, China

Abstract For the numerical modelling of complicated nonlinear problems, BEM model shows to be superior to the domain solution methods. Especially, for time-dependent problem (for which a time-marching scheme is needed) and for moving boundary (which means changeable solution domain and boundary where the regeneration of network is needed), BEM could reduce the storage requirement and CPU time considerably. In this paper, some principal difficulties, such as the linearization of the differential operator, the treatment of time-dependence and moving boundary are discussed including some novel ideas in literature. The main purpose is to establish an efficient and stable numerical model for time marching and nonlinear iteration suitable to a variety of differential equations.

Keywords nonlinear BEM, linearization of differential equations, transient moving boundaries, analytical treatment of volume integral

《应用力学评论》收录《力学进展》英文摘要

近期接到《应用力学评论 (Applied Mechanics Reviews)》主编 Arthur W. Leissa 的来信, 决定将《力学进展》综述文章的英文摘要收入其刊物, 并授权我刊可选译刊登《应用力学评论》的综述论文.

另据中国科技信息所信息分析中心的统计分析, 《力学进展》在其所收录的 1200 多种期刊中各项指标分别为: 总被引次数 221, 影响因子 0.648, 即年指标 0.133, 自引总引比 0.11, 地区分布数 13, 基金和资助论文比例 0.69. 其中影响因子列物理力学类期刊第 3 名. 指标综合加权评分为 75.33.

《力学进展》编辑部 供稿