

结构静动力屈曲问题研究进展

韩 强

张善元

杨桂通

南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016 太原工业大学应用力学研究所, 太原 030024

摘要 近几十年来, 结构的静动力屈曲问题一直是力学工作者极为关注的一个前沿课题. 本文总结和综述了这一研究领域的几个基本问题: 屈曲问题的分类、动态屈曲问题的特点及其特征量; 介绍了屈曲问题的处理方法和目前已取得的成果; 总结评述了人们关心的热点问题; 屈曲问题的模型分析和实验技术、动态屈曲判别准则.

关键词 结构稳定性, 分叉, 静力屈曲, 动力屈曲, 屈曲准则

1 引言

近年来, 随着现代工业技术的发展, 大量新型、高强度的轻型超薄结构广泛地应用于国防及民用工业的各个领域. 因此, 诸如杆、板、壳等轻型元件在各类荷载作用下的稳定问题引起了人们的极大关注, 特别是随着航空、航天和原子能利用等的飞速发展, 结构稳定性问题的研究意义也愈来愈明显. 为此, 长期以来, 力学工作者致力于结构稳定性问题的研究, 极大地丰富和发展了经典的稳定性理论, 使得这门学科不仅在理论上形成了一个庞大而复杂的体系, 而且具有重大的实用价值.

目前, 关于结构稳定性的理论和实验文献浩如烟海, 涉及杆、板、壳、拱等各类结构元件. 在本文中, 作者试图对结构稳定性这一研究领域的若干基本问题、处理方法、目前取得的成果以及人们共同关心的一些问题做一个简要的总结和评述.

2 结构屈曲问题的分类

结构稳定性问题的研究经历了由静载到动载, 由弹性到塑性的研究历程, 稳定性问题虽然有各种不同的定义, 但粗略地讲, 是研究系统在外界干扰微小时系统状态的扰动是否也是微小的问题. 按照不同的方式, 结构的屈曲问题可以分为以下几种不同的类型:

1) 根据结构的承载形式, 可将屈曲分为静力屈曲和动力屈曲.

静力屈曲: 指结构在静态外载作用下发生的屈曲.

动力屈曲: 指结构在动态荷载作用下发生的屈曲. 例如 (1) 轴向冲击荷载引起的杆或圆柱壳的屈曲, 横向冲击荷载引起的浅拱或扁球壳的跳跃; (2) 周期外力引起的参数共振; (3) 回转力引起的轴的晃动等, 这些荷载都是随时间变化的动态荷载; (4) 结构在随动载荷作用下

收稿日期: 1996 - 08 - 12, 修回日期: 1997 - 12 - 12

引起的屈曲。所谓随动载荷 (follower force) 是指其值保持不变却随着结构变形而改变其方向的载荷, 之所以将这类问题也归入动力屈曲中, 是因为对这类非保守力, 即使是研究系统的平衡稳定性, 也必须从动力学观点来讨论。

2) 按结构屈曲时的材料性质, 可将屈曲分为弹性屈曲、塑性屈曲和弹塑性屈曲。

弹性屈曲: 结构屈曲前后仍在小变形假定的范围内处于弹性状态时, 称之为弹性屈曲。

塑性屈曲: 结构在塑性应力状态下发生屈曲时, 称之为塑性屈曲。

弹塑性屈曲: 介于弹性屈曲和塑性屈曲之间的一种屈曲形式, 屈曲前结构处于弹性应力状态, 而屈曲时由于扰动变形使一部分材料进入塑性, 即屈曲发生后材料处于弹塑性应力状态。

由于上述三种屈曲现象中材料性质呈现出本质上的差别, 因此, 整个屈曲过程也表现出各自不同的一些特点。通常人们研究较多的是弹性屈曲和塑性屈曲, 对于弹塑性屈曲则很少有人问津, 主要原因是因为弹塑性交界处材料性质的变化使理论分析变得十分困难。

3) 沿袭静力屈曲中已有的实验结果及方法, 按屈曲的性质, 可将屈曲分为极值屈曲、分叉屈曲和非完善结构的屈曲三类。

极值屈曲: 极值屈曲通常对应于静载下发生跳跃屈曲 (snap through buckling) 的那类结构, 如弹塑性梁柱、圆柱壳一侧受冲击、浅拱和浅球冠等。

分叉屈曲: 指基本运动在某种状态时 (对应于分叉点) 变得不唯一或不稳定。

非完善结构的屈曲: 指含初缺陷结构的屈曲。在某些情况下, 带缺陷壳体的屈曲荷载大大低于完善壳体的分叉点载荷。

4) 按照屈曲后路径是否稳定, 可分为具有稳定后屈曲路径的屈曲, 具有不稳定后屈曲路径的屈曲和同时具有稳定及不稳定后屈曲路径的屈曲。

具有稳定后屈曲路径的屈曲: 指屈曲发生后载荷仍可继续增长 (如, 柱、板、无支承框架等)。

具有不稳定后屈曲路径的屈曲: 指屈曲发生后载荷呈现出下降趋势 (如, 轴向受压圆柱壳、球壳等)。

具有稳定及不稳定后屈曲路径的屈曲: 屈曲发生后, 同时具有上述两个特点的屈曲 (如简单桁架、两杆刚架等)。

5) 根据外力与时间的关系, 可将屈曲分为自治系统的屈曲和非自治系统的屈曲。

自治系统的屈曲: 指外力不依赖于时间时发生的屈曲, 其中有势系统和似保守系统的屈曲问题可以用静态方法来研究而不必归入动态屈曲问题外, 其它各系统问题都属于动态问题。

非自治系统的屈曲: 即外力显性地依赖于时间时发生的屈曲, 这是动态屈曲问题要研究的重点。

3 动态屈曲问题的特点及其特征量

由于时间参数的引入, 使得动态屈曲问题较静态屈曲复杂了许多, 也产生了一些动力屈曲所独有的特点, 如:

(1) 动载 $P(t)$ 的描述。实际情况下的动载相当复杂, 因为动态载荷一般和结构变形相耦合且不易精确测定, 一般冲击屈曲中冲击载荷的形式主要集中在理想脉冲载荷、阶跃载荷和所谓的两参数载荷 (即矩形脉冲载荷), 它们是对实际载荷的理想化处理。

Youngdahl^[1]和朱国琦等^[2]曾讨论过 $P(t)$ 的形式对结构塑性动力响应的影响, Youngdahl^[3]最近仍继续考虑脉冲形式与载荷分布对结构响应的影响, 提出用一个等价矩形脉冲, 即令冲量 (面积) 和形心位置相同的脉冲来代替真实 $P(t)$ 的形状。无疑, 动载形式对实际结构

动力屈曲的影响是一个值得注意的问题，特别是后屈曲分析时更是如此，只有对这一问题有了深入的认识，弹塑性系统动力屈曲研究的应用价值才体现了出来。

(2) 结构的静力屈曲形式仅依赖于载荷分布，而冲击屈曲则不仅和载荷分布有关，而且依赖于所加载荷的大小，在动载作用下有许多模态可能被激发。

(3) 载荷持续时间对动力屈曲行为有着显著的影响。一般而言，短时脉冲载荷作用下屈曲需要较高的载荷幅值，且呈现出高阶模态，阶跃载荷作用下屈曲则需要较低的载荷幅值，模态数也和静力屈曲模态接近。

(4) 动力屈曲具有和静力屈曲不同的处理方法，针对不同的载荷形式和结构需采用不同的处理方法。

(5) 动力屈曲有时必须考虑材料的动态本构关系。

(6) 屈曲发生的局部性，此时需要考虑应力波的传播对动力屈曲的影响。屈曲总是发生在有限长结构的两个端部，在塑性波的复杂波系作用下，也可能在结构中部的局部区域发生屈曲，以上这些现象可以在直杆和圆柱壳的实验中观察到^[5,6]。

在动态屈曲问题中，人们通常最为关心的是结构屈曲的临界载荷、屈曲模态和后屈曲分析，在后屈曲分析方面，荷兰学者 Koiter^[7]提出了在静力保守载荷作用下，弹性体初始后屈曲行为的一般理论，该理论在渐近的意义上是严格的，但是直到 60 年代以后，这个理论才引起人们的关注，Budiansky 和 Hutchinson^[8,9]发展了 Koiter 理论，使之成为更便于应用的形式，并把它巧妙地运用于缺陷敏感结构的动力屈曲分析，完善并发展了初始后屈曲理论。

在结构的动力屈曲问题中，无论在理论上还是在实际中，最令人关心的几个特征量是屈曲模态、临界载荷以及屈曲时间。

屈曲模态：指结构屈曲时的几何构形，在屈曲过程中，这种构形是不断变化的，初发模态和最终的残余模态受到较多的注意。

临界载荷：指结构发生屈曲时所需的最小的冲击载荷，它在工程实际中有着重要的意义。

屈曲时间：指冲击开始到结构发生屈曲的一段时间，它是和屈曲判别准则密切相关的特征量。

4 结构屈曲问题的模型分析和实验技术

4.1 简单模型的稳定性分析

在结构的屈曲问题中采用简单模型可以代表一类实际结构的屈曲特征，反映实际结构的主要因素对屈曲的影响并揭示其物理意义，加深人们对问题物理本质的理解和认识，能够突出问题的关键之所在。如著名的 Shanley 模型^[10]和 Hutchinson^[11]模型，均为结构稳定性理论做出过重要贡献。最先用杆系模型来研究非线性因素对壳体屈曲影响的当推钱学森和 Karman 的工作。

Shanley 所取的模型如图 1 (a) 所示，上下两段为刚体，中间由两根平行的弹塑性杆连接，分析时可化为图 1 (b) 所示的双弹簧模型，由一个刚性 T 形杆连接两个弹塑性弹簧组成，O 点仅能作垂直运动，OC 可绕点 O 转动 θ 角，弹簧下端允许水平移动以保证弹簧只产生垂直反力。

Hutchinson 改进了上述模型如图 2 所示，用以表现较大的缺陷敏感性，他认为，在塑性屈曲时，由于几何和材料的非线性所引起的缺陷敏感性是同等重要的。他吸收了弹性过屈曲理论的思想并发展了塑性系统的过屈曲理论，用小参数展开的方法研究了准静态的分叉图象。在图 2 中， $\bar{\epsilon}$ 为初缺陷， θ 角从 $\bar{\epsilon}$ 开始度量，C 点的横向弹簧用来表现几何非线性。

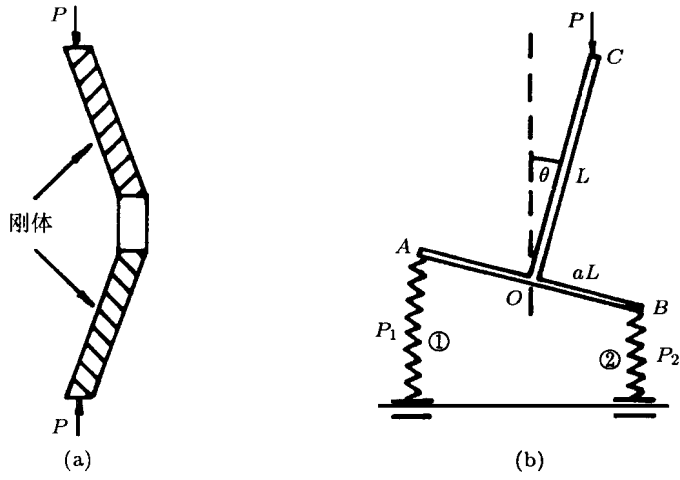


图 1 Shanley 模型

Hutchinson 后来还进一步考虑了连续体模型，并考虑弹簧服从 Ramberg - Osgood 型的规律，得到一个更接近于实际的连续体模型，这时由于弹塑性分界线可在截面内变化，过分叉的分析变得很复杂，得不到解析式。

对简单模型进行动态分析的有杜拉克等进行的工作。他们考虑初始位移和速度扰动随时间的发展。若载荷大于弹性临界载荷，任何初扰动都将失稳，若载荷处于切线模量与弹性临界载荷之间，初扰动不太大时，结构可以稳定，若初扰动太大仍将失稳。后来 Hutchinson 等^[9]用图 3 的模型讨论了弹性动力屈曲问题，其中阻止横向变形的弹簧 $F = KL(1 - a^2)$ 或 $KL(1 - a^3)$ 被用来代表不同的几何非线性特性。他们认为这些模型的静力和动力分析结果可以代表柱壳在轴向受一个突加阶梯型压力的情况。

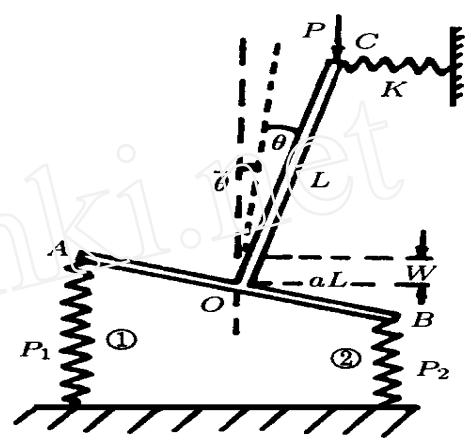


图 2 Hutchinson 模型

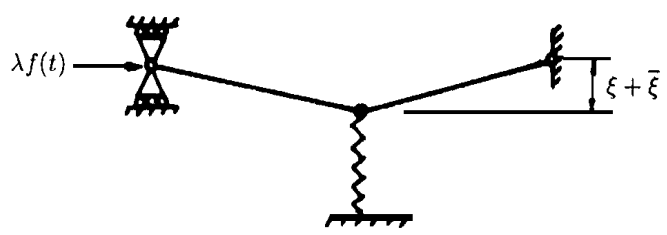


图 3 Budiansky - Hutchinson 模型

Danielson (1969) 对上述模型做了两点改进，讨论的也是弹性动力屈曲问题，增加了一个弹簧 K 和质量 M 以模拟前屈曲运动 (图 4)。

Jones 等^[15,16]为探讨材料非线性和初始几何缺陷两者同时对动力屈曲影响的问题对图 5 的模型做了理论分析，静力分析和 Hutchinson 所进行的一样，动力分析是施加一个阶梯载荷，

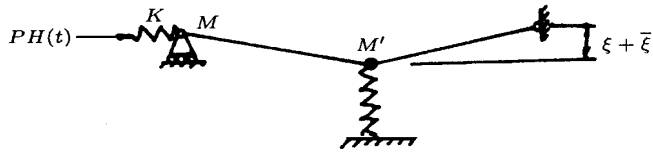


图4 Danielson 模型

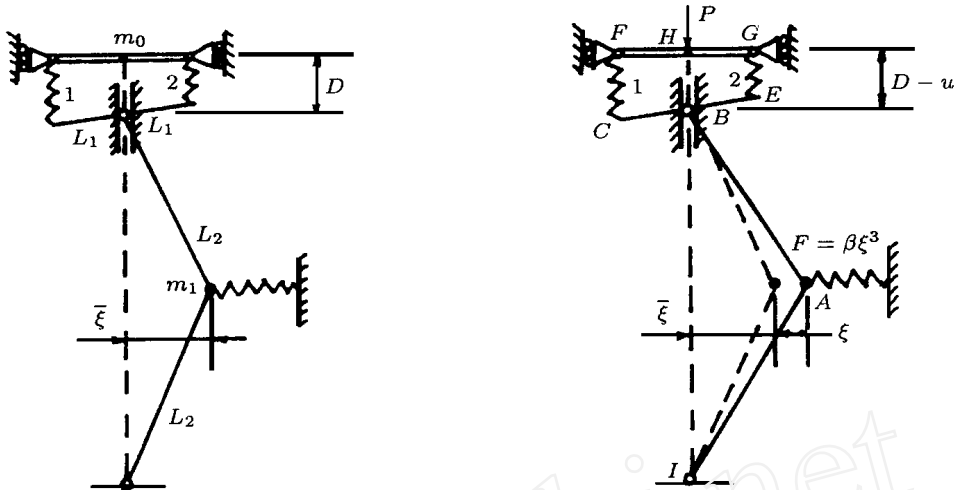


图5 Jones 模型

通过运动方程求解变形随时间的变化，该模型除了反映直杆的横向位移外，还考虑了轴向惯性的影响。

此外，在直杆动态屈曲的研究中，由于求解偏微分方程组难度较大，人们常常采用有限元或有限差分数值方法将偏微分方程或方程组化为常微分方程组求解，在研究应力波传播引起的直杆屈曲问题时，朱兆祥^[17]曾采用连杆模型（如图6），将其做为直杆的离散化模型，将偏

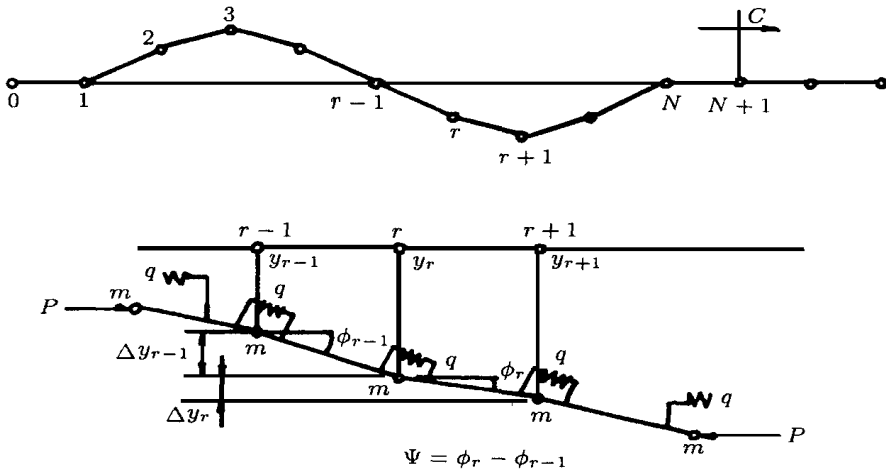


图6 连杆模型

微分方程中解的分叉问题转化为常微分方程组中的问题来研究。图6中，系统由等长度 L 的刚性杆多条沿长度排列而成，刚杆之间铰接，并有抗偏转弹簧相联系，弹簧常数为每单位偏转

角 q 个力矩。然而，由于在动态屈曲问题中，屈曲模态依赖于冲击载荷大小，同时考虑到屈曲过程中应力波传播所带来的非线性效应，要建立一个合理而又通用的模型不是一件容易的事。

4.2 结构动态屈曲问题的实验技术

目前，在结构动态屈曲问题的实验研究中，通常采用的方法有两种，即应变电测技术及高速摄影技术。

电测法利用动态贴片测量技术，记录结构中某些点的应变曲线，然后根据应变曲线的变化规律推断出屈曲过程的某些特征。这种方法的优点是测量技术较为成熟，因而是人们最为常用的方法，其缺点是仅能测出结构中某一点的变形历史，从而无法获得全场的变形信息。其测量范围受应变的限制，变形较大时，这种测量方法有一定的局限性。

高速摄影技术是利用高速照相机拍摄结构在动态屈曲过程中整个模态的变化过程，由于这种方法能够记录结构动态屈曲过程中各个阶段的构形的清晰图象，因此它常能为理论分析提供可靠的依据，这种方法虽然能得到一系列时刻结构的全场构形，但在时间坐标上却是离散的，特别是，人们对拍摄得到的高速摄影照片，往往只能做一些定性分析，还未能将其量化，因此，实验中通常将这两种方法结合起来使用。

近年来，随着光测力学技术的不断发展和完善，新的实验技术和方法在结构动力屈曲实验研究中的应用已成为可能。最近，太原工业大学杨桂通教授领导的课题组在圆柱壳塑性扭转屈曲的实验研究中采用了影像云纹法 (shadow moire method)，取得了令人满意的效果^[18]。

云纹法是一种新的应力应变测试测控方法，它克服了电测法只能逐点测量的缺点，可以实时给出全场变形信息，且其所需的仪器设备较为简单，将其和高速摄影技术相结合形成的动态云纹技术可给出结构屈曲过程的整个变形历史，动态云纹照片蕴含着丰富的变形信息，它不仅可给出结构前屈曲运动的应力应变信息，确定屈曲时的特征参量，并可为过屈曲理论提供一种新的实验手段，同时克服了高速摄影技术仅能用于定性分析的不足，当然，由于实验条件和技术的限制，如高速云纹技术还达不到微秒级，特别是实现云纹照片数据采集和处理的自动化尚有一定难度，动态云纹技术在结构动态屈曲实验研究中的应用尚需继续发展和不断完善。

由于动态屈曲特征量对结构初始缺陷的敏感性以及加载点的不完全一样，使得实验结果常带有一定程度的分散性，为了尽量避免这种情况，得到对理论分析更为有用的实验结果，必须对整个系统的几何完善性以及加载条件、支承条件等提出更高的要求，这是实验中应注意的一个问题，另外一个重要问题是关于冲击载荷的测量，它直接关系到实验结果的可靠性，是一个急待解决的技术问题。

5 动态屈曲判别准则

由于时间参数的引入，使得动态屈曲问题较静态屈曲问题复杂了许多，对于一个动力学系统，其一般的运动稳定性可由 Lyapunov 动力准则给出，即一个系统受到一个任意微小的扰动以后，若始终在原始形态附近的一个有界邻域内运动，则系统是稳定的，丧失这一性质的载荷为临界载荷，Lyapunov 稳定性意味着：系统的一个给定的解是稳定的，当且仅当对于所有时刻 $t > t_0$ ，从给定解的邻域出发的所有的解仍然在这一给定解的邻域中。

对于冲击屈曲问题而言，首要的是合理、实用的屈曲准则，它不仅要在逻辑上站得住，又要在实际上可行，但遗憾的是恰好在这个问题上至今未能形成一致的看法。事实上，动态屈曲的大量研究是在 60 年代和 70 年代开展并涌现的，人们各自提出稳定性和不稳定性的定义和准则，和此紧密联系的，也提出自己的研究途径和方法，下面对现有的准则做一个简单的介绍。

5.1 Movchan - Lyapunov 第二方法

Lyapunov 方法是建立在离散力学系统稳定性定义的基础上的, 60 年代, 前苏联学者 Movchan^[19,20]将 Lyapunov 方法成功地推广到了连续系统, 后来 Knops^[21]将 Movchan 的工作介绍到了欧美, Leipholz^[22]将这一方法运用到受随动载荷作用的直杆和板壳等结构单元的弹性稳定性的动态分析中, 并做了系统的阐述.

这种方法的主要思想是: 引入函数空间的两个尺度 $\rho_0(X, t)$ 和 $\rho(X, t)$, 用于度量未扰动路径上的点到扰动路径上相应点的距离, 要求此两尺度满足以下条件 (1) $\rho_0(X, t)$, $\rho(X, t)$ 为正定; (2) 如果 X^0 表示未扰动路径, 则应有 $\rho_0(X^0, t) = \rho(X^0, t) = 0$; (3) ρ 是时间 t 的连续函数; (4) ρ 关于 ρ_0 连续, 那么, 要使未被扰动的运动状态 (X^0, t) 相对于度量 ρ_0 稳定, 应存在一个 Lyapunov 泛函 V 满足以下条件: V 是正定的; V 关于度量 ρ_0 连续; V 不增.

由此可以看出, 如果 t_0 为初始时刻, 则 $(X(t_0), t_0)$ 度量初扰动的大小, 而 (X, t) 度量其后任意瞬时的扰动, 系统稳定与否依赖于尺度的选取, 一种选定的尺度可能仅适合一类问题, 而对另一类问题就可能不适用, 这就是说稳定性定义是和问题相关的. 它和 Lyapunov 方法一样是研究稳定性问题的严格方法, 但其缺点是给不出统一的法则来构造 Movchan - Lyapunov 泛函, 因而使其应用受到了局限.

5.2 B - R 运动准则

Budiansky 和 Roth^[23]在研究球壳的动力稳定性时, 通过运动方程直接求解位移和载荷的关系. 他们认为: 如果所加载荷的微小增量可以导致结构响应的一个巨大变化, 则所对应的载荷便是临界载荷. 显然这一思想起源于静力稳定性中的极值点失稳, 由于该准则便于在计算机上实施, 故被许多研究者采用, 曾经产生过较大的影响, 时至今日, 针对某些具体结构, 有些研究者提出的屈曲准则事实上其主导思想仍然和 B - R 运动准则是类同的.

B - R 运动准则实质上是对结构进行非线性动力响应分析, 进而确定 $P - Y$ 曲线的性状, 这里 P 为载荷参数, Y 为动力响应特征参数.

对于后屈曲路径是不稳定的情形, 无疑准则是成立的, 而且一般地可给出较为准确的临界载荷值, 然而如果后屈曲路径是稳定的, 则准则的应用尚有一定的困难, 另外, 当 $P - Y$ 曲线呈线性关系时 B - R 准则不再有意义. 另一方面应当指出的是, 使用该准则时其计算量相当大, 特别是当滞后屈曲发生时, 需要计及各模态间的能量转化, 这意味着必须考查较多循环的结构动力响应, 才能得到正确的结果.

同时, B - R 准则的应用需要合理地选取动力响应特征参数, 特别是如何定义结构响应的巨大变化, 很难有一个统一的标准.

5.3 Hsu 能量准则

这一准则是 Hsu C. S. (徐皆苏) 及其合作者所提出来的^[24,25], 它主要是通过研究动力系统在相平面内的运动轨迹来给出临界载荷的估计, 对于某个具体结构, 应用该准则可获得动力屈曲条件的上、下限.

Hsu 能量准则认为, 当系统总能量不再减小时, 它必然逼近某一临界点 P_0 , 它和载荷水平有关, 所有 P_0 构成一个函数空间, 如果随着时间 t , 系统达到 P_0 , 则认为是稳定的.

无疑, 当寻找确切的临界载荷值有困难时, 通过 Hsu 准则得到的临界载荷上、下界具有极大的意义, 然而必须注意到这种上、下界是一种保守的估计, 有时可能过分保守, 当必须使用数值方法时, 则可能丢掉一些平衡点. 另外 Hsu 只涉及到初始输入能量, 而不关心其分布, Johnson^[26]则研究了载荷分布形式的影响.

5.4 Simitses 总势能原理^[27, 28]

该准则认为临界屈曲条件和系统的总势能的特征直接相关，因为在总势能面上存在着一个与动能对应的轨迹曲线，即可以通过考查系统的总势能给出临界载荷值的估计。

Simitses 准则要求系统在一个静载荷作用下必须具有两个以上的平衡位置，这说明该准则只适用于后屈曲路径是不稳定的系统，如拱、圆柱壳等，对于杆、板一类的结构是不合适的，这一点和 $B - R$ 准则是类似的。另一方面，对于杆、板等结构如果认为当某个特征位移达到一规定值时，结构发生动态屈曲，推广了的 Simitses 准则也可以适用，Simitses 还将这个总势能原理推广到了静力预加载的结构。

5.5 时间冻结法

其基本思想是首先由动力分析给出应力场分布，然后假定是静态的（冻结时间），以所得的应力场做为前屈曲状态，再进行屈曲分叉分析。时间冻结法认为由屈曲前状态发展到屈曲状态的过程中，其应力是几乎不变的。

Akkas^[29]曾用此法解决了扁球壳的非轴对称屈曲问题，Butter^[30]对环向加肋圆柱壳进行分析时指出，该方法是保守的。总而言之，人们还未曾证明这样计算动力屈曲的合理性，尤其是这种保守的估计到底怎么接近真实解，全然不知。

5.6 王仁能量准则

由于 Lyapunov 方法在动力稳定性问题中的应用有一定的局限，Hoff 曾提出了有限时间内动力系统的稳定性准则：“一个系统称为稳定的，当在一段适当的时间内其构形足够地接近原始的平衡构形”。

王仁能量准则看来有类似的思路，王仁能量准则即有限时间内的塑性动力屈曲准则，其基本思想是^[31]：在一定冲击载荷作用下，若对于它所处基本运动的任何一个几何可能偏离，都必将使系统在此偏离过程中所吸收的能量大于载荷所做的功，则它的基本运动是稳定的，或者说对任何导致屈曲的相对于前屈曲运动的任何偏离，都将违背能量关系，则屈曲不发生。

王仁能量准则给出了稳定性的充分条件，这里恰当地选择动能项尤为关键。由于动能项始终为正，略去它（对于受轴向冲击的圆柱壳其动能已经证明为小量可以忽略），总能得到一个保守的稳定性条件，只是这样做有时可能过分保守。当完全忽略动能项时，所得到的临界参数估计仍可能有一定的价值，但其相应的屈曲模态可能已经面目全非了，这一点应尤为注意。

总结起来，王仁能量准则克服了放大函数法中人为因素的不足，可用于处理非保守系统的动力稳定性问题，特别是可用于讨论短时超强载荷作用下结构的塑性动力屈曲问题，且其形式简单，便于应用，具有较为鲜明的物理意义。

5.7 放大函数法

Goodier^[32]在对圆柱壳的塑性动力屈曲问题进行研究时广泛地使用了这一方法，他假定结构具有某种形式的初缺陷，这种初缺陷可以是结构的几何不完善或所加载荷不对称造成的，然后将初缺陷按振动模态展开成级数形式。通过运动方程的求解，可以得到未扰动部分解的具体形式，当初缺陷放大到规定值时所对应的载荷即为临界屈曲载荷，使用该准则可以方便地得到发展最快的占优模态（即屈曲模态），适用于短时超强载荷，对具有稳定后屈曲路径的结构也同样适用。但放大函数中必须至少有一个具有双曲函数的形式，若不能给出按指数形式增长的解，则该准则失效。

从本质上看放大函数法讨论的是结构初缺陷在冲击载荷作用下被激发的行为，然而这种方法有一定的局限性，一方面它将分叉问题简单地等同于一个刚度问题或动力响应问题去处理，

虽然不失为一个工程上实用的失效准则，但却掩盖了分叉问题的物理本质，另一个方面，放大倍数具有很大的随意性，人为给出的较大的放大倍数在分析塑性屈曲问题时，是否会使得 Shanley 不卸载假定不再成立，也是一个值得认真对待的问题。

5.8 准分叉理论

Lee 等^[33~37]在 70 年代末 80 年代初陆续发表了几篇文章，考虑了结构动态屈曲过程中的波动效应，他从波动方程、边界条件及波阵面上的相容条件出发，基于 Lyapunov 运动稳定性的一般概念，提出了一个有限时间内运动系统的稳定性判别准则，给出了一个扰动运动的泛函，若在临界时间 t_{cr} 以后，存在一个扰动运动使泛函取最大值，则将产生准分叉运动，问题最终化为求解一个经典的特征值问题，解出的特征值就是临界分叉时间。

Lee 又建立了连续体的动力准分叉理论：对于一个给定初始条件和边界条件的弹塑性体，如果存在一个非平凡扰动，使得扰动运动的泛函取极大值，则出现动力准分叉。

极值条件将一个确定是否存在动力准分叉的问题，归结为经典的特征值问题，通过变分法，即可得到特征值 t_{cr} 和特征位移场，Lee 还给出了采用增量法求取结构后分叉路径的方法和过程。

动力准分叉理论应用于杆的动力屈曲问题时，给出的屈曲模态和实验结果尚有一定差距，在弹塑性板壳问题中的应用等问题有待于进一步的研究，因此这一理论从其诞生之日起，绝大多数的研究者（甚至于 Lee 本人）都没有采用这一理论继续研究类似的问题。

5.9 朱兆祥应力波准则

朱兆祥等^[17,38,39]在研究理想弹性直杆中由于应力纵波的传播导致的动力屈曲问题时，提出了这一准则，其基本思想是横向运动方程有分叉解的条件，在小变形假定下的线性化问题中，就是要保证屈曲模态波幅既是非平凡解，又是不定解，即不但要求特征行列式等于零，而且要求它的全部元素的余子式都等于零，因此该准则又称为不确定性准则，同时给出了这一准则的几种不同的表达形式，特别地在文 [39] 中，对这一准则有了一个新的提法，即认为在所有可能的运动中，真实的发生屈曲的运动使归一化的模态变形能为极小。而其实质和前述的不确定性准则是一致的，只是换成了泛函提法。

应该指出，应力波引起的结构的屈曲问题目前理论上的分析只是初步的，考虑塑性和弯曲波的相互影响，如何建立一个合理的屈曲准则，在实验和理论两方面尚有艰巨的工作。

6 结束语

总的来看，动力屈曲已成为人们关心的热点之一，周期性载荷作用下结构的参数共振已有大量的研究，并取得了满意的效果，恒幅阶跃载荷及矩形脉冲载荷或其它冲击载荷作用下杆的动力屈曲问题也有很多研究，并从不同的角度建立了一些屈曲准则，但冲击载荷作用下板的动力屈曲问题还没有获得广泛和深入的研究，至于壳体结构，已有的研究主要集中在球壳和圆柱壳的动力屈曲问题上， $B-R$ 运动准则和放大函数法已被广泛接受和应用。

值得指出的是，在理想直杆动力屈曲问题的研究中考虑应力波效应的影响这一工作目前只是初步的，然而却是十分必要的，也许只有这样才能更好地理解动力屈曲问题中所谓“动力”的含义，同时，我们注意到，这一问题的研究目前存在着以下一些不足：

(1) 大都仅涉及弹性波且不考虑应力波在边界处的反射；屈曲局部化现象从本质上来讲是一个塑性动力屈曲问题，在动力屈曲问题中只计及弹性波的影响，就无法更好地把握屈曲局部化现象的本质。

(2) 理论分析上，都以半无限长杆为研究对象，并且将波阵面视为固定端约束的情形；事实上，杆都是有限长杆，因此，这样的理论分析方法混淆了半无限长杆和有限长杆在动力屈曲

问题中的区别（即使应力波在有限长杆的边界处没有发生反射）。

(3) 在对应力波引起的动力屈曲问题进行理论分析时，是否应计及横向惯性效应，人们尚未能达成共识；

(4) 大都仅考虑应力纵波的影响，未能计及动力屈曲问题中的弯曲波效应；

(5) 对于锤—杆类动力屈曲问题而言，由于轴向载荷形式较为复杂，问题将归结为关于非线性偏微分方程组解的讨论，至今仍未能得到一个理论上的解析解。

应力波在动力屈曲问题中的引入，较好地解释了实验观察到的屈曲局部化现象，但是由于增加了应力波传播距离这个参量，以及一般需要考虑弯曲波和压缩纵波的耦合，大大增加了求解的难度，特别是如果再计及应力波在边界处的反射，将使问题进一步复杂化，目前，我国在这方面的研究处于国际领先水平，但在此类问题的某些方面仍未能达成共识，尚需做进一步大量细致、艰巨的理论和实验分析工作，我们最近在这一方面作了一些有益的尝试^[45,46,48,50]。

目前在理论分析方面比较流行的是初缺陷法，这种方法从理论上初步探讨了动态屈曲发生的机理，预测的屈曲模态能与实验结果在一定程度上吻合，为理论上的进一步研究提供了一条途径，然而由于决定屈曲特性的是结构本身，而不是初缺陷是否存在，因此研究无初缺陷结构的动力屈曲问题，对于我们更准确地理解结构的冲击特性具有重要的意义，同时初缺陷法也没有考虑应力波对屈曲的影响，这是当前理论工作中急待解决的问题，对于应力波和动态屈曲的关系这一问题，国外的研究者极少涉足这一领域，L. H. N. Lee 虽然给出了屈曲判别准则，也考虑了应力纵波效应，但其所得结果与实验比较并不理想，国内对这一问题的研究相对较多，主要考虑的是应力纵波对屈曲的影响，大都仅涉及弹性波且不考虑应力波在边界处的反射，但在问题的某些方面尚未能达成共识，尚需在理论和实验两个方面做大量艰苦细致的工作。

华中理工大学顾王明等对流—固冲击载荷作用下圆柱壳的动力屈曲问题进行了许多研究，他们的研究工作理论上采用现有的分析方法，通过弹塑性圆柱壳撞水动力屈曲的实验研究，揭示了圆柱壳在这类流—固轴向冲击载荷作用下动力屈曲问题的一些基本特征。

D. Karagiozova 和 N. Jones^[44]则讨论了轴向冲击情形下弹—塑性直杆的动力屈曲问题，他们考虑了应力波效应的影响并进行了大量的数值计算，这一研究似乎是文 [47] 的一个副产品，但却从一个侧面揭示了屈曲、分叉和混沌之间可能存在着内在的联系。

关于圆柱壳受轴向冲击的塑性动力屈曲问题，到目前为止公开发表的文章不多，而且所研究的塑性屈曲仅限于均匀轴对称屈曲模态。韩铭宝、王仁等人对轴向冲击圆柱壳、充液圆柱壳及径向载荷和轴向冲击联合作用下圆柱壳^[4]的塑性屈曲问题进行过许多实验和理论研究，提出了第二失稳临界速度的概念，这一概念具有更为广泛的理论意义和工程应用背景。

Emil T. Dankov^[51]在讨论板的弹性动力屈曲问题时计及了大挠度—几何非线性效应的影响，他通过选取满足边界条件的挠度函数，得到了应力函数的表达形式，并对相应的非线性动力方程进行了数值计算。从其理论分析当中不难发现，对这一问题继续进行深入的研究，也许可以发现混沌运动。Weller^[52]等人则采用 ADINA 程序和有限差分方法对轴向冲击梁和板的动力屈曲问题进行了大量的数值计算，计及结构的初始几何缺陷，讨论了载荷持续时间对载荷放大因子的影响。

总的来看，近十几年来，屈曲问题的实验研究仍然主要采用电测方法；在数值计算方面，计及各种非线性效应的影响，采用大型有限元程序精细地分析屈曲和后屈曲过程是今后的一个发展方向；遗憾的是在屈曲问题的理论分析方面，特别是动力屈曲准则问题上至今未能形成一致的看法，在这种格局下，人们大都针对各种具体结构提出各自不同的研究方法，可以说屈曲理论特别是动力屈曲理论近十几年来一直处于一种停滞不前的状态。

最后我们认为, 在结构的动力屈曲研究中, 仍需进行大量的实验研究工作, 以帮助建立合理而实用的稳定理论和屈曲准则, 在这一方面, 国际上也处于一种等待突破的格局, 需要人们做出更大的努力. 同时, 由于屈曲、分叉和混沌之间存在着密切的联系, 因此, 从非线性的角度出发, 研究弹塑性系统由屈曲向混沌的演化具有十分重要的意义, 最近, 太原工业大学杨桂通教授领导的课题组发现在杆、板、壳、拱等基本结构单元中都存在着复杂的混沌运动^[42, 48, 49], 由此揭示出弹塑性系统的极端复杂性, 可以预计, 这一研究方向也将成为今后人们关注的一个热点.

参 考 文 献

- 1 Youngdahl C K. Correlation parameters for eliminating the effect of pulse shape on dynamic plastic deformation. *J Appl Mech*, 1970, 37: 744 ~ 752
- 2 朱国琦, 黄永刚, 余同希, 王仁. Estimation of the Plastic Structural Response under Impact. *Int J Impact Engng*, 1986, 4 (4): 271 ~ 282
- 3 Youngdahl C K. Interaction between pulse shape and strain hardening in dynamic plastic response. *Int J Impact Engng*, 1988, 7 (1): 55 ~ 70
- 4 韩铭宝, 杨青春. 在径向载荷和轴向冲击联合作用下的圆柱壳塑性稳定性分析. *应用力学学报*, 1994, 11 (2): 25 ~ 32
- 5 Abrahamson G R, Goodier J N. Dynamic Flexural Buckling of Rods within an Axial Plastic Compressive Wave. *ASME Journal of Appl Mech*, 1966, 33: 241 ~ 247
- 6 杨青春, 韩铭宝, 黄筑平, 王仁. 撞击在刚性靶上的圆柱壳稳定性实验研究. *固体力学学报*, 1985, 2: 170 ~ 181
- 7 Koiter W T. Elastic stability and post buckling behavior. Non - linear problem. R E Langer ed, Univ of Wisconsin Press, 1963
- 8 Budiansky B, Hutchinson J. Dynamic buckling of imperfection - sensitive structures. In: H Görtler ed. Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics. Springer - Verlag, Berlin, 1964: 636 ~ 651
- 9 Hutchinson J, Budiansky B. Dynamic Buckling Estimates. *AIAA Journal*, 1966, 4 (3): 525 ~ 530
- 10 Shanley F R. Inelastic Column Theory. *J Aero Sci*, 1947, 14: 261 ~ 267
- 11 Hutchinson J W. Plastic buckling. *Advances in Appl Mech*, 1974, 14: 67 ~ 144
- 12 Hutchinson J W, Koiter W T. Postbuckling theory. *Appl Mech Rev*, 1970, 23: 1353 ~ 1366
- 13 武际可, 苏先榭. 弹性系统稳定性. 北京: 科学出版社, 1994
- 14 Kao R. Asymmetric buckling of spherical caps with asymmetrical imperfections. *JAM*, 1971, 38 (1): 172 ~ 178
- 15 Jones N, dos Reis H L M. On the dynamic buckling of a simple elastic - plastic model. *Int J Solids Struct*, 1980, 16: 969 ~ 989
- 16 Karagiozova D, Jones N. Dynamic pulse buckling of a simple elastic - plastic model including axial inertia. *Int J Solids Struct*, 1992, 29 (10): 1255 ~ 1272
- 17 朱兆祥. 应力波引起的弹性结构的屈曲准则. 见: 余同希, 王大钧主编. 塑性力学和地球动力学文集, 庆贺王仁教授七十寿辰. 北京: 北京大学出版社, 1990, 56 ~ 70
- 18 韩强, 马宏伟, 张善元, 杨桂通. 影像云纹法在圆柱壳静态塑性扭转屈曲问题中的应用. *力学与实践*, 1995, 17 (6): 40 ~ 43
- 19 Movchan A A. The direct method of Liapunov in stability problems of elastic systems. *J Appl Math*, 1959, 23: 670 ~ 686
- 20 Movchan A A. Stability of processes with respect to two metrics. *J Appl Math Mech*, 1959, 24: 1506 ~ 1524
- 21 Knops R J, Wikes E W. On the stability of Continuous Systems. *Int J Engng Sci*, 1966, 4: 303 ~ 329
- 22 Leipholz H. Stability of Elastic Systems. Amsterdam: Leyden - Noordhoff, 1980
- 23 Budiansky B, Roth R S. Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow. NASA - TN - 1510, 1962, 597 ~ 609
- 24 Hsu C S. On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial condition. *Int J Eng Sci*, 1966, 4: 1 ~ 21
- 25 Hsu C S. Stability of shallow Arches Against Snap - Through under Timewise Step loads. *JAM*, 1968, 35: 31 ~ 39
- 26 Johnson E R, Mcivor I K. The effect of spatial distribution on dynamic snap - through. *JAM*, 1987, 45: 612 ~ 618
- 27 Simitse G J. Suddenly - loaded structural Configuration. *J Eng Mech Asce*, 1984, 110 (9): 1320 ~ 1334
- 28 Simitse G J. Effect of Static Preloading on the dynamic stability of structure. *AIAA J*, 1983, 21 (8): 1174 ~ 1180
- 29 Akkas N. Asymmetric buckling behavior of spherical caps under uniform step Pressure. *JAM*, 1972, 39: 293 ~ 294

- 30 Butter T A, Baker W E, Babcock C D. Structural dynamics. Impact and Vibration, Bulltion: 1986, 157~165
- 31 茹重庆. 冲击载荷下结构的塑性屈曲问题. [博士论文]. 北京: 北京大学力学系, 1988
- 32 Goodier J N. Dynamic plastic buckling. In: Herrmann G ed. dynamic stability of structure, 1967, 189~211
- 33 Lee L H N. Quasi - bifurcation in dynamics of elastic - plastic continua. *JAM*, 1977, 44: 413~418
- 34 Lee L H N. Dynamic buckling of an inelastic column. *Int J Solid and Struct*, 1981, 17: 271~279
- 35 Lee L H N. On dynamic stability and quasi - bifurcation. *Int J Nonlinear Mech*, 1981, 16: 79~87
- 36 Lee L H N. Quasi - bifurcation of rods within an axial plastic compressive wave. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, 45: 100~104
- 37 Lee L H N. Bifurcation and Uniqueness in dynamics of elastic - plastic continua. *Int J Engng Sci*, 1975, 13: 69~76
- 38 魏勇, 朱兆祥, 李永池. 轴向冲击载荷作用下直杆弹性动力屈曲的研究. 实验力学, 1988, 3 (3): 258~263
- 39 汤立群. 应力纵波引起的直杆屈曲准则及纵波与弯曲波的相互作用. [博士论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 1994
- 40 王仁. 结构的塑性静态稳定性, 见: 钱伟长主编. 非线性力学新进展. 武汉: 华中理工大学出版社, 1993, 4~35
- 41 诺曼 琼斯. 蒋平译. 结构冲击, 成都: 四川教育出版社, 1994
- 42 韩强, 张善元, 杨桂通. 横向载荷作用下弹性拱的混沌运动. 固体力学学报 (增刊), 1997, 18: 67~71
- 43 韩强, 张善元, 杨桂通. 直杆动力屈曲问题研究进展. 力学与实践, 1997, 19 (2): 6~11
- 44 Karagiozova D, Jones N. Dynamic elastic - plastic buckling phenomena in a rod due to axial impact. *Int J Impact Engng*, 1996, 18: 919~947
- 45 韩强, 马宏伟, 张善元, 杨桂通. 冲击扭矩作用下弹性圆柱壳中应力波导致的动力屈曲问题. 应用数学和力学, 1996, 17 (1): 1~8
- 46 马宏伟, 韩强, 张善元, 杨桂通. 受轴向冲击有限长弹性直杆中应力波引起的分叉问题. 爆炸与冲击, 1995, 15 (4): 300~306
- 47 Karagiozov V, Karagiozova D. Chaotic phenomena in the dynamic buckling of on elastic - plastic column under an impact. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 13 (7): 1~16
- 48 韩强. 几种结构的动力屈曲、分叉和混沌运动研究. [博士论文]. 太原: 太原工业大学, 1996
- 49 韩强, 张年梅, 张善元, 杨桂通. 非线性弹性矩形板横向微扰动时的混沌运动 (I). 太原工业大学学报. 1997, 28 (3): 15~18
- 50 韩强, 张善元, 杨桂通. 轴向矩形脉冲载荷作用下理想直杆中应力波及其反射导致的分叉问题. 力学学报已录用
- 51 Dankov Emil T. Dynamic buckling of long thin elastic plate under rapidly applied shear loading. *AIAA Journal*, 1995, 34 (8): 1752~1755
- 52 Tanchum Weller et al. Dynamic buckling of beams and plates subjected to axial impact. *Computers & Structures*, 1989, 32 (3): 835~851

ADVANCES IN RESEARCH FOR STATIC AND DYNAMIC BUCKLING OF STRUCTURES

Han Qiang

Institute of Vibration Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016

Zhang Shanyuan Yang Guitong

Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024

Abstract In recent years, the study of static and dynamic buckling is a very active research field. In this paper some fundamental problems such as buckling classification, characteristic of dynamic buckling and its characteristic parameters are summarized, the recent advances and the methodology are introduced, other related problems to be concerned about such as dynamic buckling criterion, model analysis and experimental technology are briefly discussed and reviewed.

Key words structure stability, bifurcation, static buckling, dynamic buckling, buckling criterion