第 28 卷 第 3 期 力 学 进 展 Vol. 28 No. 3
1998 年 8 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1998

不确定性振动凸集理论的研究 *

张景绘 何彩英
西安交通大学工程力学系，西安 710049

摘 要 评述了振动凸集理论的研究概况，就研究范畴、常用的概念、现有的方法和应用领域及进展情况作一全貌的介绍.

关键词 不确定振动，随机振动，凸集，地震响应

1 引 言

工程中的振动问题可根据它的三个环节——激励、系统和响应而归纳成四类：系统动力响应分析、系统识别、环境预测和振动控制. 无论是哪一类问题，只要它的一个环节具有不确定性，我们就称这种问题为不确定性振动问题. 描述不确定性振动的方法现在有确定性理论和随机振动理论（包括模糊随机理论）. 前者由于过多的使用经验数据而失去动力学概念，而后者是建立在概率论和随机过程的基础上的，但在某些情况下先验的概率结构的假定往往与实际相差甚远，又没有足够的样本数据确定概率表达式中的常数，因而导致动力学分析的可靠性差. 例如，按现行理论进行很好设计的结构在大阪 - 神户地震中毁坏；振动的不确定性因素导致多起航天结构的失事，这是两个最能说明问题的实例. 关于不确定性的非概率建模在控制论中早已有研究，Basile 和 Marro 在文献 [1] 中详细讨论了线性时不变系统的可达集，Milanese[2] 对应用集合隶属不确定性讨论动力学系统的最佳估计理论做过综述性评论. 近年来 Ben - Haim 和 Elishakoff[3,4] 等引进了凸集模型来讨论力学中的不确定性. 所谓集合模型，就是一个函数集合，这个集合中每个函数表示不确定性运动的一次实现，如果集合是凸的，则称凸集模型. 凸集模型能较全面地反映不确定性量，而且它需要的信息量较少.

在国内，对于不确定振动凸集建模的研究还处于开始阶段，尚未见到公开发表的论文.

振动凸集理论就是用凸集模型表示振动问题的某一不确定量，进而研究相应的振动问题. 它使用的数学工具是凸分析[5,6] 和微分包含[7～9] (differential inclusion). 本文就振动凸集理论的研究范围、常用的概念、现有的进展情况以及需要解决的问题作一全面的阐述.

研究范畴

根据工程振动的各类问题，我们可将振动凸集理论分成：不确定性（载荷、参数、响应）的凸集建模、振动响应的凸分析、振动参数的集合隶属识别以及振动的界限控制四个部分. 除

*国家自然科学基金与国家教委博士点基金资助项目
收稿日期：1996 - 07 - 23，修回日期：1997 - 11 - 08

此之外，稳定性问题也是振动凸集分析中不可缺少的一个内容.

2.1 振动响应的凸分析

先考虑一般的 n 自由度的时间连续的振动系统

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)), z(t_0) = z_0$$

其中 $z(t) \in E^{2n}$ 是状态向量，$f: E^{2n} \times E^r \to E^{2n}$ 是连续的. 输入信号 $u(t)$ 约束在 $\Omega \subseteq E^r$ 中. 当 Ω 是凸集时，求解状态向量的问题就称为振动响应的凸集分析. 对非线性问题，由于它的解集不一定具有凸性，因而目前还没有很好的结果. 这里我们主要考虑线性时不变系统.

考虑一个线性时不变的多自由度振动系统，它的运动微分方程为

$$\begin{aligned} &M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = B_0 u(t) \\ &x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $x(t) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^{\mathrm{T}}$ 是一个 n 维的位移向量，$u(t)$ 是一个 r 维的激振力（或称输入）向量，B_0 是 $n \times r$ 阶矩阵，M 是质量矩阵，C 和 K 分别是系统的阻尼矩阵和刚度矩阵. 如果 $u(t)$ 被限定在一个集合 Ω 中，即

$$u(t) \in \Omega \tag{3}$$

当 Ω 是凸集时，它的解集往往具有良好的性质，从而能避免讨论解的含义和存在性问题. 这种集合描述方法最早由 Drenick 和 Shinozuka[10～12]提出，并用于求结构的最大响应. 后来 Ben - haim 和 Elishakoff (1990)[3]对它进行了系统的归纳，并对式 (3) 提出了几种常用的凸集模型[4]. 对凸集建模的激振，其响应称为凸集响应. 在工程设计中，通常只对结构的最坏响应[4]感兴趣，因此 Ben - haim 等人对单自由度线性振动系统的最坏响应问题作了较全面的研究[3,4,13～15].

为了便于后面的讨论，现将方程 (2) 写成状态方程的形式

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ &u(t) \in \Omega \\ &z(0) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$z(t) = \begin{cases} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

2.2 振动界限控制

以线性时不变系统为例，振动控制问题可叙述如下. 系统方程为

$$\begin{aligned} &\dot{z} = Az + Bu + Hv \\ &z(0) = z_0 \end{aligned} \tag{6}$$

式中 z 可以是振动响应位移和速度组成的状态向量，但通常该方程是经减缩后的方程，z 的含义有别于 (4) 式中的 z，如可以是模态坐标中的状态向量. u 是激振力，v 是控制向量. 观测方程为

$$y = Cz \tag{7}$$

经典的 LQR 控制器的设计是求控制向量 u 满足性能指标

$$J_c = \int (z^{\mathrm{T}} Q z + v^{\mathrm{T}} R v)\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

取最小. 依靠选择加权矩阵 Q 和 R 来权衡被控制后响应指标和付出的代价.

所谓界限控制是对控制 v 定义一个集合, 使得被控制的量 z 在特定的集合内. 比如

$$\begin{aligned} v &= v_{\mathrm{c}} \in V_{\mathrm{c}} \\ V_{\mathrm{c}} &= \{ v_{\mathrm{c}} : \| Hv(t) \|_{\infty} \leq V_0 \} \end{aligned} \tag{9}$$

使响应 z 满足

$$\begin{aligned} z &= z_{\mathrm{c}} \in Z_{\mathrm{c}} \\ Z_{\mathrm{c}} &= \{ z_{\mathrm{c}} : \| z_{\mathrm{c}} \|_{\infty}^{W} \leq Z_0 \} \end{aligned} \tag{10}$$

式中 $\| z_{\mathrm{c}} \|_{\infty}^{W}$ 是加权无穷范数, W 为加权矩阵. 再比如

$$\begin{aligned} v &= v_{\mathrm{m}} \in V_{\mathrm{m}} \\ V_{\mathrm{m}} &= \{ v_{\mathrm{m}} : \| v \|_{\infty} \leq V_0 \} \end{aligned} \tag{11}$$

使性能指标

$$J = \| Wy \|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leq t \leq t_f} | Wy | _{\infty} \tag{12}$$

取最小, ess sup 是本性最大模, 这就是最小最大控制问题.

求解上述这些问题, 即处理控制集合、激励集合和响应集合之间的关系.

2.3 振动参数的集合隶属识别方法

动力学识别问题是由系统的输入和输出 (或仅有输出) 的完整或部分信息中研究输入和输出关系或关系中的某些参数的可能性和算法. 识别问题如表 1 所示.

表 1 参数识别方法

	点估计	集合隶属估计
估计量	状态变量 载荷谱 模型参数 传递函数 (确定的或随机的)	状态变量集合 模型参数集合 传递函数集合 ……
信息	模型结构 (整体或部分) 输入/输出的测量样本	先验信息 测量样本的集合
估计方法	· (加权) 最小二乘法 最大似然估计 贝叶斯估计 误差估计 滤波 (Kalman 滤波) 两点边值问题 ……	集合的 Chebycheff 中心和半径 插值法 动态规划 ……
估计精度	方差 置信区间 灵敏度分析 相关分析	收敛性 ……?

在经典的估计理论中只给定输入/输出 (或只有输出) 信息的一个样本, 令为 Y, 假定被识别的量为 a, 如果给定信息和被识别量 a 之间的关系为 $Y(a)$, 那么可定义残差函数 $\varepsilon(a) = Y - Y(a)$, 使用 $\varepsilon(a)$ 可以在最小二乘或最大似然率意义下估计 a 的估计值 $\hat{a}$. a 被估计后可以根据 Y 的测量噪声来估计 $\hat{a}$ 的精度. 如当 $\hat{a}$ 是无偏估计时在给定的置信度下计算 $\hat{a}$ 的置

信区间. 如表 1 的第一列所示. 由于被估计的参数是多维空间的一个点, 所以经典估计问题是一个点估计问题.

如果被估计的量 a 或取自实测的信息量 Y 具有某种程度的不确定性, 用一个集合来描述它们时, 那么这时的问题就是一个集合隶属识别问题. 如表 1 的第 2 列. 如果把不确定性量作为一个测量误差用一统计量来描述, 这时的识别问题仍属点估计.

2.4 稳定性概念

从广义上讲, 稳定性是表示动力学系统的输出或响应对初始扰动或输入以及参数扰动的反应能力. 在振动凸集理论中, 所讨论的稳定性概念仍然是在李亚普诺夫意义下的稳定性, 在一般的振动理论中主要讨论的所谓局部稳定性是在平衡位置附近或在周期轨道附近而言. 而在振动凸集理论中, 响应是一个集合, 所以稳定性是讨论响应集合对扰动引起的变化. 例如有界输入和有界输出的稳定性, 设 $u(t) \in \Omega$, $z(t) \in Z$, Z 是响应集合, 任意给定一个 $\varepsilon > 0$, 如果都存在一个 $\eta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} &u_\eta(t) \in \Omega_\eta,\ \Omega_\eta = \{ u_\eta(t) : \| u_\eta(t) - u(t) \| \le \eta,\ \dot{u}(t) \in \Omega,\ t \ge 0 \} \\ \Rightarrow &z_\varepsilon(t) \in Z_\varepsilon,\ Z_\varepsilon = \{ z_\varepsilon(t) : \| z_\varepsilon(t) - z(t) \| \le \varepsilon,\ z(t) \in Z,\ t \ge t_0 \} \end{aligned} \tag{13}$$

成立, 则称系统对输入集合的扰动是稳定的.

3 振动凸集理论的几个概念

3.1 载荷凸集模型

局部能量界限凸集[4]在每一时刻输入与参考输入的偏移能量是有界的, 而且这个能量界限可以是时变函数, 即

$$\Omega_{\mathrm{IEB}} = \{ u(t) : [u(t) - \bar{u}(t)]^{\mathrm{T}} [u(t) - \bar{u}(t)] \le \rho^2(t) \} \tag{14}$$

积分能量界限凸集[4]输入能量的积分是有界的 (Drenick, 1970; Shinozuka, 1970)[10,11], 其简化形式可表示为

$$\Omega_{\mathrm{IEB}} = \left\{ u(t) : \int_0 u^{\mathrm{T}}(\tau)\, u(\tau)\, \tau \le r^2(t) \right. \tag{15}$$

它与局部能量界限凸集模型有很大的不同, Ω_{IEB} 没有限制其元素的瞬态幅值, 而 Ω_{LEB} 中的元素, 其幅值在每一时刻都被约束着.

包络界限凸集[1,4], 在一段时间 $[t_1, t_2]$ 内输入向量函数的每个元素是有界的, 即

$$\Omega_{\mathrm{EB}} = \{ u(t) : u_j^{\mathrm{l}}(t) \le u_j(t) \le u_j^{\mathrm{u}}(t), j = 1, \cdots, r \} \tag{16}$$

其中 $u_j^{\mathrm{l}}(t)$, $j = 1, \cdots, r$ 是 $[t_1, t_2]$ 内的凸函数, $u_j^{\mathrm{u}}(t)$, $j = 1, \cdots, r$ 是 $[t_1, t_2]$ 内的凹函数.

频谱包络界限凸集[4]输入向量的每个元素的傅立叶变换的模是有界的, 即

$$\Omega_{\mathrm{FEB}} = \{ u(t) : | u_{\mathrm{F},j}(\omega) | \le \bar{u}_{\mathrm{F},j}(\omega),\ j = 1, \cdots, r \} \tag{17}$$

其中 $u_{\mathrm{F},j}(\omega)$ 是 $u(t)$ 的傅立叶变换, $\bar{u}_{\mathrm{F},j}(\omega)$ 是一个正的实函数.

响应谱包络界限凸集[4]用所有模态响应的界限表示 $u(t)$ 的集合, 即

$$\Omega_{\mathrm{RSE}} = \left\{ u(t) : \max_t | \eta_i(t) | \le S_{\mathrm{d}}(\omega, \xi_i),\ \omega_t \in F, i = 1, \cdots, n \right. \tag{18}$$

$\eta_i(t)$ 是第 i 阶模态响应, F 是频率范围, ξ_i 是模态阻尼比, $S_{\mathrm{d}}(\omega, \xi_i)$ 是位移反应谱.

椭球傅立叶界限凸集[16]是针对地震动加速度提出的，它采用地震工程中经常沿用的平稳化假定，用一个确定的时间函数 $I(t)$ 表示地震动加速度从出现、增强到减弱的过程，将地震动加速度 $\ddot{x}_g(t)$ 表示成

$$\ddot{x}_g(t) = I(t)\, x_0(t) \tag{19}$$

$x_0(t)$ 为平稳过程，$I(t)$ 采用下面的形式

$$\text{设} \quad I(t) = \begin{cases} (t/t_1)^2 & 0 \le t < t_1 \\ 1 & t_1 \le t < t_2 \\ e^{-\lambda(t-t_2)} & t_2 \le t \end{cases}$$

$$v(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(\tau)\sin k\pi\xi$$

Elishakoff **推得**

$$G_k(\tau) = A_k \Psi_k(\tau)$$

其中

$$\Psi_k(\tau) = \begin{cases} (\cosh(r_k\tau) - 1)/(1 - \beta_k) & \beta_k < 1 \\ \alpha_k^2\tau^2/2 \quad 2 & \beta_k = 1 \\ (\cos(r_k\tau) - 1)/(1 - \beta_k) & \beta_k > 1 \end{cases}$$

(ii) 凸性. 若 Ω 是凸集, 则可达集也是凸集.

(iii) 当 $t_1 < t_2$ 时, $\Gamma_{t_1} \subseteq \Gamma_{t_2}$.

由性质 (iii) 立即可推得

$$\Gamma_{t_1} = \Gamma_{[0,t_1]} \tag{26}$$

因此, 对具有零初始条件的线性时不变系统, 我们简单地用 Γ_T 表示它在 $[0, T]$ 的状态可达集.

本文作者[19]仿照状态可达集, 提出振动系统 (2) 或 (4) 的响应可达集的概念:

定义 3.3 对线性时不变振动系统 (2) 或 (4), 定义响应可达集为

$$R_T := \{ x \in E^n \mid x = x_u(T), x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, u(\cdot) \in \Omega \} \tag{27}$$

其中 $x_u(T)$ 表示输入为 $u(t)$, $t \in [0, T]$ 时, T 时刻的响应.

因此这里定义的响应可达集是指初始条件为零的情况下, 在 $[0, T]$ 内所有满足 $u(t) \in \Omega$ 的响应集合. 与状态可达集类似, 响应可达集也具有上述三个基本性质. 其中的性质 (iii) 表明了在 T 时刻的响应可达集包含了 T 时刻以前的所有时刻的响应可达集. 这一点非常有用, 它可以将求解 $[0, T]$ 内的响应集合简化为只求解 T 时刻的响应可达集. 如果系统 (4) 满足以下假定条件:

$$\operatorname{rank}[b_j \mid Ab_j \mid \cdots \mid A^{2n-1} b_j] = 2n, j = 1, \cdots, r \tag{28}$$

其中 b_j 表示矩阵 B 的第 j 列, 那么状态可达集和响应可达集分别是满的 $2n$ 维空间和 n 维空间中的实体.

4 线性时不变系统凸分析

线性时不变系统凸分析主要是研究对响应的求解, 求解响应不仅可以直接用模态叠加法[4,20], 而且可以在状态空间中求解. 用状态方程可以求解上面定义的状态可达集和响应可达集, 这方面的工作可类似于控制论中对约束控制的状态可达集的研究[21~31].

4.1 最坏模态响应的直接解法

Ben - haim[4]等提出了求解最坏模态响应的直接法, 它采用振型分解法并结合 Cauchy 不等式和 Cauchy - Schwarz 不等式得到了几种凸集载荷下的最坏模态响应. 但由于最坏模态响应较难转化为物理坐标下的最坏响应, 因此使用起来不太方便.

现以 (14) 表示的局部能量界限凸集模型为例, 设参考输入 $\bar{u}(t) = 0$. 最坏模态响应定义为

$$D_i^{\mathrm{mod}}(t) = \max_{u \in \Omega_{\mathrm{LEB}}} \eta_i(t) \tag{29}$$

其中 $\eta_i(t)$ 是模态位移, 利用 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &= \frac{1}{m_i \omega_{iD}} \int_0^t \phi_i^{\mathrm{T}} B_0 u(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{iD}(T-\tau) \mathrm{d}\tau \leq \\ &\frac{1}{m_i \omega_{iD}} \int_0^t \left| \phi_i^{\mathrm{T}} B_0 u(\tau) \right\| e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{iD}(T-\tau) \mid \mathrm{d}\tau \leq \\ &\frac{\sqrt{\phi_i^{\mathrm{T}} B_0 B_0^{\mathrm{T}} \phi_i}}{m_i \omega_{iD}} \int_0^t \left| \rho(\tau) \right| \left| e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{iD}(T-\tau) \right| \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{30}$$

其中 $\omega_i, \omega_{iD}, \xi_i$ 和 ϕ_i 分别为系统 (2) 的第 i 阶的固有频率，有阻尼固有频率，阻尼比和振型. 则最坏模态响应为

$$D_i^{\mathrm{mod}}(t) = \frac{\sqrt{\phi_i^{\mathrm{T}} B_0 B_0^{\mathrm{T}} \phi_i}}{m_i \omega_{iD}} \int_0 | \rho(\tau) | \left| e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{iD} (T - \tau) \right| \mathrm{d}\tau \tag{31}$$

当 $\rho(t)$ 为常数时，可以发现当 $xi_i > 0$ 时，$t \to o\infty$的最坏模态位移是最大的，即

$$D_i^{\mathrm{mod}}(\infty) = \frac{\rho \sqrt{\phi_i^{\mathrm{T}} B_0 B_0^{\mathrm{T}} \phi_i}}{m_i \omega_{iD}} \frac{1 + \exp(-\pi \xi_i / \sqrt{1 - \xi_i})}{1 - \exp(-\pi \xi_i / \sqrt{1 - \xi_i})} \tag{32}$$

4.2 单自由度系统的最坏响应

对单自由度系统，本文作者给出了一类载荷模型的最坏响应[16]. 当受有 (19) 表示的地震激励时，它的响应可表示为

$$x(t) = -\int_0 I(\tau) D^{\mathrm{T}} \phi(\tau) h(t - \tau) \mathrm{d}\tau = -D^{\mathrm{T}} \phi_1(t) \tag{33}$$

其中 $h(t)$ 是单位脉冲响应函数，$\phi_1(t)$ 表示为

$$\phi_1(t) = \int_0 I(\tau) \phi(\tau) h(t - \tau) \mathrm{d}\tau$$

根据仿射函数的极值定理[30]：如果 f 是一个仿射函数，S 是紧集，那么在紧集 S 上和在它的凸包 $\mathrm{ch}(S)$ 上 f 将取得相同的极值 (最大值和最小值).

由以上定理可以推出，对于向量 D 的线性函数 $x(t)$，在凸集 Ω_{EFB} 上的极值一定取在 Ω_{EFB} 在极点集上. 因此，对凸集 Ω_{EFB}，我们来构造它的极点集 E_{EFB}

$$E_{\mathrm{EFB}} = \{ D : D^{\mathrm{T}} W D = R^2 \} \tag{34}$$

为求得结构的最坏响应，我们利用 Lagrange 乘子法构造一个目标函数 J

$$J = D^{\mathrm{T}} \phi_1(t) + \lambda (D^{\mathrm{T}} W D - R^2) \tag{35}$$

J 取极值的条件是

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial D} &= \phi_1(t) + 2\lambda W D = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= D^{\mathrm{T}} W D - R^2 = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

由 (36) 可求得最坏响应

$$X_{\mathrm{W}} = \max_t \left| D_{\mathrm{m}}^{\mathrm{T}} \phi_1(t) \right| = \max_t R \sqrt{\phi_1(t) W^{-1} \phi_1(t)} \tag{37}$$

这就是单自由度系统对椭球傅立叶界限凸集模型的最坏响应的精确解.

4.3 状态可达集的 Lyapunov 估计法

从 70 年代初开始，很多学者研究了寻找可达集的方法，如 Summers (1985)[21]等人用不同的方法研究了可达集，对三维以下的问题，一般地说可以通过描述可达集的边界点来确定可达集. 而对三维以上的问题还没有找到一种精确描述可达集的方法. 不过 Grantham (1980,

1981)[22,23]提出了一种估计可达集的 Lyapunov 法，它是通过对系统（1）找出一个 Lyapunov 函数，当它满足某种条件时，即可估计出包含可达集的一个集合．它可以描述为下面的形式：

对系统（1），如果存在一个 C^1 函数 $V: E^{2n} \to E^1$，和一个实数 V^*，满足下面的条件：

(1) $V(0) < V^*$

(2) 对所有大于 V^* 的实数 k，都有：$\{z \in E^{2n} \mid V(z) \leq V^*\} \subset \{z \in E^{2n} \mid V(z) \leq k\}$

(3) $\{z \in E^{2n} \mid \dot{V}(z,u) \geq 0, u \in \Omega\} \subseteq \{z \in E^{2n} \mid V(z) \leq V^*\}$

其中 $\dot{V}(z,u) = \partial V(z)/\partial z \cdot f(z,u)$，那么从原点出发的状态可达集一定包含在集合 $\{z \in E^{2n} \mid V(z) \leq V^*\}$ 中．

然而，对于一般的非线性系统，我们很难找到一个合适的 Lyapunov 函数．对线性系统，虽然能用上面的方法，但它往往只能得到一个比较保守的估计，而 Gayek（1986）[24]提出了一种更好的估计方法．

4.4 状态可达集的外平行多面体估计法

Gayek（1986）[24]建议了一种估计线性系统从原点出发的可达集的外平行多面体估计法，它是基于模态分解的技术将状态方程解耦，形成若干个能求解的一维或二维的子系统，然后再变换到原系统的状态空间中即可得到包含原系统可达集的 $2n$ 维平行多面体近似．

对线性时不变系统（4），假定 A 可块对角化．设 Ω 为

$$\Omega = \{u \in E^r \mid -\infty < u_j^{\min} \leq u_j \leq u_j^{\max} < +\infty, u_j^{\min} < 0 < u_j^{\max}, j = 1, \cdots, r\} \tag{38}$$

现在作变换 $z' = Lz$，L 是可逆实阵，使得 LAL^{-1} 为块对角阵，其中的每一个块要么是一个实数，要么是一个 2×2 的实阵．变换后的方程为

$$\dot{z}' = LAL^{-1}z' + LBu = \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_l & & \\ D & & & a_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_s \end{bmatrix} z' + LBu \tag{39}$$

其中 $A_1, \cdots, A_l$ 是 2×2 的实数阵，$a_1, \cdots, a_s$ 是负实数，且 $2l + s = 2n$．将（39）从原点出发的可达集记为 Γ'．

接下来要找各个子系统的可达集．对 $j = 1, \cdots, l$ 的子系统可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z'_{2j-1} \\ z'_{2j} \end{bmatrix} = A_j \begin{bmatrix} z'_{2j-1} \\ z'_{2j\ 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{2j-1} \\ v_{2j} \end{bmatrix} \tag{40}$$

对 $k = 1, \cdots, s$ 的子系统可表示为

$$\frac{\mathrm{d}z'_{2l+k}}{\mathrm{d}t} = a_k z'_{2l+k} + v_{2l+k} \tag{41}$$

其中 v_i，$i = 1, \cdots, 2n$ 是相互独立的分段连续函数，它被限定在如下的区域内

$$\min_{u \in \Omega} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{r} l_{ik} b_{kj} u_j \leq v_i \leq \max_{u \in \Omega} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{r} l_{ik} b_{kj} u_j \tag{42}$$

这样，z 的各个分量的可达集的闭集用 $\Gamma'_{z'_i} = [z_i^{\min}, z_i^{\max}]$，$i = 1, \cdots, 2n$ 表示，那么 Γ' 就可

以用一个包含它的 $2n$ 维立方体 $\boldsymbol{\Gamma}' = \boldsymbol{\Gamma}'_{z'_1} \times \boldsymbol{\Gamma}'_{z'_2} \times \cdots \times \boldsymbol{\Gamma}'_{z'_{2n}}$ 来近似.

最后利用线性逆变换 $z = L^{-1} z'$, 将 $\partial \boldsymbol{\Gamma}$ 的 $2n$ 对平行的超平面映射到 z - 空间中的 $2n$ 对平行超平面, 由这些平行超平面围成的平行多面体即是原系统的可达集 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的近似.

4.5 响应可达集的支撑超平面法

本文作者[19]对一类凸集模型

$$\boldsymbol{\Omega} = \{ u(t) \in E^r : u_j(t) \mid \leq \bar{u}_j, j = 1, \cdots, r\} \tag{43}$$

其中 $\bar{u}_j$, $j = 1, \cdots, r$ 是常数, 提出了求解线性时不变 (LTI) 振动系统的响应可达集的支撑超平面法. 由于集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 满足对称性和凸性, 根据响应可达集的性质, 响应可达集 R_T 也满足对称性和凸性. 因此, 我们可得到振动系统 (2) 的最坏响应一定取在响应可达集的边界上.

任意给定一个向量 $c \in E^n$, 那么在方向 c 上, 凸集 R_T 的支撑超平面可表示为

$$c^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\xi} = v$$

其中 $v = c^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\xi}_c^*$, 而 $\boldsymbol{\xi}_c^*$ 是支撑超平面与 R_T 的切点. 不失一般性, 我们取 $\| c \|_2 = 1$, 在给定的方向 c 上, R_T 的支撑超平面是唯一的, 因此也对应着唯一的一个边界点 $\boldsymbol{\xi}_c^*$. 当 R_T 未知时, 首先确定某一方向上的支撑超平面, 找到对应的边界点, 通过在若干个方向上重复这一过程, 就可粗略地确定响应可达集的形状. 下面就提出在给定方向上确定响应可达集边界点的支撑超平面法.

根据支撑超平面的定义, 可达集 R_T 在 c 方向上的边界点一定是使得 $c^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\xi}$ 取最大值的 $\boldsymbol{\xi}$, 其中 $\boldsymbol{\xi} \in R_T$. 这可以描述成下面的支撑超平面问题:

$$\begin{aligned} &\max\ c^{\mathrm{T}} x(T) \\ &M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = B_0 u(t) \\ &x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \\ &u(t) \in \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \tag{44}$$

将 n 维向量 c 扩充为 $2n$ 维向量 $\bar{c}$

$$\bar{c} = \{ c_1 \ \cdots \ c_n \ 0 \ \cdots 0 \}^{\mathrm{T}}$$

其中 c_i 是向量 c 的第 i 个元素. 这时问题 (44) 可等价为下面的 $2n$ 维支撑超平面问题:

$$\begin{aligned} &\max\ \bar{c}^{\mathrm{T}} z(T) \\ &\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \\ &\dot{z}(0) = 0 \\ &u(t) \in \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \tag{45}$$

这个优化问题的解可由下面的支撑超平面定理得到:

定理 4.1[25] 当且仅当 $u^*(t)$ 满足

$$u_j^*(t) = \bar{u}_j \operatorname{sign}(\bar{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}(T, t) b_j), j = 1, \cdots, r, \quad t \in [0, T] \tag{46}$$

时, T 时刻的状态 $z_u^*(T)$ 使得问题 (45) 的性能指标最大. 其中 b_j 表示矩阵 B 的第 j 列, $\boldsymbol{\Phi}(\cdot, \cdot)$ 是式 (4) 所描述系统的转移矩阵.

在式（28）的假定下，(46) 中的奇异情况能够避免. 这样，支撑超平面问题（45）的最大性能指标可表示成

$$\text{的} \qquad v = \overline{c}^{\mathrm{T}} z^{*}(T) = \sum_{j=1}^{r}\left\{ \overline{u}_j \int_0^T | \overline{c}^{\mathrm{T}} e^{A(T-\tau)} b_j | \, \mathrm{d}\tau \right. \qquad - \qquad (47)$$

而 T 时刻的状态可达集边界点为

$$z^{*}(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u^{*}(\tau) \, \mathrm{d}\tau \qquad (48)$$

由 $z^{*}(T)$ 即可得到 T 时刻响应可达集 R_T 的边界点 $x^{*}(T)$，即

$$x_i^{*}(T) = z_i^{*}(T), \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (49)$$

因此我们称式（46）的激振为最坏激振.

5 参数隶属识别方法

Milanese[2]建议了集合隶属识别问题的一般框架. 令 Λ, G 为两个线性赋范空间，定义求解算子 S 为从 Λ 到 G 的映射，即

$$S: \Lambda \to G$$

Λ 是包含 λ 的问题空间，G 是解空间. 这样定义的目的是用信息 $\lambda \in \Lambda$ 来估计 G 中元素 $S(\lambda)$. 可利用的信息一般有两种，一种是用定义在 Λ 空间的子集 K 表示的先验信息.

$$\lambda \in K = \{\lambda \in \Lambda : \| S(\lambda - \lambda_0) \| \leq 1\}$$

另一种是与 λ 有关的可测量，它可用 λ 的一个函数 $F(\lambda)$ 来表示，F 将 Λ 映射到一个线性赋范空间 Y 中，它的元素用 y 表示. 由于 y 存在着某种不确定性，因此将它表示为

$$y = F(\lambda) + \rho$$

其中 ρ 反映了不确定量，可用一个正数 ε 限定

$$\| y - F(\lambda) \| = \| \rho \| \leq \varepsilon$$

现分别引进空间 Y, Λ, G 中的三个集合：

$$MUS_y := \{\tilde{y} \in Y : \| \tilde{y} - y \|_{\infty}^{W} \leq \varepsilon\}$$

$$FPS_y := \{\lambda \in K \subset \Lambda : \| y = F(\lambda) \|_{\infty}^{W} \leq \varepsilon\}$$

$$FSS_y := S(FPS_y)$$

那么参数隶属识别问题首先需要找到一个估计算法 $\phi: Y \to G$，使

$$\phi(y) \approx S(\lambda) \qquad (50)$$

然后评价估计的好坏，评价指标可选为

$$E(\phi) = \sup_{y \in Y} \sup_{\lambda \in FPS_y} \| S(\lambda) - \phi(y) \|_{\infty} \qquad (51)$$

通过使 $E(\phi)$ 取最小就可得到总体最优估计.

求解上述问题的方法有中心算法和插值算法，曾应用到单输入和单输出时不变离散时间系统的脉冲响应序列的估计中.

6 结束语

(1) 振动凸集理论是动力学中的一个新分支，平行于随机振动理论. 它还在建立和发展之中，有很多新问题尚在提出中. 即使是上述各节介绍的问题，多数还没有解决. 例如，不确定性凸集模型的建立，如果有较多的信息反映在凸集模型中，则分析的结果就更接近于实际，否则就会给出一个非常保守的结果，以致不能应用到实际设计中，或造成设计的系统非常昂贵.

(2) 最坏响应的计算是振动凸集理论应用到工程中的一个关键点，更精确的可达集计算决定了最坏响应计算的精度，详细讨论可达集计算方法并与现有的随机振动理论比较，将有大量的题目要做.

(3) 振动控制问题和参数及状态估计问题在过去的振动理论中是两个相关的不同问题，而在集合论范围内，应用集合隶属估计求最优控制表现了很好的前景，但寻找的控制律一定是非线性控制律.

(4) 非线性系统响应集合的分析和性质还没有涉及到，因为响应集合一般是非凸的，具有更复杂的性质.

(5) 本文题目确定的目标应该是工程问题. 大量的应用工程题目还需在发展中进一步研究.

参 考 文 献

1 Basile G, Marro G. Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1992

2 Milanese M, Vicino A. Optimal estimation for dynamic system with set membership uncertainty: An overview. *Automatica*, 1991, 27: 997～1009

3 Ben-Haim Y, Elishakoff I. Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1990

4 Ben-Haim Y, Chen G D, Soong T T. Maximum structural response using convex models. *Journal of Engineering Mechanics*, 1996, 122 (4): 325～333

5 刘光中. 凸分析与极值问题. 北京: 高等教育出版社, 1991

6 寇述舜. 凸分析与凸二次规划. 天津: 天津大学出版社, 1994

7 Dontchev A, Lempio F. Difference methods for differential inclusions: a survey. *SIAM Review*, 1992, 34 (2): 263～294

8 Veliov V. Second-order discrete approximation to linear differential inclusions. *SIAM J Numer Anal*, 1992, 29 (2): 439～451

9 Wolenski P R. The exponential formula for the reachable set of a Lipschitz differental inclusion. *SIAM J Control and Optimization*, 1990, 28 (5): 1148～1161

10 Drenick R F. Model-free design of seismic structures. *Journal of Engineering Mechanics Division. Proceeding of the ASCE*, 1970, 96, EM4: 483～493

11 Shinozuka M. Maximum structural response to seismic excitations. *Journal of Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, 1970, 96, EM5: 729～738

12 Drenick R F, Yun C B. Reliability of seismic resistance predictions. *Journal of the structural Division, Proceeding of the ASCE*, 1979, 105, ST10: 1879～1891

13 Michalopoulos C D, Riley T A. Response of discrete linear systems to forcing functions with inequality constraints. *AIAA Journal*, 1972, 10 (8): 1016～1019

14 Ben-Haim Y. Fatigue lifetime with load uncertainty represented by convex model. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1994, 120 (3): 445～462

15 Ben-Haim Y. Convex models of uncertainty in radial pulse backling of shells. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1993, 60: 683～688

16 何彩英, 张景绘. 地震响应的凸集分析. 应用数学和力学, 1997, 18 (10): 879～884

17 Ben-Haim Y, Elishakoff I. Non-Probabilistic models of uncertainty in the nonlinear buckling of shells with general imperfections: theoretical estimates of the knockdown factor. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1989, 56: 403～410

18 Kirkpatrick S W, Holmes B S. Effect of initial imperfections on dynamic buckling of shells. *Journal of Engineering Mechanics, ASME*, 1989, 115 (5): 1075～1093

19 何彩英，张景绘. 多自由度振动系统的一类凸集响应. 力学学报，1997，29（5）：530～539
20 Youssef N A N，Popplewell N. The maximum response of discrete multi - degree - of - freedom systems. *Journal of Sound and Vibration*，1979，64（1）：1～15
21 Summers D. Lyapunov approximation of reachable sets for uncertain linear systems. *Int J Control*，1985，41（5）：1235～1243
22 Grantham W J. Lyapunov - stackelberg estimates for reachable sets. 19th IEEE Conf Decision and Control，December 1980. 789～790
23 Grantham W J. Estimating reachable sets. *Journal of Dynamic Systems，Measurement and Control，Transactions of the ASME*，December 1981，103：420～422
24 Gayek J E. Approximating reachable sets for a class of linear control systems. *Int J Control*，1986，43（2）：441～453
25 Graettinger T J，Krogh B H. Hyperplane method for reachable state estimation for linear time - invariant systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*，1991，69（3）：555～588
26 Vinter R. A characterization of the reachable set for nonlinear control systems. *SIAM J Control and Optimization*，1980，18（6）：599～610
27 Gayek J E，Vincent T L. On the asymptotic stability of boundary trajectories. *Int J Control*，1985，41（4）：1071～1086
28 Schlaepfer F M，Schweppe F C. continuous - time state estimation under disturbances bounded by convex sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*，1972，AC - 17（2）：197～205
29 Bertsekas D P，Rhodes I B. Recursive state estimation for a set - membership description of uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*，1971，AC - 16（2）：117～128
30 Glover J D，Schweppe F C. Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances. *IEEE transactions on Automatic Control*，1971，AC - 16（5）：411～423
31 Panasyuk A I. Equations of attainable set dynamics，part 1：integral funnel equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*，1990，64（2）：349～366
32 Kelly P I，Weiss M L. Geometry and convexity，A Study in Mathematical Method. New York：Wiley，1979

RESEARCH ON CONVEX-SET THEORY OF UNCERTAIN VIBRATION

Zhang Jinghui　　He Caiying
Department of Engineering Mechanics，Xi'an Jiaotong University，Xi'an　710049

Abstract　In this paper，an outline on vibration convex - set theory，including its research area，common concepts，existing methods，applications and the development trend，is reviewed.

Keywords　uncertain vibration，random vibration，convex set，seismic response