第 27 卷 第 4 期
1997 年 11 月 25 日

力 学 进 展
ADVANCES IN MECHANICS

Vol. 27 No. 4
Nov. 25, 1997

自适应有限元方法及其工程应用

郭书祥
空军工程学院力学教研室，西安 710038

摘要 自适应有限元方法是一种能通过自适应分析自动调整算法以改进求解过程的数值方法. 它以常规有限元法为基础，以误差估计和自适应网格改进技术为核心，是一种效率高、可靠性高的计算方法. 文中简要介绍并综述了自适应有限元方法的重要发展及应用情况. 并对其发展前景作了概要的预测.

关键词 有限元方法（FEM），误差估计，自适应改进，最优离散化

1 引 言

60 年代初期，有限元方法随着计算机技术的快速发展而诞生. 并逐步发展成为工程中应用最为广泛的数值方法. FEM 和其它任何近似数值方法一样，都存在算法的可靠性和有效性问题. 有限元分析结果的可靠性和分析效率的研究一直伴随着 FEM 的发展. 有限元分析结果的误差可能来自分析过程的各环节. 其中一个主要的误差来源是模型的离散化. 有限元网格剖分的质量对分析结果的精度有着决定性影响. 在早期的常规有限元分析中，分析者通常根据经验、直觉甚至猜测进行网格剖分. 然后凭直观或简单判断近似结果是否合理. 如果不合理，则需重新进行网格设计. 其分析效率和可靠性都较低，而基于有效误差估计的自适应 FEM 是由计算机根据得到的误差信息决定解是否有足够的精度. 若误差过大，计算机可进一步自动地进行满足精度要求的网格改进. 因此，原则上只需定义一种描述问题几何特性的初始网格及可接受的误差水平，计算机可自动产生能实现这一有效水平的网格. 显著提高了分析效率和结果的可靠性.

自适应 FEM 最早始于 70 年代初期. Oliverira[1]等于 1971 年通过极小化能量利用最优结点分布讨论了网格的优化问题. 所提出的网格重分布方法成为移动结点法的基础. 之后于 70 年代中期，Oliverira 进一步创造性地提出在应变能密度变化最大的区域加密网格或增设插值函数的高阶自由度. 开创了最优离散化的研究. 70 年代后期，Peano[2,3]提出用叠层细分构造混合阶插值，给出了非常有用的叠层 p 型单元族. 80 年代，Szabo[6]成功地将叠层单元法用于离散网格的设计. Zienkiewicz[7,8]等在此基础上利用简单的 h-加密和在整个区域均匀增加 p，通过实例研究了 h-和 p-组合法的精度和有效性问题. Oden[9,10]等也进一步研究了 p-改进和 h-加密的组合方法. 旨在以最少的参数达到所需的精度.

有限元离散误差的估计是评估分析精度的依据，也是进行自适应改进的基础，许多学者作了大量而广泛的研究，提出了很多不同的估计方法．早期的“前”误差估计基于对解的特性的认识，提供当自由度趋于无限时收敛的有关信息．但通常不提供解的实际误差．所以，人们更感兴趣的是“后”误差估计．后误差估计技术最早出现于 60 年代末期．70 年代，Turcke[11]等通过极小化总势能和极大化应变能建立了评估离散误差的基本框架．Bab uska[13]等针对线性椭圆问题提出了一种数学上严格的基于残值的误差估计技术，给出了误差的界限，并用局部误差指标定义了最优网格．80 年代以后，Zienkiewicz[14,15]等人在误差估计方面作了大量富有成效的工作．他们提出通过局部应力场的结点插值或最小二乘拟合求取非连续有限元应力场的平滑应力，并由能量范数度量的两应力场间的差值表示离散误差．Ainosworth[16]等曾证明了此法的有效性．这一有效方法已被人们所广泛采用．近年来，Choudhardy[17]等将此法推广用于多种材料的组合结构的位移有限元误差估计，使得此法的适用性更加广泛．此外，Oden[5,9,10,19]等人在 *h-p* 法的误差估计和自适应性方面作了大量工作，成功地将其用于各类问题的分析．80 年代以后，自适应 FEM 方面的研究成果很多，发展极为迅速．

2　有限元分析中的自适应方法

自适应性一般定义为，按现时条件检查后为满足确定需要的调整过程．自适应 FEM 是一种能自动调整算法以改进求解过程的数值方法．包括多种技术．其中主要的有：误差估计、自适应网格改进、非线性问题中载荷增量的自适应选取及瞬态问题中时间步长的自适应调整等．目前，应用中的自适应 FEM 包括以下几类：

(1) *h*-加密 (*h*-enrichment)：此法是不改变插值函数的阶次，仅基于局部网格加密，提高求解的精度．其代表为分级剖分法 (HR)．此法概念上简单、直观．且易于程序实现．

(2) *p*-改进 (*p*-refinement)：不改变网格大小部局，仅增加局部插值函数的阶次．以降低求解误差，其代表为叠层单元 (hierarchical element) 法[4,5,18]．此法中形函数是采用叠层形式分层叠加的．当增加高阶形函数时，其低阶项不作修改．因而可避免重新形成刚阵．可方便地在所需的地方增设高阶自由度．*p*-法虽不如 *h*-法直观，但其收敛效率通常优于 *h*-法．

(3) 移动结点法 (*r*-法)：此法不改变单元类型和单元数目，因而，单元自由度数保持不变，通过改变单元形状减小离散误差．由 Miller[5]等人提出，并作过大量研究．

(4) 组合法：如 *h-p* 法、*r-p* 法等．较常用的 *h-p* 是同时进行网格加密和增加插值函数阶次，以提高求解的精度．*h-p* 自适应方法是一种最先进的方法，它能提供指数率收敛速度，这在实际工程问题的分析和计算机仿真中非常有意义，然而此法也是应用中最困难的方法，有许多问题正在研究之中．

目前的自适应有限元分析系统主要拥有如下基本功能：

(1) 基本单元库和方程求解，其功能是提供物理问题分析所需单元和平衡方程的求解方法．包括依据自适应网格改进技术，进行迭代求解的重分析方法．

(2) 误差估计．用于评估有限元模型的精度和模型改进．

(3) 模型自适应改进．其功能是基于前次分析结果设计下次改进的网格．

(4) 网格自适应生成，其功能包括自动生成初始网格和根据自适应分析结果自动生成改进网格及结点重新编号.

3 离散误差的估计

3.1 p-法的误差估计

假设低阶单元有一 n 个参数的解

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i = [N^{(n)}]\{a^{(n)}\} \tag{1}$$

并满足刚度方程

$$[k_{(n)}]\{a^{(n)}\} = \{f^{(n)}\} \tag{2}$$

在此基础上增设高阶自由度，引入另外 m 个叠层参数，其有限元解为

$$u_{n+m} = \sum_{i=1}^{n+m} N_i a_i = [N^{(n+m)}]\{a^{(n+m)}\} \tag{3}$$

且满足

$$[k_{(n+m)}]\{a^{(n+m)}\} = \{f^{(n+m)}\} \tag{4}$$

这种改进修正的相对误差为

$$e_{n,m} = u_{n+m} - u_n \tag{5}$$

在采用叠层形函数增加高阶自由度时，其低阶形函数是相同的，因而低阶刚阵元素不变. $\{a^{(n)}\}$ 可由 (2) 式求得. 从而，由 (4) 式有

$$\{a^{(m)}\} = [k_{(m)}]^{-1}\left(\{f^{(n)}\} - [K_{(m,n)}]\{a^{(n)}\}\right) \tag{6}$$

于是，可通过引进一定的新自由度数解出误差的近似变化.

$$e_{n,m} = [N^{(m)}][k_{(m)}]^{-1}\left(\{f^{(m)}\} - [K_{(m,n)}]\{a^{(n)}\}\right) \tag{7}$$

易得

$$e_{n,1} = N_{n+1} a_{n+1} = \frac{f_{n+1} - k_{n+1,n} a_n}{k_{n+1,n+1}} N_{n+1} \tag{8}$$

在自适应过程中，一般采用能量范数度量误差的变化. $e_{n,1}$的范数为[5]

$$\| e_{n,1} \|^2 = \frac{(f_{n+1} - k_{n+1,n} a_n)^2}{k_{n+1,n+1}} \tag{9}$$

令

$$\eta_{n+1}^2 = \| e_{n,1} \|^2 \tag{10}$$

η 称为误差指标. 由它可近似知道通过引进一新的自由度 n + 1, 可消去多少误差.

3.2 应力平滑误差估计 (Z^2 法)

在自适应网格加密中, 一般采用以应力形式表示的能量范数误差估计, 并同应力平滑方法相结合. 此法由 Zienkiewicz 和 Zhu[8,14,15] 等提出, 也称为 Z^2 法.

应力形式的估计误差为

$$e_h = \sigma - \sigma^h \tag{11}$$

其中, σ^h 为对某确定网格用有限元分析解得的应力. σ 为相应的精确应力解. 有限元分析是一种近似计算, 通常难以得到精确解. 令 σ^* 为整体平滑的连续应力场, 将其作为"精确"应力, 即取

$$\sigma = \sigma^* \tag{12}$$

σ^* 可由平滑结点应力 $\bar{\sigma}^*$ 通过形函数插值得到[8,14]

$$\sigma^* = N\bar{\sigma}^* \tag{13}$$

为保证 σ^* 和 σ^h 预测值一致, 令

$$\int_\Omega N^T(\sigma^* - \sigma^h)\,d\Omega = 0 \tag{14}$$

其中积分对整个求解区域 Ω 进行. 从而

变
$$\bar{\sigma}^* = \left(\int_\Omega N^T N\,d\Omega\right)^{-1} \int_\Omega N^T \sigma^h d\Omega \qquad a \tag{15}$$

于是可得 σ^*. 能量范数误差为

$$\| e_h \|^2 = \int_\Omega (\sigma^* - \sigma^h)^T D^{-1} (\sigma^* - \sigma^h)\,d\Omega \tag{16}$$

其中 D 为弹性矩阵.

用 (15) 式求 $\bar{\sigma}^*$ 时, 需对矩阵求逆. Stanley 等曾提出过一种简单处理.

$$\bar{\sigma}^* = \sum_{i=1}^{m} V_i \sigma_i^e \Big/ \sum_{i=1}^{m} V_i \tag{17}$$

其中 V_i 为单元 i 的面积或体积. σ_i^e 为由高斯点应力求得的 i 单元结点应力. m 为联结该结点的单元总数.

以上是将 σ^* 作为"精确"应力的. 其精确程度对误差估计的精度有较大影响. Zienkiewicz 和 Zhu[15] 于 1992 年提出了一种通过后处理复原过程得到更精确应力场的方法. 假设 σ^* 可表为所考虑结点周围单元的 p 阶多项式. 即

$$\sigma_p^* = Pa \text{ 且 } \bar{\sigma}^*(x,y) = \bar{\sigma}_p^*(x,y) = P(x,y)a \tag{18}$$

其中 P 为 p 阶多项式各项组成的向量. a 为待定系数集, 由一列采样点的最小二乘拟合确定.

$$F(a) = \sum_{i=1}^{N} \sigma^h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i)^2 \tag{19}$$

这里 $N=\sum_{j=1}^{NE} S_j$ 为采样点数，(x_i, y_i) 为样本点的坐标. NE 为联结该结点的单元数，S_j 为单元 j 的采样点数.

极小化 (19) 式要求 a 满足

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}^{\mathrm{T}}(x_i, y_i)\ \mathrm{P}(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}^{\mathrm{T}}(x_i, y_i)\ \sigma^h(x_i, y_i) \tag{20}$$

即

$$\mathrm{A}a = \mathrm{b} \tag{21}$$

其中

$$A = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}^{\mathrm{T}}(x_i, y_i)\ \mathrm{P}(x_i, y_i) \qquad \mathrm{b} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}^{\mathrm{T}}(x_i, y_i)\ \sigma^h(x_i, y_i) \tag{22}$$

这里 A 仅与采样点的位置有关.

3.3 h- p 法的误差估计

h-p 算法的误差估计已提出多种方法，如插值法、单元残值法、子域残值法、后处理法等. Oden[9,12,19]等则提出利用最优化算法选择离散网格参数，最大程度地减小各单元误差.

令 (h, p) 表示网格参数的分布 (即网格大小和单元形函数阶次的分布). 区域 Ω_k 上的网格参数用函数 h 和 p 表征[5,19]

$$h(x_1, x_2) = h_k(x_1, x_2) \in k \tag{23a}$$

$$p(x_1, x_2) = p_k(x_1, x_2) \in k \tag{23b}$$

单元 k 的误差指标 η_k 与 h_k 和 p_k 有关，可由局部误差密度 ϕ_k 表达

$$\phi_k = \phi_k(h, p) \tag{24}$$

$$\eta_k = \int_{\Omega_k} \phi_k(h, p)\,\mathrm{d}x \tag{25}$$

从而，Ω 上的总体误差指标可由如下函数给出

$$J(h, p) = \sum_k \int_{\Omega_k} \phi_k(h, p)\,\mathrm{d}x \tag{26}$$

4 自适应改进策略

自适应分析是为了自动调整有限元离散化以减小求解误差. 自适应网格改进基于严格的误差估计. 其目的是实现最优网格布局：各单元的误差指标相等，且小于容许极限.

4.1 自适应 p 改进

p-法是在不改变原网格大小分布的基础上增加局部单元的节点数或插值函数阶次，以改进求解的质量. 增设高阶自由度的区域由误差估计确定. 令

$$\eta_{\max} = \max_i(\eta_i) \tag{27}$$

$$\alpha_i = \eta_i / \eta_{\max} \tag{28}$$

这里 η_i 如 (11) 式所示，为单元 i 的误差指标. 取一控制参数 ν ($0 \le \nu \le 1$)[5,18]. 如果 $\alpha_i \ge \nu$，则在第 i 个自由度上加高阶项. 显然，收敛速度及程序效率取决于 ν. 通常可取 $\nu = 0.25 \sim 0.5$.

4.2 自适应网格加密

为实现所需网格大小分布，原则上有两个途径：其一，在保留原网格的基础上加密网格；其二，网格重新生成 (总体或局部). 通常，网格重新生成更可取，因为它可能经一次操作实现期望的单元大小分布. 令

$$\xi_i = \|\mathbf{e}\|_i / \|\mathbf{e}\|_E \tag{29}$$

其中 $\|\mathbf{e}\|_i$ 为单元 i ($i = 1, \cdots, m$) 的估计误差的能量范数，由 (16) 式计算. $\|\mathbf{e}\|_E$ 为容许误差的能量范数.

设全域容许的相对误差 (能量范数的最大百分误差) 为 $\bar{\eta}$，并假设各单元间局部误差均匀分布，则 $\|\mathbf{e}\|_E$ 可近似为[8]

$$\|\mathbf{e}\|_E = \bar{\eta}\left[\left(\|\mathbf{u}^h\|^2 + \|\mathbf{e}_h\|^2\right) \Big/ m\right]^{1/2} \tag{30}$$

其中 m 为单元点数. $\|\mathbf{e}_h\|^2$ 如 (16) 式所示.

$\|\mathbf{e}\|_E$ 也可由基于平滑应力场的平均单元能量范数得到

$$\|\mathbf{e}\|_E = \bar{\eta}[\|\boldsymbol{\sigma}^*\|^2 / m]^{1/2} \tag{31}$$

其中 $\|\boldsymbol{\sigma}^*\|^2 = \sum_i \|\boldsymbol{\sigma}^*\|_i^2$，$\|\boldsymbol{\sigma}^*\|_i^2 = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{*\mathrm{T}} \mathrm{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^* \mathrm{d}\Omega$，$\boldsymbol{\sigma}^*$ 同 (13) 式.

网格加密归结为 $\xi_i > 1$. 即可用 (29) 式计算改进网格中新单元的大小.

令 h_i 为单元 i 的当前大小. 根据 $\|\mathbf{e}\| \alpha h^{\min(\lambda, p)}$ (λ 为奇异性强度，p 为形函数阶次)，预测的新单元大小可表为

$$h_n = h_i \Big/ \xi_i^k \tag{32}$$

为选取合适的 k 值，需要自动确定奇异性区域. 这可依据应变能集中指标由下式确定

$$\phi_i = \frac{SI_i}{GSI} \tag{33}$$

其中

$$SI_i = \frac{\text{单元 } i \text{ 的应变能}}{\text{单元 } i \text{ 的体积}} = \frac{\int_{\Omega_i} w \mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega_i} \mathrm{d}\Omega} \tag{34}$$

为单元 i 的应变能集中指标.

$$GSI = \frac{\text{系统的总应变能}}{\text{系统的总体积}} \tag{35}$$

为对整个区域的整体应变能集中指标.

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{36}$$

为能量密函数.

若 $\xi_i > 1$，且 ϕ 在单元 i 达到局部最大值，即 $\phi_i \geq \phi_j$ 对以结点或边界联结单元 i 的所有单元 j 成立，则单元 i 位于奇异性区域.

对奇异性区域的所有单元，$k = \frac{1}{\lambda}$，对所有其它单元，$k = \frac{1}{p}$. 实用中，为避免改进后的单元过大或过小，可取一变化极限. 如 $h_{\min} \leq h_n \leq h_{\max}$. 根据算出的新网格单元尺寸和各节点所关联的单元数目，可容易地确定出单元尺寸参数.

4.3 网格参数 (h, p) 的最优布局

令 N_k 表示单元 k 的自由度总数，$n = n(h, p)$ 表示“自由度密度”. 则自由度总数 N 由下式给出

$$N = \int_{\Omega} n(h, p)\,\mathrm{d}x \tag{37}$$

对固定的自由度总数 $N = N_0$，最优网格由 h，p 的分布 (h^*, p^*) 定义如下[10,19]

$$J(h^*, p^*) = \min J(h, p) \tag{38}$$

满足约束条件

$$\int_{\Omega} n(h, p)\,\mathrm{d}x = N_0$$

这里 $J(h, p)$ 如 (26) 式，为总体估计误差.

此优化问题可用 Lagrange 乘子法求解. 令

$$L(h, p; \lambda) = \| J(h, p) - \lambda \left(\int_{\Omega} n(h, p)\,\mathrm{d}x - N_0 \right.$$

最优性条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi_k}{\mathrm{d}n}\right|_{p=\mathrm{Const.}} = \lambda = \mathrm{Const.}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi_k}{\mathrm{d}n}\right|_{h=\mathrm{Const.}} = \lambda = \mathrm{Const.}$$

此法的基本思想是在满足自由度总数为常数的约束条件下，极小化估计误差. 在实际应用中，要求新自由度引起的误差的减小量尽可能大，以实现网格的高效改进. Oden[12] 曾将类似方法用于流体力学中 Navier-Stockes 方程的数值求解. 其中，将单元的“广义熵误差指标”作为局部误差，利用给定 h-p 网格估计误差的极小化，确定网格参数 (h, p) 的分布. 获得了指数率收敛.

4.4 自适应网格生成

网格的自动生成，尤其是改进后新网格的自动生成，是自适应过程的重要一环．已提出了一些较为实用的方法．Shephard[5,24]曾对此作过较详细的评述．目前，在不少商用有限元软件中已加入了网格自动生成模块．极大地提高了分析效率．

网格自动生成大略可分为结构化和非结构化网格生成．结构化网格的生成是通过定义许多子结构生成单元．网格单元分布均匀，对规则几何形状易于实现，对复杂边界形状则较麻烦．非结构化网格的生成仅需问题所涉及区域的几何描述和沿区域边界的结点布局密度，网格生成模块可根据用户确定的结点定位信息自动生成边界结点．总体的网格密度和梯度仅由边界结点坐标控制．生成的单元不规则，但能方便地对任何复杂几何形状进行离散，并可任意调整网格单元的分布和密度．

在自适应网格改进过程中，单元的大小是不断变化的，改进后网格的生成需要有效处理这种快速变化．Lo 和 Lee[22,23]等针对二维弹性问题提出了一种背景网格技术，首先由正方形格子覆盖需网格化的区域，方格的结点位置由背景网格直接计算并用于此后的网格生成处理．网格单元生成由含所有边界的区域开始，逐步在没有网格化的区域构造新单元和结点，给定位置处的单元大小由背景网格计算．构造单元完成后，进行网格修匀以改进整体网格的质量．

5 工程应用

自适应 FEM 的发展极大地提高了有限元分析的自动化程度和分析效率及可靠性，也使很多复杂的工程问题的解决成为可能．目前，已广泛应用于各类线性问题和一些非线性问题的分析．如：飞机结构的分析及机翼的外形设计、空气及液体（如油箱）流场的模拟、车体及船体结构的分析．高温环境下材料的粘塑性分析、高速撞击时材料性能的分析及结构破坏过程的仿真、损伤结构的分析及裂纹扩展过程模拟、结构的形状优化等．尤其对变几何特性问题的分析，自适应 FEM 有其独特的优越性．

非线性特性研究感兴趣的问题之一是在一定条件下塑性行为和断裂发生位置的确定．它们是对超大变形过程（如结构超塑性成型、强冲击下的变形等）和裂纹扩展过程的计算机仿真的基础；结构形状优化则是涉及运动边界的问题．在这些问题的分析中，几何特性是不断变化的．在进行数值分析时，需要数值模型自适应改变，以合理处理几何特性的变化．

结构的成型或在强冲击下的变形是一强非线性过程．在变形过程中累积的大变形将导致单元畸变．这时，单元将变为数值病态而失效．因此，需要用自适应方法确定什么时候单元发生畸变，并能自动生成新的网格、自动逐次修改几何形状，优化设计则是一迭代逼近的过程．优化参数的每次变化都可能引起结构形状即几何区域的改变（如形状优化），此时，边界是不断移动的，因而需要不断估计有限元网格的精度，并不断改进网格，以控制离散误差．在裂纹扩展过程中，裂纹的位置是不断变化的，因此也需要数值模型能以重新形成网格的形式自适应改变，尤其是，裂纹尖端的应力应变场具有强奇异性，而裂尖附近的应力应变信息对分析过程至关重要，在网格生成过程中，需要合理表达裂纹尖端的力学特性．

值得一提的是，Shephard[5,24,25]等人在自动化有限元分析方面作了很多工作，曾设计

了对一般二维几何自动裂纹追踪程序. 其中, 基于几何输入, 用修正的四枝树技术生成网格. 程序所用数据结构包括几何数据、网格数据和分析数据三部分. 其网格数据由网格生成程序直接从几何数值生成, 而 FE 数据由网格数据构造, 裂纹的产生和扩展直接反映在几何数据中. 根据裂纹的位置, 对几何数据进行修改. 程序的数据生成和程序操作都由几何数据控制.

6 未来的发展前景

FEM 作为一种非常有效的数值方法, 在工程中发挥着重要的作用. 在其基础上发展起来的自适应 FEM, 自动化程度高, 分析效率和可靠性高. 有着广阔的发展前景.

(1) 三维问题的研究将进一步发展. 如三维网格的自动生成及改进、误差估计等.

(2) 有效的自适应算法的研究和开发. 如全自动有限元网格生成、自适应过程的并行实现, 高效的 h-p 自适应方法.

(3) 各类非线性和瞬态问题的研究. 包括: 时间步长、载荷增量等的自动选取与自适应调整及与自动网格生成的结合等.

(4) 工程应用的研究. 包括: 复杂工程问题的分析, 新材料、新结构的研制等. 如: 结构的超塑性成型及粘塑性分析, 结构或材料的损伤、破坏过程的数字仿真, 流场的动态模拟, 流-固耦合及接触问题的分析, 具有调控能力的智能型自适应结构的分析设计等.

(5) 自适应 FEM 和 CAD 技术及智能型专家系统将进一步综合, 使 FEM 向全自动化方向发展.

(6) 有效、实用的分析软件的研制是最重要的课题之一.

参 考 文 献

1 Oliverira E R A. Optimization of finite element solutions. Proceedings of the 3rd conference on matrix methods in structural mechanics, Wright-Patterson, Ohio, 1971

2 Peano A G. Hierarchics of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1976, (2): 211～224

3 Peano A G, Pasini A. Adaptive approximation in finite element structural analysis. *Computers and Structures*, 1979, 10 (2): 332～342

4 Zienkiewicz O C, et al. The hierarchical concept in finite element analysis. *Computers and Structures*, 1983, 16 (1)

5 Babuska I, Zienkiewicz O C, et al. (eds.) Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations. John Wiley & Sons, 1986

6 Szabo B A. Mesh design for the p-version of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, 55 (1): 181～197

7 Zienkiewicz O C, Zhu J Z, et al. Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, 28 (3): 879～891

8 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The three R's of engineering analysis and error estimation and adaptivity. In: Oden J T (ed.) Reliability in ComputationalMechanics, Austin, Texas, USA, 1990. 95～113

9 Oden J T, Demkowicz L, et al. Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part II: a posteriori error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, 77 (1): 113～180

10 Rachowicz W, Oden J T. Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part III: design of h-p meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, 77 (1): 181～212

11 Turcke D J, McNeice G M. Guidelines for selecting finite element grids based on an optimization study. *Computers and Structures*, 1974, 24 (2): 499～519

12 Oden J T. h-p adpative methods in CFD. In: Adeli H, et al. (eds.) Mechanics Computing in 1990's & Beyond, New York, ASCE, 1991. 129～133

13 Bab uska I, Rheinboldt W C. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, 12: 1597～1615
14 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. A simple error estimator and adpative procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24: 337～357
15 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The superconvergent patch recovery and posteriori error estimates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 31: 1365～1382
16 Ainosworth M, Zhu J Z, et al. Analysis of the Zienkiewicz-Zhu posterior error estimator in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, 28
17 Choudhardy S K, Grosse I R. Effective stress-based finite element error estimation for composite bodes. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 50 (5, 6): 687～701
18 **李润方. 有限元分析中的最优离散化. 力学进展**, 1993, 23 (3)
19 Tworzydlo W W, Oden J T. Knowledge-based methods and smart algorithms in computational mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 50 (5, 6): 759～800
20 Zeng L F, Wiberg N E. Adaptive *h-p* procedures for high accuracy finite element analysis for two-dimensional linear elastic problems. *Computers and Structures*, 1992, 42: 869～886
21 Kelly D W, Gago S P, et al. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method, Part I: error analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, 19: 1593～1619
22 Lee C K, Lo S H. A new scheme for generation graded quadrilateral mesh. *Computers and Structures*, 1994, 52: 847～857
23 Lee C K, Lo S H. An automatic adaptive refinement procedure using triangular and quadrilateral meshes. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 50 (5, 6): 671～686
24 Shephard M S. Approaches to the automatic generation and control of finite element meshes. *Applied Mechanics Review*, 1988, 41: 169～185
25 Shephard M S, Korngold E V, et al. A modelling framework for controlling structural idealizations in engineering design. *Computer and Structures*, 1990, 37: 181～191
26 Chen J L, Haleja P. OPSYN: a CAD based expert system for optimum structural synthesis. *Engineering Optimization*, 1989, 14: 267～286

ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD AND ITS APPLICATIONS IN ENGINEERING

Guo Shuxiang
Air Force College of Engineering, Xi'an 710038

Abstract Adaptive FEM is a numerical scheme which can automatically adjust algorithms to improve the solving procedure. Based on the ordinary FEM, the key techniques of it includes the error estimation, adaptive refinement, etc. The paper presents a brief review for the advanced improvement and applications of adaptive FEM.

Keywords finite element method (FEM), error estimation, adaptive refinement, optimal discretization