

从分子运动论看连续介质气体动力学 和稀薄气体的新特性

Yoshio Sone

京都大学工程科学研究生院, 航空航天系

摘要 首先, 综述了根据分子运动论对连续介质极限气体行为的最近研究. 它表明: 经典的连续气体动力学是不完整的; 用分子运动论分析在连续介质极限时一些重要情况得到气体的正确行为是不可避免的. 即, 除了特殊的情况, 甚至在平均自由程变为零的极限下热传导方程不能描述静止气体温度场; 文中给出了根据分子运动论导出的温度场的正确方程组和边界条件及其具体应用. 还用同轴圆筒间的包含气体凝聚相的气体流场的渐近分析, 论证了经典连续气体动力学方程组的不完整性. 其次, 综述了最近几年发现的稀薄气体流动的新特性. 如在凸体周围速度分布函数的不连续性及其与 s 层的关系, 加热平板边缘周围引起的流动, 有周期性温度分布的管道内产生的单方向流动.

关键词 连续介质极限气体行为, 分子运动论, 气体动力学, 稀薄气体流动

1 引言

Navier - Stokes 方程组(连续方程, Newton 应力定律的动量方程, Fourier 热流定律的能量方程)被广泛地认为是在连续极限(或平均自由程为零)情况下描述气体行为的合适的方程组. 然而, 这个方程组通过粘性和热传导性受平均自由程或 Knudsen 数效应的限制, 它们正比于平均自由程. 稍微细心考查这些方程, 会提出一个佯谬的结果: 因考虑气体稀薄效应而引起的流动, 影响着在连续介质极限下气体的行为. 为了阐明这种情形并得到正确的方程和相应的边界条件, 在文献[1]和[2]中针对前述佯谬结果可能出现的情况, 对 Boltzmann 方程的与时间无关的边界问题进行了渐近分析. 在文献[1]中发现: 与一般的理解相反的是, 除了一些非常特殊的情况外, 热传导方程用以描述平均自由程为零的静止气体的温度场是不合适的. 对一些简单的例子, 结果显示分子运动论方程的数值解在连续介质极限下接近由渐近分析得到的该系统的解, 而不是热传导方程的解. 那么, 自然地我们会提出一个问题, 对一种气体的速度场是否可能看到类似的情形. 文献[2]在连续介质极限下研究了含有气体凝聚相的二个同轴圆柱间的气体的渐近特性, 对前边提出的问题得出了肯定的答案. 即是说, 在连续介质极限下的流动

变量,与考虑气体稀薄效应影响可能引起的量同时得到.这些研究表明:经典连续介质气体动力学是不完整的;在一些重要情况下,在连续介质极限下,为得到气体的正确行为,必须进行分子运动论分析.这在 2.1 节和 2.2 节做了讨论.

在自由分子流中气体分子的速度分布函数的不连续性是众所周知的,然而,在有分子碰撞的流动中的不连续性直到最近才有讨论^[3,41].一般地,定常绕流流动的气体的速度分布函数具有不连续性,不连续性的存在依赖于边界的形状.即,不连续性从凸边界上的每一个点传播进入气体,而从凹边界则不然.它涉及凸边界上方的稍微稀薄的气体中的 S 层^[4,5](在 Knudsen 层底部的第二边界层).进一步,用有限差分法进行稀薄气体流动数值计算时,不连续性应该考虑进去^[3,6].在 3 节,我们将讨论不连续性问题.

在需要分子运动论理论分析的稀薄气体或小尺度系统的气体中,温度场对气体运动起重要作用.在这种气体中,由温度场的影响引起了流动,而这在经典流体动力学框架内是不能得到的.除了边界壁面的温度不均匀诱发的我们熟知的热蠕动和热蒸发流动外^[7~22],还提出了各种类型的流动如热应力滑移流、非线性热应力流、靠近加热平板边缘诱发的流动等^[22~35].这些由温度场诱发的流动在微机械工程方面引起了新的关注^[36~40].在 4 节,我们讨论新的类型的流动:加热板边缘周围诱发的流动^[28]和在具有周期壁面温度分布的槽道中诱发的单向流动^[30].

以下各部分将遇到的所考虑的系统的 Knudsen 数, Kn , 定义为 $Kn = l/L$. 这里, l 为具有系统参考密度和温度并处于静止平衡态的气体分子的平均自由程, L 是特征(或参考)长度.由于我们将讨论各种不同的问题,这些参考量(长度,密度和温度)在每个需要其精确定义的地方(或图中)都分别加以规定.

2 连续介质气体动力学

2.1 热传导方程的不适用性

研究流体动力系统和 Boltzmann 系统之间的关系由来已久.通过对 Boltzmann 方程与时间无关的边值问题的系统的渐近分析,在考虑气体稀薄效应到 Knudsen 数的一定量级时,已经导出了恰当的流体力学型方程组及其相应的边界条件(例如,可参见综述文献[41]和[42]).最近的研究表明,重要的一大类问题中的气体的行为不能够由经典的流体动力方程组正确地描述,甚至在连续介质极限下(或在系统的 Knudsen 数趋于零的极限下)也是如此.在 2 节我们讨论这个问题.

在 2.1 节,我们考虑温度任意分布的静止固体周围的气体.当考虑的区域趋向无穷远时,无穷远处处于共同的均一的静止状态,在 Navier - Stokes 系统(连续方程, Newton 应力律的动量方程和 Fourier 热流律的能量方程)中,气体速度为零,压力均匀一致的状态显然是方程的解,而温度场由热传导方程的解给出.在 1 节中,我们对这个解在连续介质极限下描述温度场的有效性提出质疑.这里,我们给出正确的方程组和边界条件,它们描述了在现在的条件下,在 $Kn = 0_+$ 时气体的行为.这组方程在文献[1]中通过小 Knudsen 数下的 Boltzmann 系统的渐近分析导出.

Boltzmann 系统的渐近分析类似于我们以前文章中的分析方法^[43~45].解 f (气体分子的速度分布函数)被分为两部分:

$$f = f_H + f_K \quad (1)$$

这里, f_H 是缓变的 Hilbert 部分, 它描述气体的总的行为; f_K 是 Knudsen 层修正, 它描述近边界处的必要的修正. f_H 是以 Knudsen 数做简单的幂级数展开得到的, 本质上这是 Hilbert 展开^[46], 但对所考虑的物理条件下物理量的数值大小要给予注意. 为了构造满足分子运动论边界条件的解, 引入了 Knudsen 层修正 f_K , 因为由奇异型方程简单级数展开^[47]得到的解 f_H 并不具有足够的自由度与分子运动论边界条件相匹配. 从 f_H 的分析, 导出了基于宏观变量(速度 v_i , 密度 ρ , 温度 T 和压力 p) 的流体力学型方程, 而从 f_K 的分析, 得到了对于流体力学型方程的边界条件和近边界的 Knudsen 层修正.

相应于当前问题的 Navier - Stokes 系统的解, 我们考虑在连续介质极限下流动速度为零的情况 ($Kn = 0_+$), 并进行如上所述的渐近分析. 在这种假设下 ($Kn = 0_+$ 时, $v_i = 0$), 上述渐近分析可以一贯地进行下去.

从渐近分析中, 导出了下列描述 $Kn = 0_+$ 时气体行为的流体力学型方程及其相应的边界条件. 这些方程及边界条件是基于对刚球分子的 Boltzmann 方程和反射边界条件得到的, 但对其他分子模型和更一般的边界条件, 其主要特点保持不变. 令 $\hat{v}_i, \hat{\rho}, \hat{p}$ 和 \hat{T} 分别表示在 $Kn = 0_+$ 时气体的速度、密度、压力和温度, 则这些变量的方程为

$$\hat{v}_i = 0, \quad \hat{p} = \text{const}, \quad \hat{\rho} = \hat{p} / RT, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_i} (\hat{\rho} v_i) = 0, \quad (3)$$

远处

$$\hat{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = - \frac{\partial}{\partial X_i} \left[\frac{\rho}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial T}{\partial X_j} + \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X_i \partial X_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 T}{\partial X_i \partial X_j} \right) \right) \right], \quad (4)$$

在现件下

耀的内

$$\frac{\partial T}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left(T^{1/2} \frac{\partial T}{\partial X_i} \right), \quad (5)$$

其中, 约定

$$\{A_{ij}\} = A_{ij} + A_{ji} - (2/3) A_{kk} \delta_{ij}; \quad (6)$$

而固壁边界条件为

$$T - T_w = 0 \quad (7)$$

$$n_i = 0, \quad t_i = - \frac{K_1}{Pr} \frac{RT_w^{1/2}}{\hat{p}} \frac{\partial T_w}{\partial X_i} t_i, \quad (8)$$

这里, X_i 为物理空间的笛卡尔坐标, T_w 为边界温度, n_i 是边界法向的单位矢量, t_i 是边界的切向矢量, R 是比气体常数, $\gamma, \beta, \gamma, Pr$ (Prandtl 数) 和 K_1 为数值常数:

$$\begin{aligned} \beta &= 1.270042, & \gamma &= 1.947906, & \gamma &= 0.188106 \\ Pr &= 0.660694, & K_1 &= -0.6463 \end{aligned} \quad (9)$$

就极限 $Kn = 0_+$ 而论, i 和 \bar{i} 仅是使系统完整的中介变量. i 和 \bar{i} 分别与 Kn 和 Kn^2 量级有关,即是

$$\begin{aligned} i &= v_{iH}/a, & \bar{i} &= (p_H - \bar{p})/a^2, \\ a &= \sqrt{1} R^{1/2} m/4 \sqrt{d_m^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

这里, v_{iH} 和 p_H 分别为流动速度 v_i 和压力 p 的 Hilbert 部分, m 和 d_m 分别为分子的质量和直径. 常数 a 与气体的粘性 μ 和温度 T 有以下关系

$$a = \mu T^{-1/2} \quad (11)$$

如果 \bar{i} 可以为零, 温度场由热传导方程控制:

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left[T^{1/2} \frac{\partial T}{\partial X_i} \right] = 0, \quad \bar{i} = + \quad (12)$$

这里, 热传导系数正比于 $T^{1/2}$. 这仅仅在非常特殊的情况下是允许的, 理由如下:

i) 由边界条件(8), 当边界的温度非均一时 \bar{i} 不能为零.

ii) 即使边界温度均一, \bar{i} 也不为零. 方程(4)求旋度, 取 $\bar{i} = 0$, 并用方程(5)取 $i = 0$, 我们得到如下的方程:

$$i_{jk} \frac{\partial T}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial X_k} \left[\frac{\partial T}{\partial X_i} \right]^2 \bar{\kappa} = 0, \quad (13)$$

这里 i_{jk} 是 Eddington 求和约定中的 δ_{ij} . 仅当沿等温线的线间距都相等, 方程(13)才满足.

因此, 热传导方程不适于描述静止气体的温度场, 甚至在连续介质极限下 ($Kn = 0_+$), 仅一些非常特殊的情况除外. 这个结果在连续介质气体动力学意义上是不合理的, 因为在 $Kn = 0_+$ 时不存在的东西(对 $Kn = 0_+$ 的世界而言它是一个幽灵)却给予在 $Kn = 0_+$ 时的温度场一个有限的影响.

为了更清楚地理解这种情形, 我们举一个简单的例子并比较三种类型的解: 热传导方程的解, 由渐近分析导出的这一系统(方程(2) ~ (8))的解, 各种小 Kn 数下的 Boltzmann 方程的数值解. 这里考虑的例子是在 $X_2 = 0$ 和 $X_2 = D$ 的二个平行平板间的稀薄气体; 两个壁处于静止状态, 并具有相同的温度分布 $T_w = T_0(1 - w \cos^2 X_1/D)$ (T_0 和 w 为常数)(图1). 我们寻求关于 X_1 的有周期 D 的周期解.

在图2和图3中, 比较了 $w = 0.5$ 时三种类型的解. 因为以前讨论过的主要特点对 B-KW 方程是相同的, 这里, 为了简化分子运动论方程的数值解, 应用了 B-KW 方程^[22, 48~50](以及相应的渐近方程和热传导方程). 图2示出了典型的等温线. 在图2中, 渐近理论的解和热传导方程的解之间有显著的不同, 但不清楚当 $Kn \rightarrow 0$ 时分子运动论方程的解收敛至何处. 为检验当 $Kn \rightarrow 0$ 时分子运动论方程的解的渐近特性, 在 $Kn = 0.005, 0.01, 0.02$ 和 0.05 时, 沿 $X_2/D = 0.1696$ 与 $X_2/D = 0.5$ 的温度分布和沿 $X_2/D = 0.0227$ 的流速分布在图3(a)中

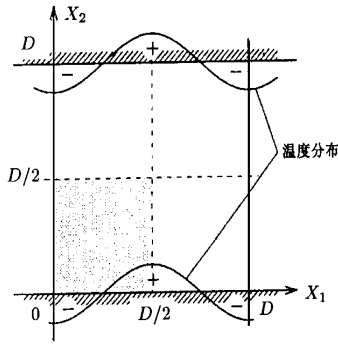


图1 2.1节中所举例子的几何形状.两个平行平板间的气体行为,壁上均具有周期性温度分布 $T_w = T_0(1 - \cos 2X_1/D)$. 在这个问题中,Knudsen 数定义中所取的参考长度、密度及温度(见1节最后一段)分别是渠道的宽度、整个渠道内气体的平均密度及 T_0 . 考虑到问题的对称性,阴影区的数据在下图标出

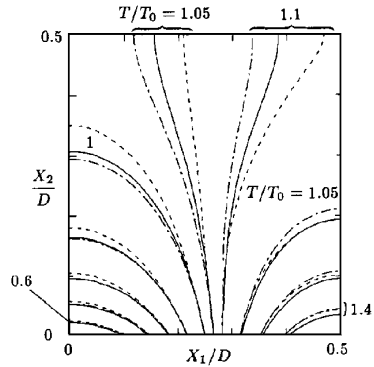


图2 图1中问题(2.1节中例子)的典型等温线 ($\omega = 0.5$). 其中,——代表 $Kn = 0.005$ 时的BGK方程的解; - - - 代表渐近理论的解; - · - 代表热传导方程的解.关于 Knudsen 数的定义参见图1中的说明

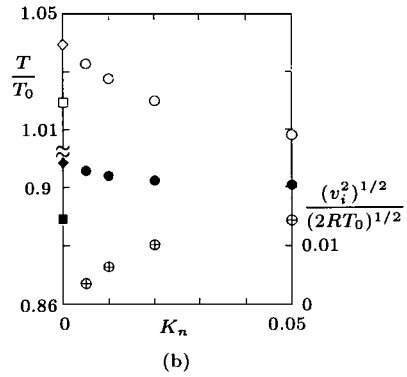
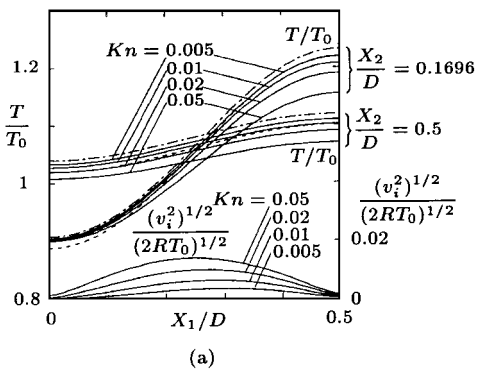


图3 图1中问题(2.1节中例子) ($\omega = 0.5$) 的分子运动论方程(BKW方程)的解向相应渐近理论解的收敛. (a)沿 $X_2/D = 0.1696$ 与 $X_2/D = 0.5$ 的温度分布和沿 $X_2/D = 0.0227$ 时的流速 $[(v_1^2)^{1/2}]$ 分布. (b)在 $(X_1/D, X_2/D) = (0, 0.1696)$ 和 $(0, 0.5)$ 时温度随 Kn 的变化及在 $(X_1/D, X_2/D) = (0.25, 0.0227)$ 时流速随 Kn 的变化. 在(a)中,——代表BKW方程的解; - - - 代表渐近理论的解; - · - 代表热传导方程的解.在(b)中,空白符号(○, □)代表在 $(X_1/D, X_2/D) = (0, 0.5)$ 时的 T/T_0 值,黑色符号(●, ■)代表 $(X_1/D, X_2/D) = (0, 0.1696)$ 时的 T/T_0 值,而符号 ⊕ 代表 $(X_1/D, X_2/D) = (0.25, 0.0227)$ 时的 $[(v_1^2)^{1/2}/(2RT_0)^{1/2}]$; 圆圈(○, □, ⊕)代表BKW方程的解,菱形(◇)代表渐近理论的解,而方块(■)代表热传导方程的解.关于 Knudsen 数的定义,参见图1的说明文字,注意两图中 T/T_0 与 $[(v_1^2)^{1/2}/(2RT_0)^{1/2}]$ 坐标之区别. 平行 稀薄

给出;在 $(X_1/D, X_2/D) = (0, 0.1696)$ 和 $(0, 0.5)$ 时温度随 Kn 的变化和在 $(X_1/D, X_2/D) = (0.25, 0.0227)$ 时流速随 Kn 的变化情况在图3(b)中给出. 从图3(a)和图3(b),很清楚分子运动论方程的温度场接近渐近理论的而非热传导方程的温度场,并且流动消失. 在图4(a)

和图 4(b) 中, 相应于图 2 和图 3 中的问题, 对刚球分子气体, 给出渐近理论的解和热传导方程的解的比较.

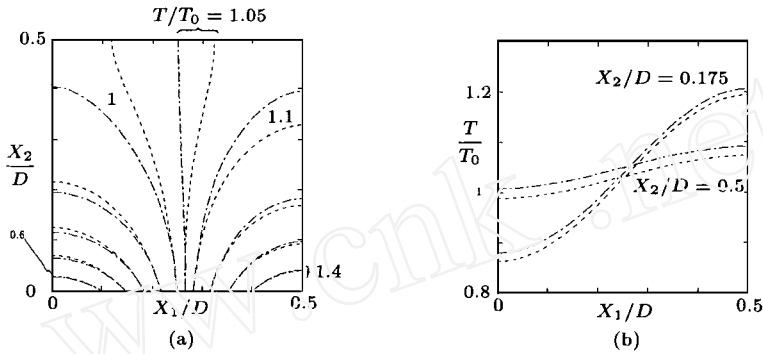


图 4 图 1 中问题(见 2.1 节) ($\gamma_w = 0.5$), 针对刚球分子气体, 渐近理论的解和热传导方程的解的比较. (a) $T/T_0 = 0.6 + 0.1m$ ($m = 0, 1, \dots, 8$) 及 1.05 时的等温线. (b) 沿 $X_2/D = 0.175$ 及 $X_2/D = 0.5$ 的温度分布. 图中, - - - 代表渐近理论的解, - · - 代表热传导方程的解

2.2 同轴圆筒间有凝聚态气体的 Couette 流

考虑两个同轴圆筒间的凝聚相稀薄气体, 每个圆筒都保持均一的温度; 内筒静止, 外筒以不变的角速度旋转. 我们将讨论在连续介质极限下 ($Kn = 0_+$) 气体的渐近行为. 在下面的讨论中, 令内筒的半径和温度分别为 L_1 和 T_1 ; 外筒的半径、温度和圆周速度分别为 L_2 , T_2 和 V_2 ; 在温度 T (或 T_1, T_2) 时饱和气体压力为 p_s (或 p_{s1}, p_{s2}).

令 $p_{s2} > p_{s1}$. 当两个圆筒静止时, 在外筒处产生蒸发现象, 在内筒处产生凝结现象. 外筒旋转时, 上述情形可能受到气体旋转产生离心力而引起的压力变化的相当大的影响. 借助文献 [51] 发展的渐近理论, 我们发现在 $Kn = 0_+$ 时气体的行为如下: 当 $|V_2|$ 很小时, 外筒处发生蒸发, 随着 $|V_2|$ 的增加, 蒸发速率减小至某一个 V_2 时蒸发消失:

$$V_2^2 \mathfrak{D} = 5RT_2 \left[1 - \left(\frac{p_{s2}}{p_{s1}} \right)^{2/5} \left[\left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 - 1 \right]^{-1} \right] \quad (14)$$

当 $|V_2|$ 较大时, 蒸发和凝聚在两个圆筒上都不发生^[52]. 有人也许自然而然地以为, 在这个范围的流动就是我们熟知的经典的柱面 Couette 流 (因为没有径向流). 然而这种想法是不正确的 (文献 [2]). 即是说, 考虑气体稀薄效应的影响引起的蒸发 - 凝结 (或径向流), 对确定 $Kn = 0_+$ 时气体的行为有贡献. 我们下面将讨论这个问题.

在 2.1 节中概述的适用于小 Kn 数的渐近分析在以下假设下可以一贯地进行下去: 气体的径向速度 v_r 在 $Kn = 0_+$ 时消失. 渐近分析给出流体动力学型方程与相应的气体及其凝结相的交界面上的边界条件. 在圆筒情况下, 状态为轴向和周向均匀, 确定 $Kn = 0_+$ 时的气体行为的方程和边界条件将在下面给出. 它们的导出是根据刚球分子的 Boltzmann 方程和在界面上的一般的动力学边界条件 (包括完全凝结条件). 令 ϕ, ψ, p 和 T 分别为 $Kn = 0_+$ 时气体的周

向速度、密度、压强和温度. 其方程为

$$\frac{d\phi}{dr} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d\phi^2}{r} = \frac{d\phi}{dr}, \quad (16)$$

变的 $\left(\frac{d\phi}{dr} + \frac{\phi}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[T^{1/2} r^2 \left(\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{r} \right) \right] \right)$, 及 外筒

$$V \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\phi^2}{2} + \frac{5R}{2} T \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[T \left(\frac{\phi}{dr} - \frac{\phi}{r} \right) + \frac{5R}{2} \frac{d}{dr} \left(\phi^{1/2} r \frac{d\phi}{dr} \right) \right], \quad (18)$$

$$\phi = R\phi; \quad (19)$$

在两个圆筒上这些方程的边界条件是

$$\begin{aligned} \phi &= 0, & \phi &= T_1, & \phi &= p_{s1} & \text{(在 } r = L_1 \text{)}, \\ \phi &= V_2, & \phi &= T_2, & \phi &= p_{s2} & \text{(在 } r = L_2 \text{)} \end{aligned} \quad (20)$$

这里, r 为径向坐标(原点在两个圆筒的公共轴上), ϕ 是一个中间变量, 如 2.1 节所述, 并与量级为 Kn (在 $Kn = 0_+$ 世界中的一个幽灵) 的一个量 v_r 有关:

$$\begin{aligned} r &= v_r / a \\ a &= \frac{1}{2} R^{1/2} m / 4 \sqrt{d_m^2}, \quad \text{(还可见方程(11))} \end{aligned} \quad (21)$$

这里, v_r 是量级为 Kn 的径向速度.

众所周知, 经典的环形流线的圆柱 Couette 流的解满足 $r = 0$ 时的方程 (15) ~ (19), 但它并不满足 (20) 中的所有条件; 应该放弃关于 ϕ 的一个条件. 换句话说, 经典的圆柱 Couette 流的解加上 $r = 0$, 仅当 p_{s2}/p_{s1} 为一个特定的值时, 满足方程 (15) ~ (20). 对 p_{s2}/p_{s1} 的一般值, r 不可能为零. 一个与 Kn 同量级的量 ($Kn = 0_+$ 的世界的一个幽灵 v_r) 参与确定 $Kn = 0_+$ 时气体的行为. 与 2.1 节中方程 (3) ~ (5) 相比, 方程 (15) ~ (18) 保留了“幽灵” v_r 的 Navier - Stokes 方程的在另一尺度下的形式. “幽灵”量 v_r 在得到这个问题的正确解中起着非常重要的作用.

我们将展示一些方程 (15) ~ (20) 的解的例子. 图 5 和图 6 给出当 $p_{s2}/p_{s1} = 1.2$, $T_2/T_1 = 1$, $L_2/L_1 = 2$ 时, 在不同外圆筒的周向速度 V_2 下, ϕ 和 r 与 r 的关系的分布曲线. 图中 $V_2(2RT_1)^{1/2} = 0.6530$ 的曲线对应于经典的圆柱 Couette 流(无径向流). 在图 5 中, “幽灵”给径向流(图 6 中的 r) 对周向流 ϕ 的对流效应是明显的. 接下去, 图 7 中显示了, 当 $Kn \rightarrow 0$ 时, 分子运动论 (BKW) 方程的解如何逼近相应的渐近方程(相应 BKW 情况下的方程 (15) ~ (20)) 的解. 使用 BKW 方程是为了简化数值计算.

2.1 节和 2.2 节的讨论给分子运动论增添了新的重要性. 为得到在连续介质极限下气体的行为, 经典的连续介质气体动力学是不完整的, 分子运动论理论的考虑是必然的(或者说, 要知道考虑气体稀薄状况下的气体行为的信息). 内容的更详细的讨论可参考文献 [1] 和 [2].

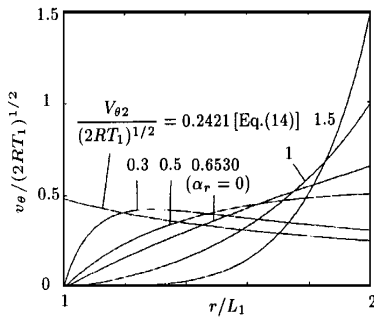


图5 2.2节中的圆柱问题 ($p_{s2}/p_{s1} = 1.2$, $T_2/T_1 = 1$, $L_2/L_1 = 2$) 在不同的 V_2 下周向速度 v_θ 的曲线

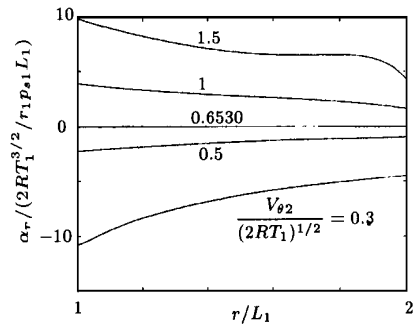


图6 2.2节中的圆柱问题 ($p_{s2}/p_{s1} = 1.2$, $T_2/T_1 = 1$, $L_2/L_1 = 2$) 在不同的 V_2 下 v_r 的曲线

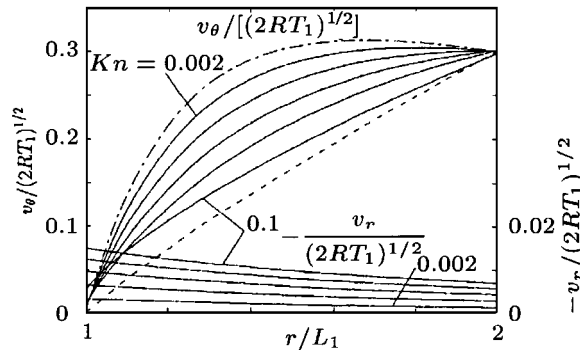


图7 2.2节中圆柱问题 ($V_2 / (2RT_1)^{1/2} = 0.3$, $p_{s2}/p_{s1} = 1.1$, $T_2/T_1 = 1$, $L_2/L_1 = 2$) 分子运动论 (BKW) 方程的解向相应渐近理论的收敛. 其中, — 代表 BKW 方程的解, - - - 代表渐近理论的解, . . . 代表经典的圆柱 Couette 流. 给出了五个 Knudsen 数 ($Kn = 0.002, 0.005, 0.01, 0.02$ 及 0.1) 下 BKW 方程的解. 在图形中心部分按 Kn 数单调变化分布. 在定义 Knudsen 数时所取的参考长度、密度和温度 (见 1 节最后一段) 分别为 L_1 , p_{s1}/RT_1 (在温度 T_1 下的饱和气体密度) 及 T_1 注意 v 及 v_r 坐标轴之区别

3 速度分布函数的间断和 S 层

Boltzmann 方程确定速度分布函数沿其特征曲线的变化. 因此, 速度分布函数的间断可能在气体中出现. 考虑在稀薄气体内, 由平面壁边界的温度突然改变引起的波的产生和传播问题. 从初始和边界条件, 速度分布函数在空间和时间坐标的起始点是间断的. 随着时间的发展, 间断传播进入气体, 由于分子的碰撞而衰减^[3,53]. 在定常流中, 上述间断消失. 但在凸物体周围的气体中, 有另外的间断源^[4].

考虑定常状态的 Boltzmann 方程

$$i \frac{\partial f}{\partial X_i} = J(f, f) \quad (22)$$

这里 X_i 是物理空间的直角坐标系, v_i 是分子速度, f 是速度分布函数, $J(f, f)$ 是碰撞项. 该方程定义了 X_i 空间 v_i 方向 f 的变化. 如果在 $X_i = X_i^{(0)}$ 和 $v_i = v_i^{(0)}$ 时, f 有一个间断, 它将沿特征线 $X_i = X_i^{(0)} + v_i^{(0)} t$ 传播, 其中 $t (> 0)$ 为一个参量. 因为碰撞积分 $J(f, f)$ 的增益项是连续的, 所以间断的变化由下式确定

$$v_i \frac{\partial [f]^\pm}{\partial X_i} = - c(v_i; f) [f]^\pm \quad (23)$$

其中, $[f]^\pm$ 是在间断两边的 f 的差, $c(v_i; f)$ 是碰撞频率 ($c(v_i;)$ 是一个积分算子). 即是说, 间断在分子自由程的距离尺度上随着分子速度 v_i 衰减^[54]. 间断的位置不依赖于分子的速度 ($= (v_i^2)^{1/2}$).

在边界上, 离开边界的分子的速度分布函数是确定的. 即

$$f = f_w \quad (v_i n_i > 0) \quad (24)$$

这里 n_i 是边界的法向单位矢量, 指向气体, f_w 是一个给定的函数或是一个 $v_i n_i < 0$ 时的 f 的函数. f_w 的特性与 $v_i n_i < 0$ 时的 f 函数大不相同, 后者是根据周围气体分子的碰撞确定的. 因此, 在 $v_i n_i = 0$ 时, f 在边界上一般是不连续的. 当边界为凸形时, 该间断沿着方程 (22) 的特征线传播进入气体 (图 8). 相反, 当边界为凹形时, 特征线与边界相切, 不进入气体, 因此没有间断传播进入气体.

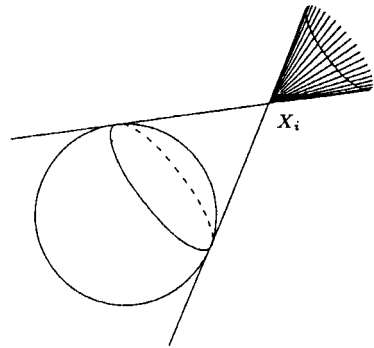


图 8 在凸边界周围气体速度分布函数的间断(3 节)在 X_i 点, 速度分布函数在 v_i 空间中在阴影圆锥上是间断的

速度分布函数的间断随着离开边界的距离的增加由于分子碰撞而逐渐衰减, 而仅在沿特征线约为分子自由程 l 的量级内才明显^[55]. 当 Knudsen 数 l/L_r (L_r 是边界的曲率半径) 是 1 的量级或更大时, 间断延伸到离开边界 l 量级的范围 (图 9(a)). 当 Knudsen 数 l/L_r 较小时, 其上间断为明显的特征线的那一部分几乎平行边界, 这部分特征线离边界的距离是 l^2/L_r 量级. 由于 $(L_r + l)^2 = L_r^2 + O(l^2)$ 且 $l/L_r \ll 1$ (图 9(b)). 因此, 间断被限制在厚度为 l^2/L_r 量级的紧靠边界的薄层内, 这个薄层相当于一个凸边界上方的 Knudsen 层底部处的 S 层^[5]. 在文献 [4] 中也讨论了在 S 层中间断和宏观变量特性之间的关系, 即, 关于间断如何象 S 层那样出现在宏观变量中; 关于在什么量级的 Kn 数时需进行 S 层修正 (修正依赖于我们感兴趣的一个变量); 关于对均匀绕球流动的渐近解和数值解的比较. 在这里由一般分析得到的 S 层的主要特征清楚地显示出来.

在绕一个或多个物体的稀薄气体流动的数值计算中, 我们必需注意间断. 有幸的是, 间断的位置事前是知道的. 已经发展了考虑间断的有限差分方法, 研究了各种流动, 例如, 从一个圆柱或球到气体或真空中的蒸发流^[6, 56, 57]; 各种绕球流动的问题如阻力、热力和蒸发 - 凝结问题^[35, 58 ~ 61]; 流经平板的高速流动^[62, 63]. 在这些研究中, 精确地计算了间断的特性.

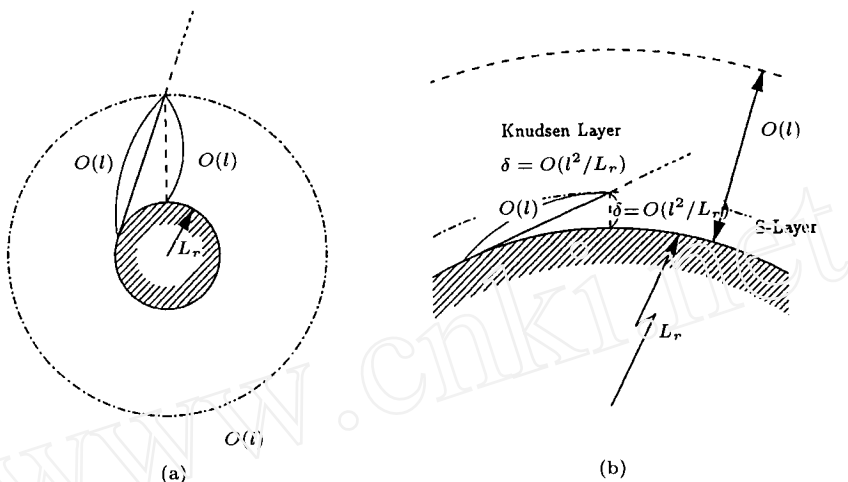


图9 速度分布函数的间断和S层(3节). (a) $l \sim L_r$ 及(b) $l \ll L_r$. 间断位于与边界相切的一条线上,并以沿此线离开边界的分子的速度运动. 间断随着离开边界的距离的增加由于分子碰撞而逐渐衰减. 仅在长度为 $O(l)$ 的实线上才明显. 更远处在虚线上则可忽略. 对(a)中 $l \sim L_r$ 的情形,间断扩展至一个用点划线标出的区域,距离边界 $O(l)$ 量级. 对(b)中小 l/L_r 值的情形,间断在一用点划线标出的薄层中,厚为 $\delta = O(l^2/L_r)$; 这个以虚线为界,距离边界为 $O(l)$ 量级的区域为 Knudsen 层

4 温度场引起的新型流动

4.1 加热平板边缘周围引起的流动

在文献[28]中,考虑了矩形容器中均匀加热(或冷却)的平板周围的稀薄气体(图10),并在广泛的 Knudsen 数范围内应用标准的直接模拟 Monte Carlo 方法(Bird 的方法)^[64,65]对气体中引起的流动进行了数值研究. 图11给出 Kn 为 0.05 和 0.5 时容器 $1/4$ 范围内的流场. (这不是文献[28]的结果的再现,而是 *M. Yoshimoto* 新计算的结果^[66],因为下面解释的实验与文献[28]中不同,不是给出冷却平板的数据而是用加热平板做的.)根据文献[28],流动在中等 Knudsen 数 ($Kn = 0.1 \sim 0.2$) 时最强. 随着 Knudsen 数变小,流动总体上变弱且趋于局限在平板边缘附近. 即使是小 Knudsen 数下,局部流动依然相当强. 加热平板的边缘效应显然起因于这种流动. (与在气体内部引起的非线性热应力流^[22,25]比较). 平板上沿周围等温线的大曲率部分在平板上引起温度跳跃,从而形成一个温度场. 它类似于

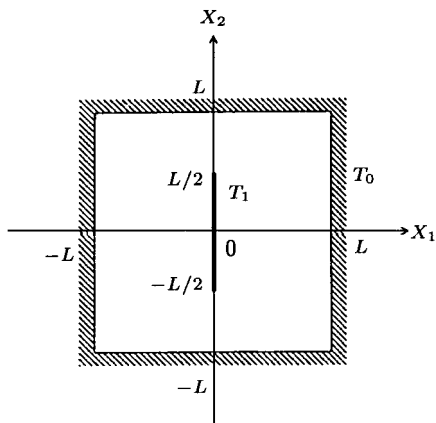


图10 4.1节中例子的几何形状. 正方形容器(温度为 T_0)中,加热平板(温度为 T_1)周围气体的行为. Knudsen 数定义(参见1节最后一段)所取的参考长度、密度及温度分别为平板的宽度 L 、容器中气体的平均密度及 T . (在文献[28]中参考温度为 T_1)

沿壁面有温度梯度的壁面上方的温度场,其中引起了热蠕动流^[7~13]度梯度大略与平均自由程的平方根成反比,因此,流动正比于平均自由程的平方根.这种流动在一个简单的实验中用风车(windmills)做了检测^[67],它类似于我们以前的热蠕动流的实验^[11,12].

实验在一个置于钢座的玻璃钟罩圆柱形真空室中(直径 250mm,高 300mm)进行的,这里压强可以控制在大气压到几个 Pa 之间.这个真空室与文献[11]和[12]中实验用的相同.一块平板,即一块矩形薄铜片(厚 0.2mm)垂直放入容器中.沿平板两侧嵌入镍铬合金丝,做成电加热器加热平板.平板温度用一个变压器调节从真空室外供给的电流而得到控制.平板周围引起的流动用小型的由塑料膜片做的风车检测.进行了两种类型的实验:沿平板的垂直边放置加热器,在靠近平板上下水平边的中心部分,用类似于文献[11]的风车检测垂直流动,沿平板上边和下边置加热器,在靠近两个垂直边的中心部分,用类似于文献[12]中的风车检测水平流动.实验结果与图 11 中数值计算结果一致.即是说,检测到靠近边缘处有与图 11 中同方向的流动,但离边缘稍远处没有发现流动.

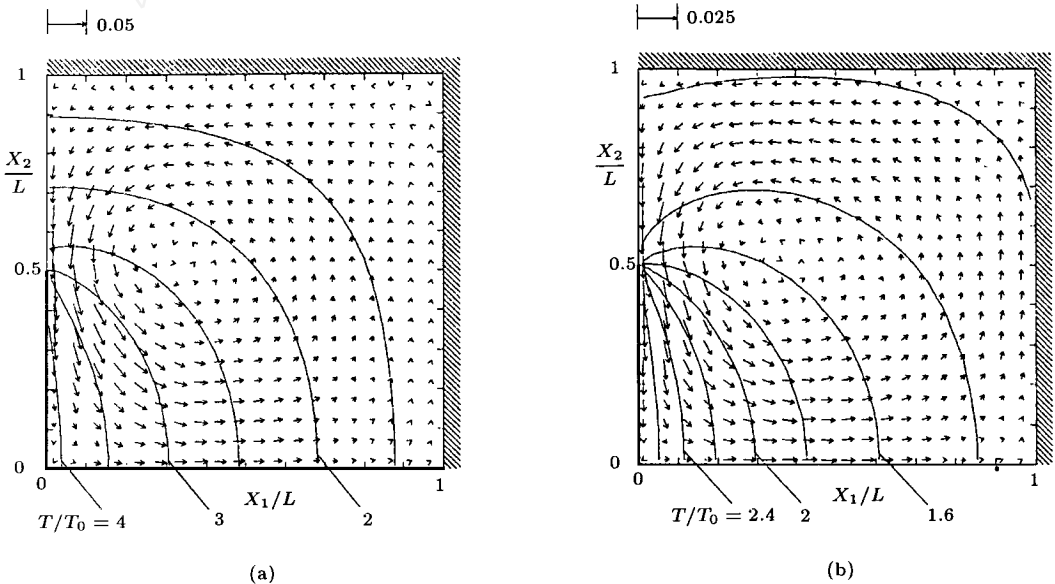


图 1 图 10 中问题(4.1 节中例子) ($T_1/T_0 = 5$) 的速度流场和等温线. (a) $Kn = 0.05$, (b) $Kn = 0.5$. 箭头指示其出发点的流动速度;每个图中标明 $(\frac{1}{2}v^2)/(2RT_0)^{1/2}$ 的比例尺(注意(a)和(b)中比例尺的不同). ——代表等温线. 相邻等温线间 T/T_0 值的差距, (a)中为 0.5, (b)中为 0.2. 关于 Knudsen 数的定义, 参见图 10 的说明.

4.2 周期温度分布的槽道内引起的单向流

众所周知在有不变的温度梯度的槽道或管道内引起单向流动(热蒸发流). 为了在长的槽道(或管道中)维持这种流动,槽道(或管道)两端必须保持很大的温度差. 这对这种流动的工程应用是不利的. 自然地我们试图探求一种温度引起的单向流动存在的可能性,而不用较大的温度差. 早在 1910 年, Knudsen 报告了一个有趣的实验^[14,15]. 在这个实验中,两个压力计由一根带有几个窄和宽的区段的管子连接起来. 这里,在管子的这些区段每隔一个接头处加热,使加

热和不加热接头的温度差保持 $500\text{ }^{\circ}\text{C}$,并且得到的压力比大约为 10. 这说明 ,沿槽道(或管道)没有平均温度差(且没有平均压力梯度) ,在槽道中存在单向流动的可能性. 然而 ,直到最近 ,在逆温度梯度区域内流动的阶流式机制中才有人研究了这种类型的流动^[30].

考虑槽道内的稀薄气体. 槽道由距离 D 的两个平行平板壁面组成. 在壁上开了一些矩形截面的槽(深 d ,宽 b) ,周期为 L ,如图 12(a) 所示. 壁的表面 P 温度 T_w 保持周期的线性分布 ,如图 12(b) 所示. 槽道中气体的行为在文献[30]中用标准的直接模拟 Monte Carlo 方法 (Bird 方法) 进行了数值研究. 在没有外加的压力梯度的情况下 ,在管道的干线(或较狭的)部分的温度梯度方向产生了单向流 ,如图 13 ,图 14 所示. 在壁上开的槽中 ,气体在 $Kn = 0.05$ 时循环(图 13) ,但在 $Kn = 2$ 时几乎静止(图 14) . 通过槽道的质量流速率 M (在 x_3 方向单位宽度) 与 Kn 数的关系如图 15 所示. $M / \rho_{av} (2RT_0)^{1/2} D$ (其中 ρ_{av} 是槽道中气体的平均

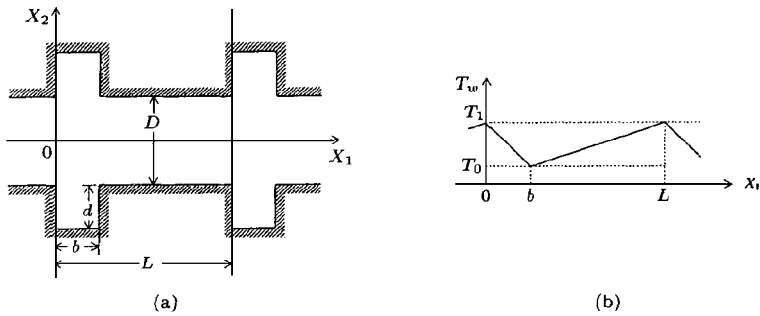


图 12 4.2 节中问题的槽道形状及其壁面温度分布 : 在具有周期性温度分布的槽道内引起的单向流动. (a) 槽道形状 , (b) 槽道壁面的温度分布 T_w .

Knudsen 数定义中所取的参考长度、密度及温度(参见 1 节最后一段)分别为槽道宽度 D 、整个槽道中气体的平均密度及 T_0 .

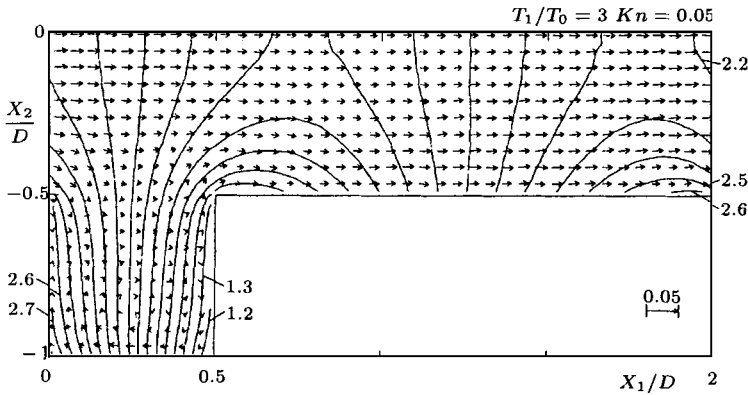


图 13 图 12 (4.2 节) 中问题的速度流场及等温线 I: $Kn = 0.05$, $T_1 / T_0 = 3$, $b / D = 1 / 2$, $d / D = 1 / 2$, $L / D = 2$. 箭头指示其出发点的流动速度 , 图中标明了 $\left[v_i^2 / (2RT_0)^{1/2} \right]$ 的比例尺 , — 代表等温线 , 相邻等温线间的 T / T_0 值之差为 0.1 . 关于 Knudsen 数的定义参见图 12 的说明

工程

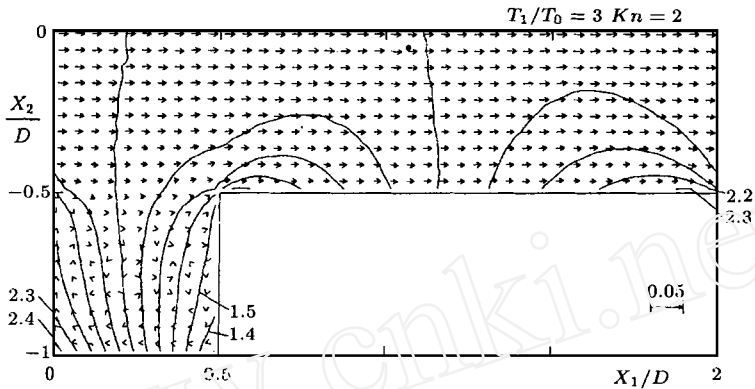


图 14 图 12 (4.2 节) 中问题的速度场及等温线 II: $Kn = 2$, $T_1/T_0 = 3$, $b/D = 1/2$, $d/D = 1/2$, $L/D = 2$. 箭头指示其出发点的流动速度, 图中标明了 $(v_i^2 \cdot \rho_{av} / (2RT_0))^{1/2}$ 的比例尺. — 代表等温线, 相邻等温线间的 T/T_0 值之差为 0.1. 关于 Knudsen 数的定义参见图 12 的说明

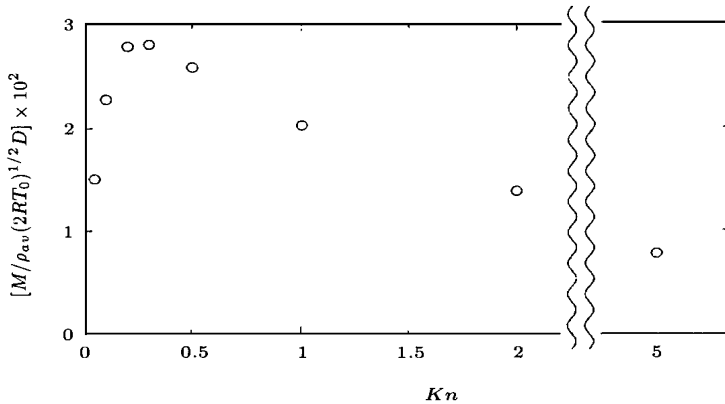


图 15 图 12 (4.2 节) 中问题 ($T_1/T_0 = 3$, $b/D = 1/2$, $d/D = 1/2$, $L/D = 2$) 通过槽道的单向流的质量流速率: $M / (\rho_{av} (2RT_0))^{1/2} D \sim Kn$. 关于 Knudsen 数的定义, 参见图 12 的说明

密度), 首先随 Kn 增加, 在大约 $Kn = 0.3$ 时达到最大值, 随着 $Kn \rightarrow 0$, 慢慢减小到零. 在自由分子情况下, 整个场的流动消失. 这是文献[68]和[69]中给出的一般定理的一个特殊情况. 在壁上开槽深度为 0 时, 质量流速率 M (或单向流) 消失 (在数值计算的精度内). Golse^[70] 根据线化的 Boltzmann 方程给出了数学证明, 证明在这个情况下对任意的温度分布单向流动不存在.

单向流动是由于有沟槽边壁的堵塞效应建立的. 考虑有温度梯度壁面上边的静止的气体, 气体由壁面加热或冷却, 气体分子撞击壁面, 它们从较热的区域比从较冷区域运输更多的切向动量给壁面. 在漫反射情况, 从壁面反射的分子对切向动量运输没有贡献. 整体来说, 与壁面温度梯度反方向的动量从气体传给壁面. 反作用通过反射分子和周围气体分子间的分子碰撞传给气体, 并且通过碰撞分子不再传递任何切向动量给壁面的方式来产生一种流动. 在沟槽内,

如此产生流动(在小 Knudsen 数时),指向沟槽底部的温度梯度的方向(或指向管道狭窄部分温度梯度的反方向),并被沟槽的边壁堵塞(图 13).或者当平均自由程大于沟槽的尺寸时流动本身就很难产生,因为上边指出的反作用直接传给边壁(图 14,在沟槽内的箭头的某种随机性表明这种流动与这里的计算误差的量级相比是小量).这样,在槽道狭窄部分的温度梯度方向建立起了单向流动.

这种流动更详细的情况和它的抽吸效应的讨论在文献[30]中给出.

致谢 作者衷心感谢 H. Sugimoto 博士在准备插图过程中给予的帮助.

参 考 文 献

- 1 Sone Y, Aoki K, Takata S, Sugimoto H and Bobylev A V. Inappropriateness of the heat - conduction equation for description of a temperature field of a stationary gas in the continuum limit :examination by asymptotic analysis and numerical computation of the Boltzmann equation. *Phys Fluids*,1996,**8**:628 ~ 638
- 2 Sone Y, Takata S and Sugimoto H. The behavior of a gas in the continuum limit in the light of kinetic theory : the case of cylindrical Couette flows with evaporation and condensation. *Phys Fluids*, (to be published)
- 3 Sone Y and Sugimoto H. Strong evaporation from a plane condensed phase. In: Meier GEA and Thompson PA Ed. *Adiabatic Waves in Liquid - Vapor Systems*. 293 ~ 304. Berlin : Springer , 1990
- 4 Sone Y and Takata S. Discontinuity of the velocity distribution function in a rarefied gas around a convex body and the S layer at the bottom of the Knudsen layer. *Transp Theor Stat Phys*,1992,**4** - **6**:501 ~ 530
- 5 Sone Y. New kind of boundary layer over a convex solid boundary in a rarefied gas. *Phys Fluids*,1973,**16**:1422 - - 1424
- 6 Sugimoto H and Sone Y. Numerical analysis of steady flows of a gas evaporating from its cylindrical condensed phase - on the basis of kinetic theory. *Phys Fluids A*,1992,**4**:419 ~ 440
- 7 Kenard E H. *Kinetic Theory of Gases*. New York : McGraw - Hill. 1938
- 8 Loeb L. *Kinetic Theory of Gases*. New York : Dover. 1961
- 9 Sone Y. Thermal creep in rarefied gas. *J Phys Soc Jpn*,1966,**21**:1836 ~ 1837
- 10 Ohwada T, Sone Y and Aoki K. Numerical analysis of the shear and thermal creep flows of a rarefied gas over a plane wall on the basis of the linearized Boltzmann equation for hard - sphere molecules. *Phys Fluids A*,1989,**1**:1588 ~ 1599
- 11 Sone Y. A simple demonstration of a rarefied gas flow induced over a plane wall with a temperature gradient. *Phys Fluids A*,1991,**3**:997 ~ 998
- 12 Sone Y, Sawada K and Hirano H. A simple experiment on the strength of thermal creep flow of a rarefied gas over a flat wall. *Eur J Mech, B/ Fluids*,1994,**13**:299 ~ 303
- 13 Wakabayashi M, Ohwada T and Golse F. Numerical analysis of the shear and thermal creep flows of a rarefied gas over the plane wall of a Maxwell - type boundary condition on the basis of the Boltzmann equation for hard - sphere molecules. *Eur J Mech, B/ Fluids*,1996,**15**:175 ~ 201
- 14 Knudsen M. Eine Revision der Gleichgewichtsbedingung der Gase. Thermische Molekularströmung. *Ann Physik*,1910,**31**:205 ~ 229
- 15 Knudsen M. Thermischer Molekulardruck der Gase in Röhren. *Ann Physik*,1910,**33**:1435 ~ 1448
- 16 Sone Y and Yamamoto K. Flow of rarefied gas through a circular pipe. *Phys Fluids*,1968,**11**:1672 ~ 1678; Erratum. *Phys Fluids*,1970,**12**:2301
- 17 Niimi H. Thermal creep flow of rarefied gas between two parallel plates. *J Phys Soc Jpn*,1971,**30**:572 ~ 574
- 18 Kanki T and Iuchi S. Poiseuille flow and thermal creep of a rarefied gas between parallel plates. *Phys Fluids*,1973,**16**:594 ~ 599
- 19 Loyalka S K. Comments on Poiseuille flow and thermal creep of a rarefied gas between parallel plates. *Phys Fluids*,1974,**17**:1053 ~ 1055
- 20 Sone Y and Itakura E. Analysis of Poiseuille and thermal transpiration flows for arbitrary Knudsen numbers by a modified Knudsen number expansion method and their data base. *J Vacuum Soc Jpn*,1990,**38**:92 ~ 94 (in Japanese)
- 21 Ohwada T, Sone Y and Aoki K. Numerical analysis of the Poiseuille and thermal transpiration flows between two parallel plates

- on the basis of the Boltzmann equation for hard - sphere molecules. *Phys Fluids A* ,1989 ,**1**:2042 ~ 2049 ; Erratum. *Phys Fluids A* ,1990 ,**2**:639
- 22 Sone Y and Aoki K. Molecular Gas Dynamics. Tokyo : Asakura. 1994 (in Japanese)
- 23 Sone Y. Flow induced by thermal stress in rarefied gas. *Phys Fluids* ,1972 ,**15**:1418 ~ 1424
- 24 Ohwada T and Sone Y. Analysis of thermal stress slip flow and negative thermophoresis using the Boltzmann equation for hard - sphere molecules. *Eur J Mech, B/ Fluids* ,1992 ,**11**:389 ~ 414
- 25 Kogan M N , Galkin V S and Fridlender O G. Stresses produced in gasses by temperature and concentration inhomogeneities. New types of free convection. *Sov Phys Usp* ,1976 ,**19**:420 ~ 428
- 26 Aoki K, Sone Y and Yano T. Numerical analysis of flow induced in a rarefied gas between noncoaxial cylinder with different temperatures for entire range of the Knudsen number. *Phys Fluids A* ,1989 ,**1**:409 ~ 419
- 27 Kogan M N. Kinetic theory in aerothermodynamics. *Prog Aerospace Sci* ,1992 ,**29**:271 ~ 354
- 28 Aoki K, Sone Y and Masukawa N. A rarefied gas flow induced by a temperature field. in: Harvey J and Lord G Ed. Rarefied Gas Dynamics Vol I. 35 ~ 41. Oxford: Oxford Univ Press , 1995
- 29 Aoki K, Sone Y and Waniguchi Y. A rarefied gas flow induced by a temperature field: Numerical analysis of the flow between two coaxial elliptic cylinders with different uniform temperatures. *Computers and Mathematics with Applications* , (to be published)
- 30 Sone Y, Waniguchi Y and Aoki K. One - way flow of a rarefied gas induced in a channel with a periodic temperature distribution. *Phys Fluids* ,1996 ,**8**:2227 ~ 2235
- 31 Sone Y and Aoki K. Forces on a spherical particle in a slightly rarefied gas. in: Potter J L Ed. Rarefied Gas Dynamics Part I. New York: AIAA , 1977 , 417 ~ 433
- 32 Loyalka S K. Mechanics of aerosols in nuclear reactor safety: A review. *Progress in Nuclear Energy* ,1983 ,**12**:1 ~ 56
- 33 Talbot L. Thermophoresis —A review. In: Fisher S S Ed. Rarefied Gas Dynamics Part I. New York: AIAA , 1981 , 467 ~ 488
- 34 Beresnev S and Chernyak V. Thermophoresis of a spherical particle in a rarefied gas: Numerical analysis based on the model kinetic equations. *Phys Fluids* ,1995 ,**7**:1743 ~ 1756
- 35 Takata S and Sone Y. Flow induced around a sphere with non - uniform surface temperature in a rarefied gas , with application to the drag and thermal force problems of a spherical particle with arbitrary thermal conductivity. *Eur J Mech, B/ Fluids* ,1995 , **14**:487 ~ 518
- 36 Wadsworth D C, Muntz E P, Pham - Van - Diep G and Keeley P. Crookes ' radiometer and micromechanical actuators. in: Harvey J and Lord G Ed. Rarefied Gas Dynamics Vol I. Oxford: Oxford Univ Press , 1995 , 708 ~ 714
- 37 Ota M and Kawata N. Direct simulation of gas flows around rarefied gas dynamics engines for micro - machine. In: Harvey J and Lord G Ed. Rarefied Gas Dynamics Vol I. Oxford: Oxford Univ Press , 1995 , 722 ~ 728
- 38 Huber C A. Nanowire array composite. *Science* ,1994 ,**263**:800 ~ 802
- 39 Esashi M, Shoji S and Nakano A. Normally closed microvalve and micropump fabricated on silicon wafer. *Sensors and Actuators* ,1989 ,**20**:163 ~ 169
- 40 Pham - Van - Diep G, Keeley P, Muntz E P and Weaver D P. A micromechanical Knudsen Compressor. In: Harvey J and Lord G Ed. Rarefied Gas Dynamics Vol I. Oxford: Oxford Univ Press ,1995 , 715 ~ 721
- 41 Sone Y. Asymptotic theory of a steady flow of a rarefied gas past bodies for small Knudsen numbers. in: Gatignol R and Soubaramayer Ed. Advances in Kinetic Theory and Continuum Mechanics. Berlin : Springer , 1991 , 19 ~ 31
- 42 Sone Y. Analytical and numerical studies of rarefied gas flows on the basis of the Boltzmann equation for hard - sphere molecules. in: Beylich A E Ed. Rarefied Gas Dynamics. Weinheim: VCH,1991 , 489 ~ 504
- 43 Sone Y. Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary I. In: Trilling L and Wachman H Y Ed. Rarefied Gas Dynamics. New York : Academic Press , 1969 , 243 ~ 241
- 44 Sone Y. Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary II. in: Dini D Ed. Rarefied Gas Dynamics. 737 ~ 749. Pisa : Editrice Tecnico Scientifica , 1971 , 737 ~ 749
- 45 Sone Y and Aoki K. Steady gas flows past bodies at small Knudsen numbers —Boltzmann and hydrodynamic system —. *Transp Theor Stat Phys* ,1987 ,**16**:189 ~ 199
- 46 Hilbert D. Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Wien : Teubner. 1924

- on the basis of the Boltzmann equation for hard - sphere molecules. *Phys Fluids A* ,1989 ,**1**:2042 ~ 2049 ; Erratum. *Phys Fluids A* ,1990 ,**2**:639
- 22 Sone Y and Aoki K. Molecular Gas Dynamics. Tokyo : Asakura. 1994 (in Japanese)
- 23 Sone Y. Flow induced by thermal stress in rarefied gas. *Phys Fluids* ,1972 ,**15**:1418 ~ 1424
- 24 Ohwada T and Sone Y. Analysis of thermal stress slip flow and negative thermophoresis using the Boltzmann equation for hard - sphere molecules. *Eur J Mech, B/ Fluids* ,1992 ,**11**:389 ~ 414
- 25 Kogan M N , Galkin V S and Fridlender O G. Stresses produced in gasses by temperature and concentration inhomogeneities. New types of free convection. *Sov Phys Usp* ,1976 ,**19**:420 ~ 428
- 26 Aoki K, Sone Y and Yano T. Numerical analysis of flow induced in a rarefied gas between noncoaxial cylinder with different temperatures for entire range of the Knudsen number. *Phys Fluids A* ,1989 ,**1**:409 ~ 419
- 27 Kogan M N. Kinetic theory in aerothermodynamics. *Prog Aerospace Sci* ,1992 ,**29**:271 ~ 354
- 28 Aoki K, Sone Y and Masukawa N. A rarefied gas flow induced by a temperature field. in : Harvey J and Lord G Ed. Rarefied Gas Dynamics Vol I. 35 ~ 41. Oxford: Oxford Univ Press , 1995
- 29 Aoki K, Sone Y and Waniguchi Y. A rarefied gas flow induced by a temperature field : Numerical analysis of the flow between two coaxial elliptic cylinders with different uniform temperatures. *Computers and Mathematics with Applications* , (to be published)
- 30 Sone Y, Waniguchi Y and Aoki K. One - way flow of a rarefied gas induced in a channel with a periodic temperature distribution. *Phys Fluids* ,1996 ,**8**:2227 ~ 2235
- 31 Sone Y and Aoki K. Forces on a spherical particle in a slightly rarefied gas. in : Potter J L Ed. Rarefied Gas Dynamics Part I. New York : AIAA , 1977 , 417 ~ 433
- 32 Loyalka S K. Mechanics of aerosols in nuclear reactor safety : A review. *Progress in Nuclear Energy* ,1983 ,**12**:1 ~ 56
- 33 Talbot L. Thermophoresis —A review. In : Fisher S S Ed. Rarefied Gas Dynamics Part I. New York : AIAA , 1981 , 467 ~ 488
- 34 Beresnev S and Chernyak V. Thermophoresis of a spherical particle in a rarefied gas : Numerical analysis based on the model kinetic equations. *Phys Fluids* ,1995 ,**7**:1743 ~ 1756
- 35 Takata S and Sone Y. Flow induced around a sphere with non - uniform surface temperature in a rarefied gas , with application to the drag and thermal force problems of a spherical particle with arbitrary thermal conductivity. *Eur J Mech, B/ Fluids* ,1995 , **14**:487 ~ 518
- 36 Wadsworth D C, Muntz E P, Pham - Van - Diep G and Keeley P. Crookes ' radiometer and micromechanical actuators. in : Harvey J and Lord G Ed. Rarefied Gas Dynamics Vol I. Oxford: Oxford Univ Press , 1995 , 708 ~ 714
- 37 Ota M and Kawata N. Direct simulation of gas flows around rarefied gas dynamics engines for micro - machine. In : Harvey J and Lord G Ed. Rarefied Gas Dynamics Vol I. Oxford: Oxford Univ Press , 1995 , 722 ~ 728
- 38 Huber C A. Nanowire array composite. *Science* ,1994 ,**263**:800 ~ 802
- 39 Esashi M, Shoji S and Nakano A. Normally closed microvalve and micropump fabricated on silicon wafer. *Sensors and Actuators* ,1989 ,**20**:163 ~ 169
- 40 Pham - Van - Diep G, Keeley P, Muntz E P and Weaver D P. A micromechanical Knudsen Compressor. In : Harvey J and Lord G Ed. Rarefied Gas Dynamics Vol I. Oxford: Oxford Univ Press ,1995 , 715 ~ 721
- 41 Sone Y. Asymptotic theory of a steady flow of a rarefied gas past bodies for small Knudsen numbers. in : Gatignol R and Soubaramayer Ed. Advances in Kinetic Theory and Continuum Mechanics. Berlin : Springer , 1991 , 19 ~ 31
- 42 Sone Y. Analytical and numerical studies of rarefied gas flows on the basis of the Boltzmann equation for hard - sphere molecules. in : Beylich A E Ed. Rarefied Gas Dynamics. Weinheim: VCH,1991 , 489 ~ 504
- 43 Sone Y. Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary I. In : Trilling L and Wachman H Y Ed. Rarefied Gas Dynamics. New York : Academic Press , 1969 , 243 ~ 241
- 44 Sone Y. Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary II. in : Dini D Ed. Rarefied Gas Dynamics. 737 ~ 749. Pisa : Editrice Tecnico Scientifica , 1971 , 737 ~ 749
- 45 Sone Y and Aoki K. Steady gas flows past bodies at small Knudsen numbers —Boltzmann and hydrodynamic system —. *Transp Theor Stat Phys* ,1987 ,**16**:189 ~ 199
- 46 Hilbert D. Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Wien : Teubner. 1924