第27卷　第2期　　力　学　进　展　　Vol. 27 No. 2
1997年5月25日　　ADVANCES IN MECHANICS　　May 25, 1997

# 半解析函数、共轭解析函数及其在力学中的初步应用*

王见定
北京工业大学分校，北京　100020

**摘　要**　综述了半解析函数、共轭解析函数研究进展及其在力学中的初步应用.

**关键词**　半解析函数，共轭解析函数，调和场，共轭调和场

## 1　引　言

复变函数起源于19世纪初，起初它的核心理论是解析函数. 解析函数在解决平面无源无旋场的问题时显示了巨大的威力，但对有源场或有旋场就无能为力了. 到了20世纪30年代，相继出现了准解析函数[1]及广义解析函数[2]，它们是实部和虚部满足方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}&=au+bv\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}&=cu+dv\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

的复变函数，这显然是对解析函数的推广. 尽管近几十年理论上得到了不少结果，但通常很繁琐，且至今在力学、物理学上找不到明显的背景. 1983年王见定首次提出半解析函数概念，并在1988年提出共轭解析概念[3]，它们可以描述无源场或无旋场. 赵桢进一步提出双解析函数、复调和函数理论[4]，解决了一类有源无旋（有旋无源）的边值问题. 本文就以上几个方面介绍有关的研究进展及其力学应用.

## 2　半解析函数

假定 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在域 $D$ 内连续. 如果对于每点 $(x,y)\in D$，都有 $u_x=v_y$，我们称 $f(z)$ 在 $D$ 内是第一类半解析的；如果对于每点 $(x,y)\in D$ 都有 $u_y=-v_x$，则

* 北京市自然科学基金资助项目.

称 $f(z)$ 在 $D$ 内是第二类半解析的 至今已取得的主要结果如下:

定理2 1 如果 $f_1(z), f_2(z)$ 是第一 (二) 类半解析的, 则 $a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)$ 也是第一 (二) 类半解析的 其中 $a_1, a_2$ 为任意实数

定理2 2 如果 $f(z)$ 在单连通域 $D$ 内是第一类半解析的, $c$ 为 $D$ 内任意一条逐段光滑曲线, 则

$$\oint f(z)\mathrm{d}z \quad \text{是一实数} \tag{2 1}$$

对于多连通区域有:

定理2 3 设 $D$ 是一个多连通域, $c = c_0 + \cdots + c_n$ 是 $D$ 的边界 如果 $f(z)$ 在 $D$ 内是第一类半解析的, 则

$$\oint f(z)\mathrm{d}z \quad \text{是一实数} \tag{2 2}$$

定理2 4 如果 $f(z)$ 在单连通域 $D$ 内是第二类半解析的, $c$ 为 $D$ 内任意一条逐段光滑曲线, 则

$$\oint f(z)\mathrm{d}z \quad \text{是一虚数} \tag{2 3}$$

对于多连通域有:

定理2 5 设 $D$ 是一个多连通域, $c = c_0 + \cdots + c_n$ 是 $D$ 的边界 如果 $f(z)$ 在 $D$ 内是第二类半解析的, 则

$$\oint f(z)\mathrm{d}z \quad \text{是一虚数} \tag{2 4}$$

定理2 6 设 $D$ 是一单连通域, $u_x, v_y$ 在 $D$ 内连续 如果对于任意曲线 $c \subset D$ 都有 $\oint (f)\mathrm{d}z$ 是一实数, 则 $f(z)$ 在 $D$ 内是第一类半解析的

定理2 7 设 $D$ 是一单连通域, $u_y, v_x$ 在 $D$ 内连续 如果对于任意曲线 $c \subset D$ 都有 $\oint f(z)\mathrm{d}z$ 是一虚数, 则 $f(z)$ 在 $D$ 内是第二类半解析的

定理2 8 如果 $f(z)$ 在 $D$ 内是第一 (二) 类半解析的, 则 $i f(z)$ 在 $D$ 内是第二 (一) 类半解析的

从第一类、第二类半解析函数的定义可以看出第一类半解析函数可以直接表示无源场, 第二类半解析函数可以直接表示无旋场, 因此定理2 8表示无源场和无旋场以 $90°$ 旋转相互转化

定理2 9 如果 $f(z)$ 是第二类半解析的, 则一定存在 $\varphi(x, y)$, 使得

$$\overline{f(z)} = \nabla \varphi(x, y) \tag{2 5}$$

这样的 $\varphi(x, y)$ 有无穷多个, 但彼此相差一个常数 相反的, 如果 $\overline{f(z)} = \nabla \varphi(x, y)$, 则 $f(z)$ 一定是第二类半解析的 其中 $\nabla \varphi(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$

对于第一类半解析函数也有类似结果

以下是半解析函数的积分形式

定理2 10　设$w(z)$在$D$内是半解析的，$\Gamma$是$D$的边界，则$w(z)$一定有下面积分形式

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi}\iint_{D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\sigma_{\zeta} \tag{2 6}$$

其中$f(z)$是$D$内纯实或纯虚的连续函数　$f(z)$是纯实时，$w(z)$是第二类半解析函数；$f(z)$是纯虚时，$w(z)$是第一类半解析函数

定理2 11　形式为

$$w(z)=\iint_{D}\frac{g(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}\sigma_{z_0} \tag{2 7}$$

的函数是定义在域$D$的半解析函数（第二类），其中$g(z_0)$是定义在$D$内任意实值连续函数　由第一、二类半解析函数的相互转化可得，形如

$$w(z)=i\iint_{D}\frac{g(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}\sigma_{z_0} \tag{2 8}$$

的函数是定义在$D$内的第一类半解析函数

以下结论是重要的复变函数分解定理

定理2 12　设$f(z)\in c'(D)\cap c(\overline{D})$，则$f(z)$一定可分解成两个半解析函数的和，即

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z) \tag{2 9}$$

其中$f_1(z)$，$f_2(z)$分别是$D$内的第一、二类半解析函数

它表明一个可微的平面场总可以看成一个无源的平面场和一个无旋平面场的和

以上所有结论有明显的力学应用价值

## 3　共轭解析函数

1988年王见定又提出了共轭解析函数概念，这是一类和解析函数对称的函数，它的出现使复变函数达到对称完美，同时使平面场的结构达到对称完美　共轭解析函数可以用来解决解析函数所能解决的所有问题，并且比解析函数更直观、方便

设$w=f(z)$在域$D$内定义，对于给定的$z\in D$，如果$\Delta z$按任意方式趋于零时，$\frac{\Delta w}{\Delta \overline{z}}$的极限存在，则称此极限为$f(z)$在$z$处的共轭导数，记为

$$f^{0}(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta \overline{z}} \tag{3 1}$$

此时也称$f(z)$在$z$处共轭可导

如果$f(z)$在$z$的某邻域内共轭可导，则称$f(z)$在$z$处共轭解析　如果$f(z)$在域$D$内每点都共轭解析，则称$f(z)$在域$D$内是共轭解析的

极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f(z_k)\overline{\Delta z_k}=\int_{C}f(z)\overline{\mathrm{d}z} \tag{3 2}$$

称为 $f(z)$ 沿定向曲线 $c$ 的共轭积分. 此极限不依赖曲线 $c$ 的分割以及 $z_k$ 的取法. 其中, $d = \max\{|\Delta z_k|\}$. 称变换 $w = f(z)$ 在 $z_0$ 点是反向保角的, 如果该变换使通过 $z_0$ 的任意两条曲线夹角大小相同、方向相反.

3.1 代数性质

定理3.1 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 在域 $D$ 内共轭解析, 则其和、差、积、商 (分母不为零) 在 $D$ 内也共轭解析.

定理3.2 共轭解析函数复合后也共轭解析.

定理3.3 共轭解析函数的反函数也共轭解析.

定理3.4 设 $f(z)$ 在域 $D$ 内共轭解析, 在闭域 $\overline{D} = D + C$ 上连续, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta - z}}\, \overline{d\zeta} \tag{3.3}$$

定理3.5 设 $f(z)$ 在域 $D$ 内共轭解析, 则

$$\oint f(z)\, \overline{dz} = 0 \tag{3.4}$$

定理3.6 如果对于任意曲线 $c \subset D$, 都有

$$\oint f(z)\, \overline{dz} = 0$$

则 $f(z)$ 在 $D$ 内共轭解析.

3.2 级数理论

定理3.7 设 $f(z)$ 在域 $D$ 内共轭解析, $a \in D$, 只要圆 $K$: $|z - a| < R$ 含于 $D$, 则 $f(z)$ 在 $K$ 内可展成共轭级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{(z - z_0)}^n \tag{3.5}$$

其中 $c_n = \frac{f^{[n]}(a)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 且展式唯一, 其中 $f^{[n]}(a)$ 为 $f(z)$ 在 $a$ 处的 $n$ 阶共轭导数.

定理3.8 $f(z)$ 在域内共轭解析的充分必要条件是 $f(z)$ 在 $D$ 内任意一点 $a$ 的领域内可展成 $\overline{z - z_0}$ 的幂级数.

3.3 几何性质

定理3.9 如果 $w = f(z)$ 在域 $D$ 共轭解析, 则它在共轭导数不为零的各点都是反向保角的.

定理3.10 如果 $w = f(z)$ 在域 $D$ 内共轭解析, 且不恒为常数, 则象 $f(z)$ 也是一个域.

## 4 半解析函数和共轭解析函数的初步应用

由于在一个区域内无源或无旋的矢量场, 如流动速度场、应变场等, 都可以和一个第一类第二类半解析函数相对应, 因此以上理论有明显的力学应用价值.

下面举例说明共轭解析函数及半解析函数在描述平面流动、平面电场中的应用

例1 研究在点 $z=0$ 处垂直于 $z$ 平面的一条无限长均匀电荷线, 单位长度所带电荷量为 $m$ 所激发的静电场

显然, 这是一个调和平面场, 只需研究 $z$ 平面上场的特点即可. 我们引进共轭解析函数

$$w(z)=-2m(\ln|z|-\mathrm{i}\,\mathrm{Ang}\,z)=-2m\,\overline{\ln z} \tag{4.1}$$

容易检验

$$\mathrm{Ang}\,z=\text{常数} \tag{4.2}$$

即为所求电场的电力线 $\ln|z|=$ 常数, 即

$$|z|=\text{常数} \tag{4.3}$$

为所求电场的等位线 可取的是, $w(z)$ 的共轭导数

$$w^0(z)=\frac{2m}{\bar{z}} \tag{4.4}$$

正好是该电场的场强

下面再来看一个稳定平面流动的例子.

例2 我们用共轭解析函数描述以等速 $a$ 从平面的左方向右方的流动

显然, 此流动的流线

$$ay=c_1 \tag{4.5}$$

等势线

$$ax=c_2 \tag{4.6}$$

我们可以用共轭解析函数

$$f(z)=ax-\mathrm{i}ay \tag{4.7}$$

来表示此流动, 并称它为此流动的复形 它的共轭导数

$$f^0(z)=a \tag{4.8}$$

是流动的速度

在静电场中, 我们可以用共轭解析函数 $w=f(z)$ 来作为它的复形, 且它的共轭导数

$$f^0(z)=E\quad(\text{场强}) \tag{4.9}$$

正好是该电场的场强

无源无旋流动的复形、流速都是共轭解析函数, 且复形的共轭导数为流速 在平面静电场中我们可以引进共轭解析函数来同时描述该静电场的电位线和电力线, 此共轭解析函数也称为该电场的复形, 且此复形的共轭导数即为该电场的场强

可见，共轭导数在平面场中有明确的物理力学含义，它可以看作平面场中的变化率.

我们知道解析函数和调和场对应，我们也可把与解析函数对称的共轭解析函数所对应的场称为共轭调和场.

例3　无旋平面场可表示为

$$w(z) = \iint_D \frac{g(z_0)}{z - z_0} \mathrm{d}\sigma_{z_0} \tag{4.10}$$

的形式. 无源平面场可表示为

$$w(z) = i\iint_D \frac{g(z_0)}{z - z_0} \mathrm{d}\sigma_{z_0} \tag{4.11}$$

的形式. 其中，$g(z_0)$ 是定义在 $D$ 内的任意实值连续函数.

此时的 $D$ 可以是有界域，边界条件可由具体力学问题而定. 这个结论给出了无旋场、无源场复积分形式，为研究无源场、无旋场提供了一个复分析工具.

此外，由半解析函数的结论，可以得到:

定理4.1　无源平面场和无旋平面场互以 90°旋转而相互转化.

这个结论使得在平面场的研究中，只需研究无源场或无旋场一种. 这不仅使平面场得到统一，且使研究的工作量大大减少.

半解析函数的理论研究，也使我们对平面场理解得更深刻. 对于可微的平面场，我们有:

定理4.2　可微的平面场总可表示为无源平面场和无旋平面场的和.

这个结论可由复变函数分解定理以及半解析函数的力学背景[3]直接得到.

继王见定提出半解析函数、共轭解析函数以来，不少学者也在研究半解析函数、共轭解析函数以及相关理论. 例如，朱如曾发表了论文“复变函数分解定理的改进”[7]，刘珍儒发表了“关于半解析函数几个充要条件及半解析开拓的R-S对称原理”，刘国忠发表了“纯半解析函数的可调和性及其在场论中的应用”，解长利发表了“复分析方法在流体力学中的某些应用”，赵桢等人在研究半解析函数、共轭解析函数的同时，进一步提出了双解析函数、复调和函数等相关理论[8].

总之，由于半解析函数、共轭解析函数都有很好的背景，搞这方面的研究很多，以后将会陆续看到有关论文，甚至有人把半解析函数的理论引到了经济领域[5,6]，描写经济领域的平衡问题. 可以相信，半解析函数及其相关理论将有助于力学的进展，希望广大力学工作者来共同发展这一理论及其应用.

## 参　考　文　献


1 Bers L. Theory of Pseudo-analytic function. New York University, 1953

2 Vekua IN. Generalized Analytic Functions. Moscow, 1959. (in Russian)

3 王见定. 半解析函数、共轭解析函数. 北京: 北京工业大学出版社, 1988

4 赵桢. 双解析函数和复调和函数以及它们的基本边值问题. 北京师范大学学报, 1995, (2)

5 Wang Jianding. Semi-analytic function and economic field. Bulletin of 50th session of the International Statistical Institute. Beijing, 1995

6 Mu Zhu, Wang Jianding. A new method of statistical test for existence of pollution sources in atmosphere, Bulletin of 47th Session of the International Statistical Institute. Paris, 1989
7 朱如曾, 朱颖 复变函数分解定理的改进 北京工业大学学报, 1994, (3):
8 Zhao Zhen. Bianalytic function and its applications, Proceedings of the Second Asian Mathematical Conference, Thailand, 1995

# Semi-analytic Function, Conjugate-analytic Function and Their Applications in Mechanics

Wang Jianding
The Branch of Beijing Polytechnic University, Beijing 100020

**Abstract** In this paper, semi-analytic function, conjugate-analytic function and their application in mechanics are reviewed.

**Keywords** semi-analytic function, conjugate analytic function, harmonic field, conjugate harmonic field

(上接第282页)

笔者有幸较早阅读这部著作, 只用三天就看完了全书, 觉得是一种美好的享受, 回味无穷. 于是, 在北京大学研究生课程《图像分析》中, 用八个学时讲授了本书的主要内容: (1) 时间-频率分析和连续子波变换, (2) 正交子波变换和多分辨率分析, (3) 非正常子波变换——框架及双正交子波, (4) 正交子波包, (5) 二维离散子波变换和图像边缘检测; 收到了良好的教学效果 从而更深刻地体会到,《子波变换与子波分析》是为想学习和掌握子波基本理论、方法和应用技巧的所有读者而写的一本成功的入门性著作.

子波变换实际上是不同领域的几代科学家共同努力的结果, 子波研究是一个刚刚兴起的新领域, 作为科学园地的辛勤耕耘者, 本书作者为年轻的一代展示了一片美好的新天地 当前, 无论是国内还是国外, 子波研究如何从应用数学领域扩展到工程技术科学领域, 在数学研究中取得的成果如何尽快地为广大工程技术人员所理解和应用, 这是子波研究中面临的一个迫切而重要的问题 笔者相信,《子波变换与子波分析》一书定会对此做出巨大的贡献