

多孔介质中对流的研究*

孔祥言 卢德唐 徐献芝

中国科技大学力学与机械工程系, 合肥 230027

王晓冬

中国科学院渗流流体力学所, 北京廊坊 102801

提要 介绍多孔介质中对流研究的重要意义及半个世纪以来的研究进展, 特别是近10年来在对流振荡、分岔等方面的研究和对混沌的探讨, 着重讨论多孔介质中的自然对流。

关键词 渗流; 自然对流; 振荡; 分岔; 混沌

1 前言

研究多孔介质中的对流问题, 既有重要的理论意义, 又有广泛的应用价值。从理论方面讲, 其不稳定性、解的分岔以及混沌问题, 是非线性力学的一个重要分支, 对它的研究必将进一步促进非线性科学的发展。从应用背景看, 首先是对能源工程, 包括对地热工程和提高石油采收率有着重要意义, 特别是对低渗透油藏和稠油的热采。核废料的处理, 也涉及多孔介质中的对流问题。此外对地下土建工程、绝热系统工程如装备的隔离等, 对防止环境和水资源的污染, 发热物质如煤碳和谷物的储存, 以及对化学化工直至对诸如雪崩现象等问题的研究, 都有重要的科学指导意义。

对流可分为由温度分布不均匀引起的自然对流, 由外部水头梯度所引起的强迫对流, 以及浓度分布不均匀所引起的对流。本文着重讨论多孔介质中的自然对流。

对于多孔介质中对流的研究始于20世纪40年代。最早的工作是Horton & Rogers^[1]和Lapwood^[2]的研究。他们讨论了稳定性问题并给出对流流动的判据。接着Rogers等^[3-6]又发表了一些文章对多孔介质中的自然对流作了进一步的研究。早期的实验工作有Wooding^[7-10]利用Hele-Shaw装置进行的二维模拟, 及与数值结果进行的对比。其后又进行了一系列的二维和三维实验^[12-14], 并观察到对流的不唯一性^[15]。

对问题的进一步求解有摄动法^[16]和各种数值计算方法, 包括高阶的有限差分法^[17,18]、

* 中国科学院渗流流体力学课题资助项目。

利用 Galerkin 方法的有限元法^[19]和谱方法或伪谱方法^[20]。对不同的表达式用不同的方法。

2 基本方程和无量纲量

基本方程 在研究多孔介质中不可压缩流体的流动时近似认为密度 ρ 与压力 p 无关, 而只与温度 T 有关, $\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$ 或 $\rho = \rho(T, t)$, 其中 β 是流体的膨胀系数。在温度场和重力场的联合作用下, 多孔介质中的对流由连续方程、动量方程^[21, 22]和能量方程描述, 即

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\phi^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \phi^{-2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{\nu}{K} \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (2.2)$$

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + q_m''' \quad (2.3)$$

以上方程中 ϕ 、 K 分别是多孔介质的孔隙度和渗透率, \mathbf{v} 、 μ 分别是渗流速度和运动粘度。 k 、 c 分别表示热导率和比热容, q''' [W/m³] 是单位体积介质内部产生的 (或由系统以外获得的) 热流。下标 f 、 m 分别表示流体的和总的量。再令热容比 $\sigma = (\rho c)_m / (\rho c_p)_f$, 热扩散系数 $\chi = k_m / (\rho c_p)_f$, 设 k_m 为常数, 则式 (2.3) 变成

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \chi \nabla^2 T + \frac{q_m'''}{(\rho c_p)_f} \quad (2.4)$$

方程 (2.1), (2.2) 和 (2.3) 或 (2.4) 就是研究多孔介质中对流的基本方程组。由这 5 个方程可以求解 \mathbf{v} 、 T 和 p 5 个未知量。

无量纲参数 方程 (2.1), (2.2) 和 (2.4) 中除原有的无量纲量 ϕ 和 σ 外, 还含有无量纲参数 ν/K 、 βg 和 χ 。当有生成热时还要加上一个 $q_m''' / (\rho c_p)_f$, 其中 βg 由式 (2.2) 中 $\mathbf{g} - \nabla p / \rho$ 项及 ρ 与 T 之间关系演化而来。方程组的解还一定包含特征长度 H 和某个距离之间的温差 ΔT , 由 ν/K 、 βg 、 χ 、 H 和 ΔT 可以构成以下独立的无量纲量:

一个是 Rayleigh (瑞利) 数 Ra

$$Ra = \frac{g \beta K H \Delta T}{\nu \chi} \quad (2.5)$$

它是 Darcy 数 $Da = K/H^2$ 与单纯粘性流体对流中瑞利数 $Ra' = \beta g H^3 \Delta T / \nu \chi$ 的乘积。

另一个无量纲量是

$$\Gamma = K \chi / H^2 \nu \quad (2.6)$$

它是 Da 除以 Prandtl 数

$$Pr = \nu / \chi \quad (2.7)$$

当有生成热 q 时, 还有一个无量纲量是 Nusselt 数

$$Nu = \frac{H^2 q_m'''}{\Delta T k_m} = \frac{H^2 q_m'''}{(\rho c_p)_f \chi \Delta T} \quad (2.8a)$$

如果是通过某个线段加热, 单位长度热流率为 q' , 则有

$$Nu = q' / k_m \Delta T \quad (2.8b)$$

当两个流动的上述无量纲量相同, 这两个流动就相似。

3 线性化理论

多孔介质中对流的早期研究^[1,2]是基于线性化理论, 有时也称 Horton-Rogers-Lapwood 问题或简称 Lapwood 问题。

最简单情形 一种最简单情形是无限大水平多孔介质层的下底 $z=0$ 处 $T=T_0+\Delta T$, 上顶 $z=H$ 处 $T=T_0$, 而介质中流体不流动, 即单纯导热情形。不难证明这个平衡状态的基本解是

$$V_b = 0 \quad (3.1)$$

$$T_b = T_0 + \Delta T \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (3.2)$$

$$p_b = p_0 - \rho_0 g \left[z + \frac{1}{2} \beta \Delta T \left(\frac{z^2}{H} - 2z \right) \right] \quad (3.3)$$

其中下标“0”表示对应于某个参考值。

线性稳定性分析、临界 Ra 通常我们是在 Boussinesq 近似下讨论。这个近似的含义是除了在动量方程中保留含有 β 的浮力项以外, 固体和流体的特性均保持为常数。这意味着

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (3.4)$$

设平衡状态受到一个扰动(扰动用带上标“'”表示)即

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_b + \mathbf{v}', \quad p = p_b + p', \quad T = T_b + T' \quad (3.5)$$

代入方程组(2.1), (2.2)和(2.4), 略去二阶小量和 $\partial v'/\partial t$ 项, 并引进下列无量纲量

$$\left. \begin{aligned} x_D = \frac{x}{H}, \quad y_D = \frac{y}{H}, \quad z_D = \frac{z}{H}, \quad \nabla_D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_D^2} \\ T_D = \frac{T'}{\Delta T}, \quad w_D = \frac{H w'}{\chi}, \quad t_D = \frac{\chi t}{\sigma H^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

可得无量纲的线化方程组

$$\frac{\partial T_D}{\partial t_D} - w_D = \nabla_D^2 T_D \quad (3.7)$$

$$\nabla_D^2 w_D = Ra \nabla_D^2 T_D \quad (3.8)$$

式(3.6)中 w' 是 z 向扰动速度分量。对方程组(3.7)和(3.8)联立求解两个变量 T_D 和 w_D , 可用分离变量法, 即令

$$w_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = W(z_D) \exp(ilx_D + imy_D + st_D) \quad (3.9)$$

$$T_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = \theta(z_D) \exp(ilx_D + imy_D + st_D) \quad (3.10)$$

将上式代入方程(3.7)和(3.8), 并令总的水平波数 $\alpha = (l^2 + m^2)^{1/2}$, 得

$$\frac{d^2 \theta}{dz_D^2} - (\alpha^2 + s) \theta = -W \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2 W}{dz_D^2} - \alpha^2 W = -\alpha^2 Ra \theta \quad (3.12)$$

设 4 个边界条件为上顶下底均为不透水和等温, 即

$$W = \theta = 0, \text{ 在 } z_D = 0, z_D = 1 \text{ 处} \quad (3.13)$$

要使解在无穷远处保持有界, 波数 l 和 m 必须为实数, 因而 α 必须为实数. 设 $s = s_r + i\omega$, 若 $s_r > 0$ 表示扰动将随时间而增长, 即是不稳定的. 所以 $s_r = 0$ 对应于临界稳定性. 这时方程组的解为

$$W = \sin j \pi z_D \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.14)$$

只要

$$Ra = (j^2 \pi^2 + \alpha^2)^2 / \alpha^2 \quad (3.15)$$

显然, 当 $j = 1, \alpha = \pi$ 时 Ra 取最小值. 由此得出结论: 当 $Ra < 4\pi^2$ 时导热状态保持稳定, 不发生对流; 当 $Ra > 4\pi^2$ 时出现不稳定性, 以水平波数为 π 的胞格形式产生对流.

对于不同的边界条件组合, Nield 给出的结果见表 1^[23].

表 1 各种不同边界条件下的临界 Ra 数和临界波数^[23]

序号	底		顶		临界 Ra 数	临界波数
	流动条件	温度条件	流动条件	温度条件	Ra_c	α_c
1	不透水	等温	不透水	等温	$4\pi^2 = 39.48$	$\pi = 3.14$
2	不透水	等温	不透水	绝热	27.10	2.33
3	不透水	绝热	不透水	绝热	12	0
4	不透水	等温	定压	等温	27.10	2.33
5	不透水	绝热	定压	等温	17.65	1.75
6	不透水	等温	定压	绝热	$\pi^2 = 9.87$	$\pi/2 = 1.57$
7	不透水	绝热	定压	绝热	3	0
8	定压	等温	定压	等温	12	0
9	定压	等温	定压	绝热	3	0
10	定压	绝热	定压	绝热	0	0

此后, 一些作者^[24-30]研究了弱非线性理论, 保留个别重要的非线性项. 用摄动法求解.

4 介质内部加热

关于多孔介质内部热源引起的对流问题已有很多研究. 这里主要讨论二维问题, 即水平柱热源和水平线热源问题.

水平柱热源 设热源是等温温度 T_w 、半径 r_w 的圆柱, 地层原始温度为 T_∞ . 为简单起见, 我们讨论高 Ra 数下的定常问题. 取周向坐标为 x (从圆柱最下点开始为 $\varphi = 0$), 径向坐标为 y . 如果略去重力的垂向分量和曲率的影响, 并引进流函数 Ψ

$$u = \partial\Psi/\partial y, \quad v = -\partial\Psi/\partial x \quad (4.1)$$

消去 p' 可得关于变量 Ψ 和 T 的两个方程^[31]

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{g\beta K}{\nu} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} (T - T_\infty) \quad (4.2)$$

$$\chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.3)$$

边界条件为

$$v = 0, \quad T = T_w \quad \text{在 } y = 0 \text{ 处} \quad (4.4)$$

$$u = 0, \quad T = T_\infty \quad \text{在 } y \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

不难解得

$$\Psi = \left[\frac{g\beta K}{\nu} (T_w - T_\infty) \chi r_w \right]^{1/2} (1 - \cos\varphi)^{1/2} f(\eta) \quad (4.6)$$

$$T - T_\infty = (T_w - T_\infty) \theta(\eta) \quad (4.7)$$

这里

$$\eta = \left[\frac{2g\beta K r_w (T_w - T_\infty)}{\nu \chi} \right]^{1/2} \frac{y \sin\varphi}{\sqrt{2 r_w (1 - \cos\varphi)^{1/2}}} \quad (4.8)$$

因而局部表面热流写成无量纲形式为

$$\frac{Nu\varphi}{Ra^{1/2}} = 0.628 \frac{\sin\varphi}{(1 - \cos\varphi)^{1/2}} \quad (4.9)$$

这里

$$Nu\varphi = \frac{2r_w q_w''}{k_m (T_w - T_\infty)}, \quad Ra = \frac{2\beta g K r_w (T_w - T_\infty)}{\nu \chi} \quad (4.10)$$

这个问题由 Chen^[32] 推广到非牛顿幂律流体。对较小 Ra 数的情形也已进行了许多研究^[33-35]，包括各种实验研究^[36-38]。

水平线热源 对于高 Ra 数下水平线热源引起的对流，取直角坐标系，则方程 (4.2) 变为

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{g\beta K}{\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.11)$$

方程 (4.3) 仍然适用。其边界条件 (4.5) 不变，而 (4.8) 代之以 $\partial^2 \Psi / \partial y^2 = \partial T / \partial y = 0$ (在 $y = 0$ 处)。容易求得^[9]

$$q' = \rho_\infty C_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial y} (T - T_\infty) dy \quad (4.12)$$

而

$$\Psi = \chi (Rax)^{1/3} B \operatorname{th} \frac{B}{6} \eta \quad (4.13)$$

$$T - T_\infty = \frac{q'}{\rho_\infty c_p \chi} (Rax)^{-1/3} \frac{B^2}{6} \operatorname{sh}^2 \frac{B}{6} \eta \quad (4.14)$$

这里 $B = (9/2)^{1/3} = 1.651$, $Rax = g\beta K q' x / \mu \chi^2 c_p$, $\eta = y (Rax)^{1/3} / x$ 。

对于低 Ra 数情形，文献[39]利用摄动法给出了解。有关这个问题的实验结果及其与理论比较可见文献[40,41]。

此外，对于铅直的柱热源情形，也有了研究^[42-44]。

5 振荡、分岔

以流函数 Ψ 和温度函数 θ 作未知量的非线性自然对流控制方程已由各种方法进行了数值

求解。由于控制方程中的水平对流项

$$J(\Psi, \theta) = \Psi_y \theta_x - \Psi_x \theta_y \quad (5.1)$$

用普通的中心差分格式会因混淆误差 (aliasing errors) 而引起数值的不稳定。为此, 对有限差分发展了 9 点和 13 点表达式^[17,18,45-48]。当然也有用有限元法和谱方法^[49]计算的。

振荡 振荡是指热交换有涨落的对流状态。振荡的出现是由于水平边界上热边界层的不稳定性所引起的。通过有限振幅二维解的稳定性分析^[29]研究了这种振荡状态。这种振荡状态也为高阶差分的数值计算所证实^[50]。进一步研究表明振荡是与对流涡卷的不断建立与消失相关的^[51,52]。文献[53]已考虑了粘度是温度函数的情形, 同时还研究了相对于基本状态有 $\pi/2$ 位移的扰动稳定性问题。该文发现对于同相的和有相移的振荡不稳定性而言, 转变的参数几乎没有差别。对高阶近似下由稳定状态转变到振荡对流状态的情形也进行过一些研究^[54-58]。

当三维对流的 Ra 与二维单胞对流变得不稳定时的 Ra 数大致相同时, 三维对流也变得不稳定^[59,60]。研究还表明在 $Ra = 350$ 时, 涨落类似于单胞振荡对流中的涨落, 而在 $Ra = 400$ 时, Nu 数随时间的变化更为复杂。

分岔 多孔介质中对流的分岔问题近几年受到广泛的关注。实际上, 早在 1979 年 Straus^[61] 等已阐明在立方体中流动可能不唯一。他们发现当 Ra 大于 $4.5\pi^2$ 时有二维和三维的稳定解共存。这个特性也被 Horne^[62] 所证实, 他发现 4 个解共存: 即二维和三维的, 稳定和不稳定的。当 $Ra < 97$ 时二维流动使传热最大, 而当 $Ra > 97$ 时三维流动使传热最大。Straus 等^[63] 证实了有正方形横截面的长方体中稳定三维流动的不唯一性。文献[64]研究了正方形水平横截面和宽高比为 $2^{0.25}$ 的长方体中, 当 $Ra = 4.5\pi^2$ 时的三重分岔点附近的流动。

Riley 等^[65-67] 对分岔问题的研究表明, 对于二维问题在固定的 Ra 数下随着宽高比增加, 由单纯导热状态开始一次分岔, 然后又二次分岔。而在固定的宽高比下随着 Ra 数增加亦是如此。

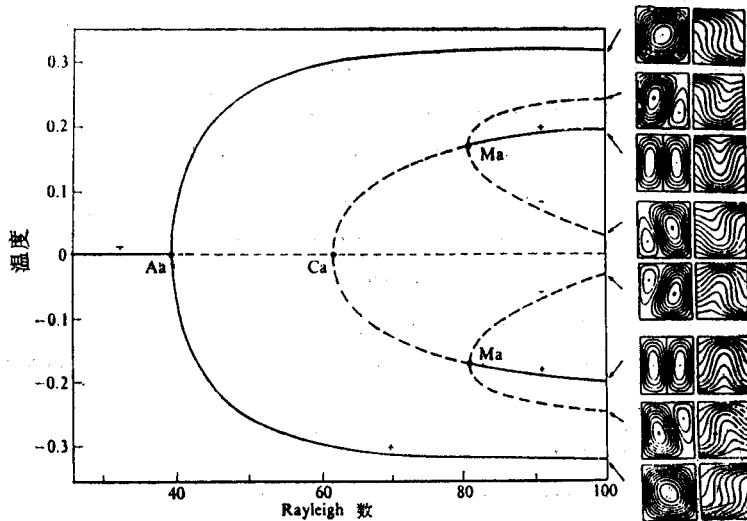


图 1 对宽高比为 1 的二维对流算出的分岔结构^[65]

图1是用有限元法对宽高比为1的二维问题,在 Ra 数直至100情况下的计算结果。图中正号表示 Jacobi 矩阵的所有本征值都是正的。实线表示稳定分支。如果存在负的本征值,则其个数由分支上负号的个数表示,这些分支是不稳定的。所有计算的状态图中的表征量是左侧壁中点的温度。图中 Aa 和 Ca 表示一次分岔点, Ma 表示二次分岔点。图右侧分别示出了对应的流线和等温线。由图1看出,使两胞波模稳定的二次分岔出现在 $Ra=81.01$ 时。 Ra 超过这个值时存在单胞和两胞波模的对流。该问题更完全的状态图算到 $Ra=350$,表明在 $Ra=110$ 时一次分岔到三胞波模($l=3, m=1$)。而在 $Ra=16\pi^2=157.91$ 时,一次分岔到($l=2, m=2$)的波模。三胞解的分支在 Ra 为240,260有两个二次分岔。文中还计算了宽高比不为1的分支结构。

Impey^[68]的博士论文把上述研究结果推广到二维体稍有倾斜和小的单边热流的情形。另一些工作^[69-73]研究了通过Hopf分岔的失稳。Weinitschke等对矩形截面体的计算一直算到 Ra 为10,000的分岔结构。

6 混 沌

关于多孔介质中对流出现混沌现象的研究首推Kimura^[77]的工作。他指出,多孔介质中对流走向混沌的途径与在单纯粘性流体中有很大的区别,最主要的区别在于多孔介质中对流所发生的事件的顺序并非是单调增长的无序状态。在正方形截面二维多孔介质管道中的研究给出了随 Ra 数增大出现下列演化顺序,即从单纯导热的基础状态到稳定的对流状态,演变成周期振荡到准周期状态(它具有两个基频),再到周期状态^[78]。这个特性在Hele-Shaw装置中也已观察到^[79]。

在[77]中,对于从底部加热正方形截面体,在用伪谱方法对其二维单纯非定常对流进行数值计算并综合前人的工作后得出如下结果:

转变1,在临界 Rayleigh 数 $Ra_1=4\pi^2$ 时,出现稳定的单胞对流 S 。

转变2,在 Ra_1 与 Ra_2 之间,是单频为 f_1 的周期对流状态 $P^{(1)}$ 。关于第二个临界值 Ra_2 ,用截断数 $N=18$ 的 Galerkin 法计算得在380—400之间^[78],而另一个数值计算结果给出 $Ra_2=385$ ^[80]。当 $Ra>Ra_2$ 时,频率 f_1 随 $Ra^{7/8}$ 而增加。

转变3, Ra 进一步增大,对流由单频转变为两个基频的准周期状态 QP_2 ,频率为主频 f_1 加一个较小的次频 f_2 , f_1 与 f_2 之和与 $Ra^{3/2}$ 成正比。计算表明转变临界值 Ra_3 依赖于截断数 N ,一般认为在500与520之间。

转变4,在第4个分岔 Ra 数下,由多频反而转变为单频对流状态 $P^{(2)}$ (P 的下标表示频率数,上标是顺序号)。 Ra_4 在560左右,而频率 f 与 $Ra^{3/2}$ 成正比。

转变5,进一步增大 Ra 数,出现第5个转变, Ra_5 在850—1000之间,走向非周期的混沌状态 NP 。计算中取截断数 N 在30以上。在 Nusselt 数-无量纲时间图上表现为尖锐的谱峰中有宽带的噪音成份。

其他一些作者也做了类似的探讨^[81,82]。

Ryland^[83]研究了矩形截面体倾斜放置的情形。这种情况破坏了流动的对称性。用 Arakawa 格式进行的计算结果表明,倾斜角 ϕ 在 5° 和 10° , Ra 在4000—5000时解失去稳定性。当 Ra 继续增大可发现混沌现象。对于倾斜角 $\phi=5^\circ$,当 $Ra=9500$ 时转变为混沌状态,

而在 $Ra = 11,000$ 时又返回到周期状态。图 2 示出 $\phi = 10^\circ$, 宽高比为 1, $Ra = 7,000$ 时的混沌状态解。图中 (a) 是 $Nu-\tau$ 曲线, 这里 $\tau = t/(\sigma a^2/\chi)$ 而 a 是介质的宽度。(b) 是与 (a) 中时间相对应的功率谱。(c) 是以能量和 Nu 作为两个状态变量给出的相轨线图。

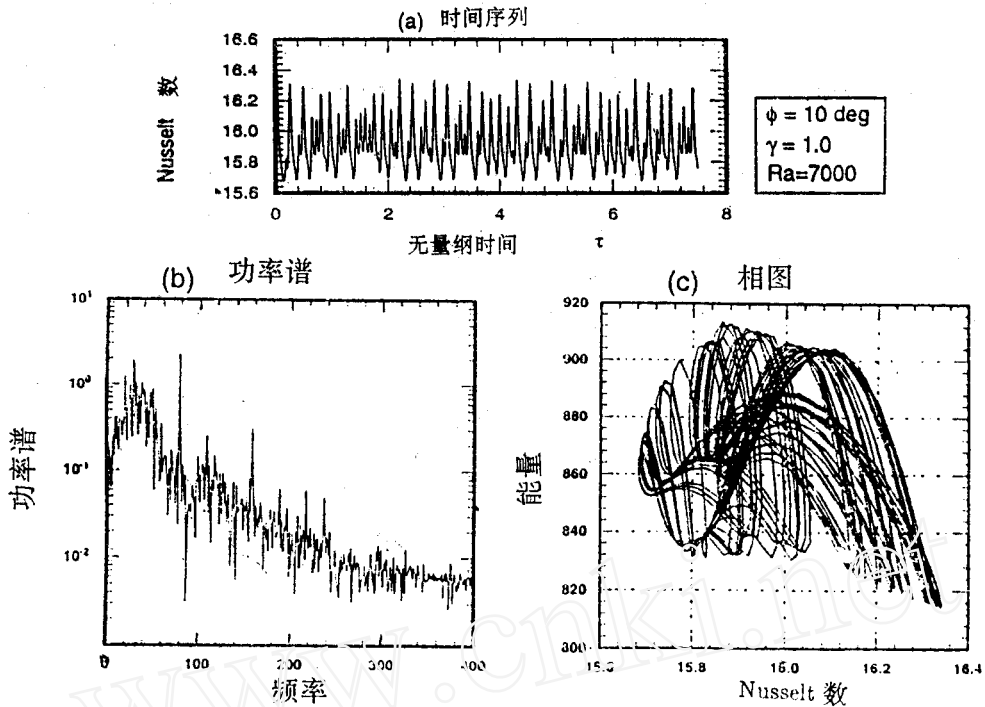


图 2 对宽高比为 1, 倾斜角 $\phi = 10^\circ$, $Ra = 7000$ 时算出的混沌解^[88]

7 结束语

研究多孔介质中的对流有重要的理论意义和应用价值。特别是对于非线性科学的发展和低渗透及稠油的热采。近 10 年来, 有关这方面的专著和专集不断问世^[84-90], 突出地表明了这个问题的重要意义和发展势头。目前, 多孔介质中对流的分岔问题仍是研究的热点课题^[91-93], 对混沌问题的研究尚处于起步阶段。除此之外, 着重在以下几个方面进一步进行研究。

1. 非达西流对多孔介质中对流的影响^[94-99]。包括自然对流及混合对流(自然对流与强迫对流混合)中的非达西流动。对于速度比较高的情形, 考虑惯性效应和湍流对对流传热的影响。当然, 这使非线性度进一步增加, 正采取各种不同的数值方法进行计算和分析研究。

2. 非牛顿流体在多孔介质中的对流^[100-102]。主要研究幂律流体和宾汉流体, 这也是高度非线性的问题。这些问题的研究对于非线性方程数值计算的发展也起到一定的推动作用。

3. 冷冻多孔介质中的对流^[103,104]。研究对流条件下冷冻多孔介质的融化过程, 底部加热多孔介质引起冰的融化等等。这对于寒冷地区有重要意义。

4. 实验研究^[105-107]。关于多孔介质中对流的实验研究一直受到重视。近年来主要研究对流的各种显示技术和方法, 以增强对多孔介质中流谱和温度分布的观察效果。

5. 内部热源问题^[108-110]。多孔介质内部有热源的对流问题在本文第4节已作了介绍。近几年,这个问题得到进一步研究。研究的内容包括点热源、水平的线热源和热源分布引起的对流现象。

6. 其它,近年来对多孔介质中对流的研究涉及许多方面。例如在临界值附近对流的某些细节和特点^[111],变孔隙度的介质中的对流^[94,112],温度梯度方向是倾斜的情形^[113],多孔介质上面叠加流体流动的对流问题^[114],以及混合对流中各种相关公式的综合分析^[115]等等。

以上所介绍的主要是围绕多孔介质内部流体的自然对流问题以及与此有关的少量混合对流问题。实际上,所研究的问题还有很多其它方面,如强迫对流、有相变的对流、多组份问题等等,限于篇幅本文不能一一介绍了。

参 考 文 献

- 1 Horton C W, Rogers F T Jr, *J. of Applied Physics*, **16** (1945) : 367-370
- 2 Lapwood E R, *Cambridge Philos. Soc.*, **44** (1948) : 508-521
- 3 Morrison H L et al, *J. Appl. Phys.*, **20** (1949) : 1027-1029
- 4 Rogers F T, Jr, Morrison H L, *J. Appl. Phys.*, **21** (1950) : 170-180
- 5 Rogers F T Jr, Schibberg L E, *J. Appl. Phys.*, **22** (1951) : 233-234
- 6 Rogers F T Jr, *J. Appl. Phys.*, **24** (1953) : 877-800
- 7 Wooding R A, *J. Fluid Mech.*, **9** (1960)
- 8 Wooding R A, *J. Fluid Mech.*, **13** (1962) : 129-144
- 9 Wooding R A, *J. Fluid Mech.*, **15** (1963) : 527-544
- 10 Wooding R A, *J. Fluid Mech.*, **19** (1964) : 103-112
- 11 Elder J W, *J. Fluid Mech., Part 1*, **27** (1967) : 29-48
- 12 Bories S A, C. R. Acad. Sci. Paris **A257** (1972) : 857
- 13 Combarous M A, Lesar B, C. R. Acad. Sci., Paris **B269** (1969) : 1009
- 14 Caltagirone J P, et al, C. R. Acad. Sci. Paris **B273** (1971) : 833
- 15 Horne R N, O'Sullivan M J, *J. Fluid Mech.*, **66** (1974) : 339
- 16 Swinney H L, Gollub J, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, 2nd, Springer, Berlin (1983) : 97-137
- 17 Akawaka A, *J. Comp. Phys.*, **1** (1960) : 119
- 18 Busbee B L, et al, *SIAM J. Numer. Anal.*, **7** (1970) : 627
- 19 Schubert G, Straus J M, *J. Fluid Mech.*, **121** (1982) : 301
- 20 Schechter R S, *The Variational Method in Engineering*, McGraw-Hill, New York (1967)
- 21 Whitaker S, *Transport in Porous Media*, **1** (1986) : 3-25
- 22 Ene H I, Poliserski D, *Thermal Flow in Porous Media*, Reidel, Dordrecht (1987)
- 23 Nield D A, *Water Resource Res.*, **11** (1968) : 553-560
- 24 Buretta R J, Berman A S, *ASME J. Appl. Mech.*, **43** (1967) : 249-253
- 25 Joseph D D, *Stability of Fluid Motion II*, Springer, Berlin (1976)
- 26 Rudraiah N, et al, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **373** (1980) : 199-222
- 27 Neild D A, *Transport in Porous Media*, **2** (1987) : 177-185
- 28 Salt H, *Transport in Porous Media*, **3** (1988) : 325-341
- 29 Straus J M, *J. Fluid Mech.*, **64** (1974) : 51-63
- 30 Riahi N, *J. Fluid Mech.*, **129** (1983) : 153-171
- 31 Merkin J H, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **21** (1978) : 1499-1504
- 32 Chen H T, Chen C K, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, **15** (1988) : 605-614
- 33 Bau H H, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **27** (1984) : 2047-2065
- 34 Ingham D B, Pop I J, *J. Fluid Mech.*, **184** (1987) : 157-181
- 35 Farouk B, Shayer H, *ASME J. Heat Transfer*, **110** (1988) : 642-648
- 36 Fernandez R T, et al, *Heat Transfer*, Elsevier, Amsterdam, **2** (1982) : 333
- 37 Fand R M, et al, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **29** (1986) : 119-133

- 38 Fand R M, et al. Heat Transfer, Hemisphere, New York, 5 (1990) : 183—188
- 39 Neill D A, White S P. In: McNabb, et al (ed), Mathematics and Models in Engineering Science. Wellington, New Zealand (1982) : 121—128
- 40 Lee H M. MS. Thesis, University of Hawaii (1983)
- 41 Cheng P. In: Kakac, et al (ed). Natural Convection: Fundamentals and Applications. Hemisphere, Washington D C (1985) : 475—513
- 42 Minkowicz W J, Cheng P. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **19** (1976) : 805—813
- 43 Huang, et al. *ASME J. Energy Resources Tech.*, **107** (1985) : 394—396
- 44 Kimura S, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **32** (1989) : 617—620
- 45 Yanosik J L, et al. SPE (Society of Petroleum Engineers) paper, 5734 (1976)
- 46 KO SCM, et al. SPE paper, 8248 (1978)
- 47 Taggart I J, et al. *SPE RE (Reservoir Eng.)* **2** (1987) 360
- 48 Taggart I J, et al. SPE paper, 16702 (1987)
- 49 Caltagirone J P, et al. *J. Mecanique*, **20** (1981) : 219—232
- 50 Horne R N, O'Sullivan M J. *J. Fluid Mech.*, **66** (1974) : 339—352
- 51 Caltagirone J P. *J. Fluid Mech.*, **72** (1975) : 269—287
- 52 Horne RN, et al. *J. Fluid Mech.*, **100** (1980) : 385—395
- 53 Or A C. *J. Fluid Mech.*, **206** (1989) : 497—515
- 54 Aidun C K. *ASME HTD*, **94** (1987) : 31—36
- 55 Aidun C K, et al. *AIAA J. Thermophys. Heat Transfer*, **1** (1987) : 286—273
- 56 Kimura S, et al. *ASME J. Heat Transfer*, **109** (1987) : 350—355
- 57 Steen P H, Aidun C K. *J. Fluid Mech.*, **196** (1988) : 263—290
- 58 Kladius N, Prasad V. *ASME HTD*, **107** (1989) : 369—379
- 59 Schubert G, Straus J M. *J. Fluid Mech.*, **94** (1979) : 25—38
- 60 Horne R N, O'Sullivan M J. *Phys. Fluids*, **21** (1978) : 1260—1264
- 61 Straus J M, Schubert G. *J. Fluid Mech.*, **91** (1979) : 155—165
- 62 Horne R N. *J. Fluid Mech.*, **92** (1979) : 751
- 63 Straus J M, Schubert G. *J. Fluid Mech.*, **763** (1981) : 23
- 64 Borkowska-Pawlak B, et al. *J. Fluid Mech.*, **150** (1985) : 169
- 65 Riley D S, Winters K H. *J. Fluid Mech.*, **204** (1989) : 325—358
- 66 Riley D S, Winters K H. *J. Fluid Mech.*, **215** (1990) : 309—329
- 67 Riley D S, Winters K H. *J. Fluid Mech.*, **223** (1991) : 457—474
- 68 Impey M D. Bifurcation in Lapwood convection Ph. D. Thesis, Univ. of Bristol (1988)
- 69 Steen P H. *Phys. Fluids*, **29** (1986) : 925—933
- 70 Kordylewski, et al. *Arch. Mech.*, **38** (1987) : 383—394
- 71 Vincourt M C. *Mechanics*, **16** (1989) : 19—24
- 72 Vincourt M C. *Int. J. Engng. Sci.*, **27** (1989) : 377—392
- 73 Neel M C. *Eur. J. Mech.*, **B9** (1990) : 155—176
- 74 Weinitschke H J, et al. *Phys. Fluids*, **A2** (1990) : 912—921
- 75 Caltagirone J P, Fabrie P. *Eur. J. Mech.*, **B8** (1989) : 207—227
- 76 Neel M C. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie II*, **309** (1990) : 1863—1868
- 77 Kimura S, et al. *J. Fluid Mech.*, **166** (1986) : 305—324
- 78 Schubert G, Straus J M. *J. Fluid Mech.*, **121** (1982) : 301—303
- 79 Koster J N, Muller V. *J. Fluid Mech.*, **139** (1984) : 363
- 80 Caltagirone J P. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **278B** (1974) : 259
- 81 Caltagirone J P, et al. *C. R. Acad. Sci. Paris, II*, **305** (1987) : 549—553
- 82 Hwang S H, Cheng H C. *Phys. Fluids*, **A1** (1989) : 924
- 83 Ryland D K, Nandakumar K. *Phys. Fluids*, **A4** (1992) : 1945—1958
- 84 Kakac S, et al. Natural Convection: Fundamentals and Applications. Hemisphere, Washington D C (1985)
- 85 Bear J, Corapcioglu M Y. Advance in Transport Phenomena in Porous Media. Martinus Nijhoff, The Netherlands (1987)
- 86 Fand R M. Heat Transfer Hemisphere, Washington D C, 5 (1990)
- 87 Bear J, Buchlin J M. Modelling and Application of Transport Phenomena in Porous Media. Kluwer (1991)
- 88 Kalac S, et al. Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media, Kluwer Academic, Dordrecht

(1991)

- 89 Nield D A, Began A. *Convection in Porous Media*. Springer-verlag (1992)
90 *Transport in Porous Media* (one volume per annum from 1986)
91 Vadasz P. *Heat Transfer*. Hemisphere, Washington D C, 5 (1990): 147—152
92 Michaael D, et al. *J. Fluid Mech.*, **272** (1994) : 67—89
93 Nield D A. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **15** (1994) : 337
94 Chen C K, Chen C H. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **11** (1990) : 65—71
95 Choi C Y, Kulaki F A. *Heat Transfer*. Hemisphere, Washington D C, 5 (1990) : 271—276
96 Hunt M L, Tien C L. *Chem. Engng. Sci.*, **45** (1990) : 56—63
97 Kladias N, Praasad V. *ASME J. Heat Transfer*, **112** (1990) : 675—684
98 Kumari M, Nath G. *ASME j. Heat Transfer*, **112** (1990) : 518—523
99 Mamele D M, Lage J L. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **14** (1993) : 279
100 Chen H T, Chen C K. *ASME J. Heat Transfer*, **110** (1988) : 257—259
101 Hossain M, Nakayama A. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **14** (1993) : 385
102 Bian W, et al. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **15** (1994) : 384
103 Chellaiah S, Viskanta R. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33** (1990) : 887—899
104 Zhang X, et al. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **34** (1991) : 389—405
105 Lister C R B. *J. Fluid Mech.*, **214** (1990) : 287—320
106 Kazmierczak M, Muley A. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **15** (1994) : 30
107 Morega A M, Began A. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **15** (1994) : 42
108 Ganapathy R, Purushothaman R. *Int. J. Engng. Sci.*, **28** (1990) : 907—918
109 Du Z G, Bilgen E. *Numer. Heat Transfer*, **A18** (1990) : 371—386
110 Nakayama A. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **14** (1993) : 279
111 Cox B L, Pruess K. *Transport in Porous Media*, **5** (1990) : 299—323
112 David E, et al. *ASME J. Heat Transfer*, **113** (1991)
113 Nield D A. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **34** (1991) : 87—92
114 Chen F L, Chen C F. *J. Fluid Mech.*, **243** (1992) : 97—115
115 Nield D A. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **14** (1993) : 206

STUDY ON CONVECTION IN POROUS MEDIA

Kong Xiangyan Lu Detang Xu Xianzhi

University of Science and Technology of China, Hefei 230027

Wang Xiaodong

Institute of Mechanics of Flow through Porous Media, Beijing 102801

Abstract The convection of porous media concerns chiefly with flow of fluid through porous media due to temperature difference. In this paper, the importance of this problem and its development in the last fifty years are reviewed. Particularly, studies on convective oscillatory instability, bifurcation and chaos in the last ten years are discussed.

Keywords *flow through porous media; natural convection; oscillatory instability; bifurcation; chaos*