第26卷 第4期 力学进展 Vol. 26 No. 4
1996年11月25日 ADVANCES IN MECHANICS Nov. 25, 1996

非线性振动系统动力学行为的实验研究*

陈予恕 季进臣
天津大学力学系，天津 300072

提要 本文综述了非线性振动系统动力学行为的实验研究，详细叙述了机械模型实验，实验数据的分析与处理，并对今后发展趋势作了述评。

关键词 非线性振动系统；动力学行为；实验

1 引 言

大多数力学问题的本质都是非线性的，它们一般由非线性方程描述。非线性因素是任何动力系统都存在的，它们来自系统物理的、几何的、耗散的、运动的、机电耦合的以及这些非线性的组合等方面[1]。非线性因素为系统带来了一系列线性系统所没有的动力学现象；在单自由度系统中，这些现象包括多解、跳跃、极限环、固有频率漂移、亚谐共振和超谐共振、倍周期分岔和混沌运动。一般说来，需大的激励水平才能在单自由度系统中产生倍周期分岔和混沌运动。多自由度系统的响应，除上述现象外，还有组合共振和模态相互作用，后者使得系统的模态相互耦合或能量在模态之间互相转移[2]。当系统的某些模态参入内共振或自参数共振时，耦合作用对系统的响应起主导作用。

内共振的类型依赖非线性项的阶数[3]。对单自由度而言，组合共振响应只能发生在多频激励条件下，而多自由度在单频激励下也可能发生组合共振，组合共振的类型仍依赖于非线性项的阶数。内共振能够产生许多有趣的、异常的和危险的现象，如在谐平面激励下，弦或对称梁的平面外运动的不稳定性。内共振能够在具有平方非线性系统中当 $\omega_2 \approx 2\omega_1$ 和立方系统中当 $\omega_3 \approx \omega_1 + \omega_2$ 时产生饱和现象，内共振能够产生混沌调制运动的复杂响应。

各种现代数学理论的涌现，为非线性动力学研究提供了强有力的理论工具，逐渐形成了一些有效的解析方法[4]，通过解析方法，发现了一些非线性振动系统的特有动力学行为。高速电子计算机和有效的大规模算法的出现，使得人们能够对非线性问题进行大量的数值计算和仿真，揭示了极其丰富的非线性动力学行为。在非线性振动研究中，数值方法、实验方法和现代数学方法密切联系，互相促进[5]。本文给出了实验数学方法、模拟计算机实验、机械模型实验的研究现状，重点叙述了机械模型实验，并对今后发展趋势作了述评。

* 国家自然科学基金和博士点基金资助

2 实验数学

在非线性科学的形成中，在探索非线性动力学复杂性的过程中，实验数学方法起到了关键作用．Lorenz 奇怪吸引子的发现，Mandelbrot 分维复杂图形的制作，无穷嵌套的自相似结构，三体问题中的混沌轨迹，无不借助计算机来实现．对于大多数的变系数非线性微分方程，数学的解析方法几乎无能为力．只能依靠计算机和实验数学方法，研究它所描述的复杂现象和过程的时间演化和动态行为，对理论分析上难以处理的复杂问题给出丰富的、系统性的、感性而直观的启示[6]．

非线性振动中，确定非线性系统稳态振动广泛应用的方法是直接数值积分系统方程（如文献[7—9]等）以观察解的行为，但这可能是耗时和昂贵的，它取决于系统的维数和非线性因素的强弱．除直接积分法外，还可以把方程通过谐波平衡法、多尺度法和平均法等进行化简，得到描述振幅和相位的方程，之后分析其解及其稳定性．分岔分析通常是将理论分析和数值研究结合起来进行．近来，关于分岔、奇异性问题的数值方法[10]越来越引起人们的兴趣和重视，数值计算已成为一个有力的工具．

3 模拟计算机的模拟实验

模拟计算机是以连续变化的物理量表示数学关系式中的变量，它可对实际物理系统的数学模型进行仿真实验[11]．Ueda 和 Holmes[12-15] 在模拟计算机上发现 Duffing 方程的奇怪吸引子的解，Ueda 还在模拟计算机上观察到了强迫 van der Pol 振子的混沌行为．Yamamoto和Yasuda[16-17] 于1977年在模拟计算机上模拟了具有平方和立方非线性的两自由度系统的强迫振动，观察到了第一、二阶模态在主共振激励下的调幅和调相运动．Evensen[18] 用模拟机证实了薄圆环的模态相互作用．Abou-Rayan 等（1993）[19] 借助模拟机分析了参数激励下屈曲梁的非线性响应，发现了倍周期、倍三周期、倍六周期运动、跳跃现象和混沌运动等．模拟计算机对理论分析和数值分析提供了一种验证手段，特别是当实际机械模型实验不能进行时．

4 机械模型实验

4.1 单自由度系统

Moon 和 Holmes[20] 采用如图 1 所示装置，研究铁磁梁在两块磁铁间进行强迫振动的情况，简化的无量纲一阶模态的运动方程为

$$\ddot{A}+\gamma\dot{A}-\frac{1}{2}(1-A^2)A=f\cos\omega t \qquad (4.1)$$

$$\gamma,\ f,\ \omega>0$$

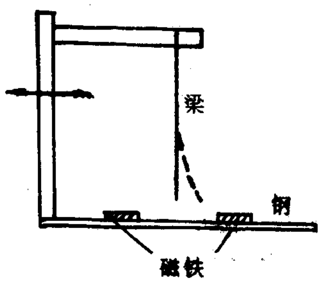

图 1 铁梁和永久磁铁结构

通过实验发现，对于固定的阻尼和频率，过屈曲梁在小幅激励下运动是周期的，但对于大幅运动，梁将从一个平衡点的运动跳跃到另一个平衡点，首次实验证实了机械模型结构中奇怪吸引子的存在．Moon[21] 用该装置进一步研究了该类混沌运动的特征，

Dowell 和 Pezeshki [22] 研究了在初值问题和强迫外激励下屈曲梁的混沌运动行为，给出了理论和实验的比较，发现吻合较好。

Gottwald 等人 [23] 考虑到上述机械模型的局限性（如刚度特性），引伸了小球在双井势能面滚动的概念，设计了用小车-导轨系统来模拟 Duffing 方程的行为，实验观察到了周期吸引子、多解共存下对初值的依赖性、滞后和跳跃现象。在某些强迫参数的组合区，跟随亚谐运动的倍周期分岔序列直到混沌，此实验所显示的行为验证了运动控制方程的数值模拟结果。根据具有不连续刚度特性的动力系统在应用力学和工程中常见的情况，Bayly 和 Virgin [24] 设计了非线性冲击摆装置来研究这类问题，观察到的谐振、亚谐运动和混沌行为与数值模拟得到的结果相吻合。还有一些学者对单摆和冲击摆进行了实验研究 [25-27]。

Tseng 和 Dugundji（1970）[28,29] 理论和实验研究了两端固定直梁的简谐运动、亚谐和超谐运动，数值模拟计算和实验研究了屈曲梁的混沌跳跃运动。Zavodney 和 Nayfeh [30] 实验研究了受竖直基础运动具有集中质量的悬臂梁，在主参数激励下的非线性响应。陈予恕，叶敏和詹凯君（1990）[31] 采用受纵向激励的梁的结构模型如图 2 所示来模拟一类非线性 Mathieu 方程 1/2 亚谐共振 [32]，他们对 1/2 亚谐分岔特性进行了实验研究，得出了在整个参数平面上具有不同拓扑结构的分岔图。陈予恕、王德石和叶敏 [33] 仍采用上述装置进行混沌实验的研究。在工程技术界动力学中阻尼的影响具有重要性，Feeny 和 Moon（1994）[34] 据此对具有干摩擦的谐强迫弹簧质量系统的混沌行为进行了研究。

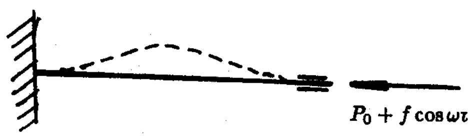

图 2 受纵向激励的梁

4.2 多自由度模型的实验

早期，Gorelik 和 Witt (1933) [35] 实验观察到弹簧摆在 2∶1 内共振条件下的模态相互作用，Evensen (1966) [18] 实验观察到薄弹性环在 1∶1 内共振条件下平面内和平面外模态的耦合，Chen 和 Babcock(1975) [36] 报道了一有限长的圆柱壳在1∶1内共振条件下两弯曲模态的相互作用。Hatwal 等 [37,38] 给出了具有固连单摆的弹簧质量阻尼器混沌运动的实验结果。

有关内耦合的振子对简谐激励的非线性响应问题在 80 年代受到了广泛注意 [3,39,40]。Nayfeh 等人对船舶、弹性摆、机器人、壳体、弓形结构、有液体的容器、梁和板等物理系统在静态和动态荷载下的响应进行了模型分析，如果用 u_1，u_2 表示两个非线性模态的广义坐标，那么，它们的控制方程具有如下普适形式：

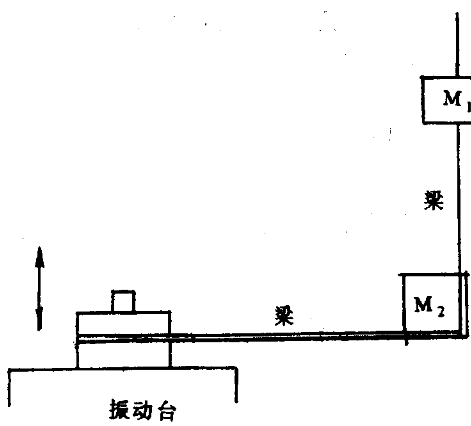

图 3 “L”型金属梁-质量结构

$$\ddot{u}_1+\omega_1^2u_1+2\mu_1\dot{u}_1+\delta_1u_1^2+\delta_2u_1u_2+\delta_3u_2^2+\delta_4\dot{u}_1^2+\delta_5\dot{u}_1\dot{u}_2+\delta_6\dot{u}_2^2+\delta_7u_1\ddot{u}_1$$
$$+\delta_8u_2\ddot{u}_1+\delta_9u_1\ddot{u}_2+\delta_{10}u_2\ddot{u}_2+(h_{11}u_1+h_{12}u_2)\cos\Omega t=F\cos\Omega t \tag{4.2}$$

$$\ddot{u}_2+\omega_2^2u_2+2\mu_2\dot{\mu}_2+\alpha_1u_1^2+\alpha_2u_1u_2+\alpha_3u_2^2+\alpha_4\dot{u}_1^2+\alpha_5\dot{u}_1\dot{u}_2+\alpha_6\dot{u}_2^2+\alpha_7u_1\ddot{u}_1$$
$$+\alpha_8u_2\ddot{u}_1+\alpha_9u_1\ddot{u}_2+\alpha_{10}u_2\ddot{u}_2+(h_{21}u_1+h_{22}u_2)\cos\Omega t=G\cos\Omega t \tag{4.3}$$

据此，Haddow，Barr 和 Mook（1984）[41] 设计了一个 L 型的金属梁质量结构如图 3 所示，结构的控制方程可由令 $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ 时方程（4.2）和（4.3）的特殊形式给出。通过调节 M_2（见图 3）的位置，使 $\omega_2:\omega_1\approx2:1$。当 $\Omega\approx\omega_1$ 时，他们观察到了跳跃现象和能量在两个模态间的不断交换，当调节激励频率使 $\Omega\approx\omega_2$ 时，验证了饱和现象。Nayfeh 和 Zavodney（1988）[42] 采用了同样的结构，观察到了在低阶固有频率处 Hopf 分岔区域附近的周期运动到非周期运动的转变以及调幅和调相运动。为了验证当激励频率接近第二阶固有频率时在较小的激励水平下，周期地和混沌地调制运动存在的理论分析[39,43,44] 的正确性，Nayfeh（1989）[45] 等仍采用了图 3 所示的结构，实验所得的幅频响应曲线与理论预言的曲线定性上吻合较好，在伪周期运动的 Fourier 谱和 Poincaré 映射上观察到了调制运动的倍周期分岔导致混沌运动。Nayfeh 和 Balachandran（1990）[46] 用类似的结构进行了激励低阶频率的混沌实验，之后做了亚谐共振和加法型组合共振的实验[47]，观察到了跳跃现象、饱和现象和饱和现象的破坏导致周期性调制运动，实验结果与分析结果定性吻合较好。又用复合板代替金属梁进行了实验，发现在一定激励频率下竖直梁进行平面外运动，通过测试结构的前二阶弯曲频率和低阶扭转频率可知，在低频激励下，模型是一个 3 自由度系统，而金属结构是一个 2 自由度系统。总之，实验表明复合结构的动力学行为定性定量上都与金属结构不同。在弯曲和扭转模态之间发生了相互作用的复合结构，即使当结构受平面激励时，平面外运动也能发生。

Yukio Ishida 等（1993）[48] 用固连有旋转圆盘的弹性轴进行实验，以此来模拟由球轴承支承的具有非线性弹性旋转轴的非线性振动，发现当旋转速度超过一个主临界值时，自激振动发生，它将稳定在一个极限幅度上，当旋转速度在 1/2 亚谐共振的增大方向时，自激振动被亚谐振动吸引。Chiba（1993）[49,50] 实验研究了悬臂圆柱罐的非线性水弹振动，发现了亚谐、超谐和组合响应。Afaneh 等（1993）[51] 对初始屈曲的两端固支梁在正弦激励下的 1：1 内共振区域进行了实验分析，发现能量转移及响应的情况。Zaretzky 等（1994）[52] 实验研究了具有 1：1 非线性耦合作用的基础受横向周期激励时，其悬臂梁的非线性响应。

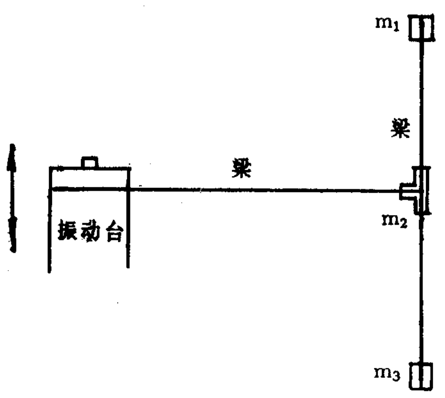

图 4 T 型梁-质量结构

还有一些学者[53-57] 对梁（杆）在外激或参数激励下进行了实验研究，发现了从小幅高频到低频大幅的能量转移和混沌运动等。

Nayfeh 等（1994）[58] 从理论和实验上研究了 3 自由度结构如图 4 所示，在 $\omega_3\approx\omega_1+\omega_2$ 和 $\Omega\approx\omega_3$ 情况下，实验观察到理论上预言的现象，即周期运动、两周期伪周期运动、锁相运动、多稳态解的共存，伴随跳跃和饱和现象，但也观察到一些理论上没有解释的现象。Bux 和 Roberts[59] 对两耦合梁进行了实验，观察到 3 个、4 个模态相互作用的响应。Molteno 和 Tufillaro[60] 给出了弦的混沌运动的实验。O'Reilly 和 Holmes[61] 对弦进行了平面外和非周期振动的实验。Fujino 等人（1993）[62] 的实验用一个 3 自由度模态的悬索梁来模拟悬索桥。Saliba（1994）[63] 做了具有刚性支点支承的悬臂板的自由振动分析。Green 和

Čebon (1994)[64] 实验模拟了桥对车辆轮载的动力学响应。

1994 年 6 月在美国 Virginia 举行的第五届非线性振动、稳定性和结构动力学会议上[2,65]，Afaneh 和 Ibrahim 报告了具有多重内共振的组合梁系统在随机激励作用下响应的实验研究结果。Yasuda 报告了弹性结构的多模态振动的理论和实验结果。Popovic 等报告了在 3 根梁组成的柔性框架上所做的关于能量从高阶模态向低阶模态转移的结果。以上实验表明，能量转移的通道是 1/2 亚谐共振，组合共振以及任一高阶模态与第一阶模态的相互作用。

4.3 实验数据的分析与处理

多种技术方法可用来对实验所获得的非线性振动或混沌运动的数据进行处理和识别[66]，这些技术包括响应的时间历程、相图、Poincaré 映射、FFT、功率谱密度、概率密度分布和分岔图、定量辨别混沌运动的分数维和 Lyapunov 指数。非线性振动系统实验的响应由时间序列给出，对此进行处理可得到幅频响应曲线、响应幅值-激励幅值曲线、Fourier 谱、Poincaré 映射（截面）、混沌吸引子的分维数，以此可判断运动响应的性质。幅频响应曲线可给出解的多值性和跳跃现象，从振幅-振幅曲线上可看出饱和现象和模态间的能量转移。周期运动响应有明显的功率谱，离散的频率谱是规则运动的特征，而确定性的混沌具有连续谱。伪周期运动响应在相空间中的轨线位于 T^n 环面上，因此伪周期运动的 Fourier 谱是非常复杂的，但当频率能公比时，运动是简单的周期响应。Poincaré映射保留了原系统的许多特性，如果解是周期的，在相空间上其曲线是封闭的，其 Poincaré 映射是一个固定点[67]。为实验系统构造相空间轨线，可采用时滞和嵌入方法[68]。在模态分析的基础上，构造伪相空间，分析其 Poincaré 映射，可以说明运动是伪周期的或混沌运动，通过 Poincaré 截面也可以确定调制运动是否已达到稳态。维数的概念有不同的定义，在实验数据处理过程中，采用最容易应用的点维数，以此来断定运动的性质。

5 结束语（展望）

实验研究具有重要的价值，它从宏观上展示了非线性现象的存在，为非线性动力学理论家提供了易于感知的、适当的和精确的实例，实验是检验理论的唯一方法，反过来，它促使研究者发展新的分析方法来处理观察到的新的非线性现象，非线性动力学实验的研究具有重大的现实意义和应用价值：

1）继续验证理论分析的结果，对理论上发现的复杂动力学行为可给出直观解释，同时，实验还可发现一些新的现象，这必将促进非线性科学理论更深入、更迅速的发展。

2）模拟仿真实际结构的非线性振动响应，为工程应用提供依据。

3）结构动力屈曲问题已成为固体力学中十分活跃的研究领域[69]。振动屈曲或参数共振不同于强迫振动的动力屈曲，例如对纵向受激励 $P(t)=P_0+f\cos\omega t$ 的杆（如图 2 所示），参数 P_0，f，ω 和杆的细长比 λ 的某些组合，会使杆产生大幅的横向振动（称为屈曲），而另一些组合则不会，因此在 P_0，f，ω 和 λ 的参数空间中，形成了动力稳定和不稳定区，两个区域的边界构成杆的临界载荷区。通过对受参激作用梁的实验，可以确定其动力屈曲准则。

4）共振现象是振动系统中不可避免的复杂动力学现象，如前所述，单自由度非线性系

统中除存在主共振、参数共振外，还存在亚、超谐共振、分数共振等，而在多自由度系统中除上述现象外，还可能存在内共振、组合共振，以及由于系统维数的增加带来的新现象，这些现象的实验研究具有重要价值．通过实验观察已肯定了饱和现象在真实物理系统中的存在，这在减振领域中的应用必定具有重要意义．因为这样的非线性振动减振器不仅比线性减振器[70-72]具有好处而且表现出主响应独立于激励水平的优点．传统的主子系统减振器，通常是以子系统的振动为代价来减轻（小）主系统的响应，但是这里是基于一个模态的振动被另一个模态吸收来考虑的．因此利用饱和现象来设计振动减振器必具有广泛的实际意义．Tucr 等人[73]报道了用内共振来对主动振动进行抑制的理论分析结果．

5）理论分析已经证明在确定性的非线性系统中混沌运动的存在，以及给出了一些系统中产生混沌运动的阈值，但至今没有工程师们喜爱的一个象“雷诺数”的临界参数．借助实验模型，可以给出在激励频率和幅值的一套参数下混沌运动发生的区域，以便在设计和实际操作中利用．

6）混沌的控制与非线性振动参数的识别[74-78]．混沌广泛发生在机械系统中．机械系统的数学模型经常由一组 Duffing，van der Pol 振子耦合组成，通过实验已验证混沌行为发生在这些系统中．过去，混沌被认为是不规则的或不可预测的行为，是随机外力的影响，是有害的，并且如果可能的话，在设计中避免．但现在混沌的行为可被控制（或消去）和利用，控制混沌、转变混沌行为到周期响应，把混沌设计到系统中，在某些参数区域内，使混沌运动被接受．例如在保密通讯中，使发送的信号产生混沌，以防窃取破译，待接收后再消去其混沌变成周期信号．工业上，为避免金属疲劳，可使金属机械在混沌态中度过空载期，而在满载条件下作严格周期运动．结构识别是预言给定结构在各种载荷条件下的非线性响应，通过实验可以获得系统的物理和结构因素如对称、密度、频率关系和变形等非线性相互作用．

参 考 文 献

1 陈予恕．非线性振动．天津科学技术出版社，天津（1983）

2 陈予恕．工程非线性动力学的最新进展．中国力学学会一般力学学术会议报告，1994年10月，宜昌

3 Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillation. Wiley-Interscience, New York (1979)

4 陈予恕．非线性振动，分岔与混沌的最新进展与展望．见：黄文虎，陈滨，王照林主编．一般力学最新进展．科学出版社，北京（1994）：19—29

5 陆启韶，黄克累．非线性动力学，分岔和混沌．见：黄文虎，陈滨，王照林主编．一般力学最新进展．科学出版社．北京（1994）：11—18

6 赵松年．非线性科学：它的内容、方法和意义．世界科学，**11**（1992）：6—10，**12**（1992）：1—6

7 Natsiavas S, Hayler L B. Modal interaction and bifurcations in two degree of freedom Duffing oscillators. *Nonlinear Dynamics*, **2** (1991) : 405—417

8 Fang T, Dowell E H. Numerical simulations of jump phenomena in stable Duffing systems. *Int. J. Non-linear Mechanics*, **22**, 3 (1987) : 267—274

9 Fang T, Dowell E H. Numerical simulations of periodic and chaotic response in a stable Duffing system. *Int. J. Non-linear Mechanics*, **22**, 5 (1987) : 401—425

10 季海波，武际可．分岔问题及其数值方法．力学进展，**23**，4（1993）：493—502

11 周炎勋，王正中，邱陶国．模拟与混合计算技术．国防工业出版社，北京（1980）

12 Ueda Y, Hayaski C, Akamatsu. Computer simulation of nonlinear ordinary differential equations and nonperiodic oscillations. *Electronics and Communications in Japan*, **56**-A, 3 (1973)

13 Ueda Y. Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation. *Journal of Statistical Physics*, **20** (1979) : 181—196

14 Holmes P J. Strange phenomena in dynamical systems and their physical implications. *Applied Mathematical Modelling*, **1**, 7 (1977) : 362—366
15 Holmes P J. A nonlinear oscillator with a strange attractor. *Philosophical Trans. of Royal Society London*, **292**, 1394 (1979) : 419—448
16 Yamamoto T, Yasuda K. On the internal resonance in a nonlinear two-degree-of-freedom system. *Bulletin of Japanese Society of Mechanical Engineering*, **20** (1977) : 168—175
17 Yamamoto T, Yasuda K, Nagasaka I. On the internal resonance in a nonlinear two-degree-of-freedom system. *Bulletin of Japanese Society of Mechanical Engineering*, **20** (1977) : 1093—1101
18 Evensen D A. Nonlinear flexural vibrations of thin circular rings. *J. Appl. Mech.*, **33** (1966) : 553—560
19 Abou-Rayan A M. Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear response of a parametrically excited buckled beam. *Nonlinear Dynamics*, **4** (1993) : 499—525
20 Moon F C, Holmes P J. A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*, **65**, 2 (1979): 275—296
21 Moon F C. Experiments on chaotic motions of a forced nonlinear oscillator: strange attractors. *ASME J. Appl. Mech.*, **47** (1980) : 638—644
22 Dowell E H, Pezeshki C. On the understanding of chaos in Duffing equation including a comparison with experiment. *ASME J. Appl. Mech.*, **53** (1986) : 5—9
23 Gottwald J A, Virgin L N, Dowell E H. Experiment mimicry of Duffing's equation. *Journal of Sound and Vibration*, **138**, 3 (1992) : 447—467
24 Bayly P V, Virgin L N. An experimental study of an impacting pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, **164**, 2 (1993) : 364—374
25 Moore D B, Shaw S W. The experimental response of an impacting pendulum system. *Int. J. Non-linear Mechanics*, **25**, 1 (1990) : 1—16
26 Moon F C, Cusumano J, Holmes P J. Evidence for homoclinic orbits as a precursor to chaos in a magnetic pendulum. *Physica D*, **24** (1987) : 383—390
27 Leven R W, Pompe B, Wilke C, Koch B P. Experiments on periodic and chaotic motion of a parametrically forced pendulum. *Physica D*, **16** (1985) : 371—384
28 Tseng W Y, Dugundji J. Nonlinear vibration of a beam under harmonic excitation. *ASME J. Appl. Mech.*, **37** (1970) : 292—297
29 Tseng W Y, Dugundji J. Nonlinear vibration of a buckled beam under harmonic excitation. *ASME J. Appl. Mech.*, **38** (1971) : 467—476
30 Zavodney L D, Nayfeh A H. The non-linear response of a slender beam carrying a lumped mass to a principal parametric excitation: theory and experiment. *Int. J. Non-linear Mechanics*, **24**, 2 (1989) : 105—125
31 陈予恕，叶敏，詹凯君．非线性 Mathieu 方程 1/2 亚谐分岔解的实验研究．应用力学学报，**7**，4 (1990) : 11—16
32 陈予恕．非线性振动系统的分岔和混沌理论．高等教育出版社，北京 (1993) : 454
33 陈予恕，王德石，叶敏．轴向激励下梁的混沌运动．非线性动力学报，**1**，2 (1994) : 124—135
34 Feeny B, Moon F C. Chaos in a forced dry-friction oscillator: experiment and numerical modelling. *Journal of Sound and Vibration*, **170**, 3 (1994) : 303—323
35 Gorelik G, Witt A. Swing of an elastic pendulum as an example of two parametrically bound linear vibration systems. *Journal of Technical Physics (USSR)*, **3** (1933) : 244—307
36 Chen J C, Babcock C D. Nonlinear vibration of cylindrical shells. *AIAA Journal* **13** (1975) : 868—876
37 Hatwal H, Mallik A K, Ghosh A. Forced nonlinear oscillations of an autoparametric system-part 1: periodic response. *ASME J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 657—662
38 Hatwal H, Mallik A K, Ghosh A. Forced nonlinear oscillations of an autoparametric system-part 2: chaotic response. *ASME J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 663—668
39 Nayfeh A H. Application of the method of mutiple scales to nonlinearly coupled oscillators. Chapter for the Lasers, Molecules, and Methods, a volume in the Advances in Chemical Physics Series. Wiley, New York (1988)
40 Nayfeh A H, Balachandran B. Modal interactions in dynamical and structural systems. *Appl. Mech. Rev.*, **42**. 11 (1989) : s175—s201
41 Haddow A G, Barr A D S, Mook D T. Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure. *Journal of Sound and Vibration*, **97**, 3 (1984) : 451—473

42 Nayfeh A H, Zavodney L D. Experimental observation of amplitude-and phase-modulated response of two internally coupled oscillators to a harmonic excitation. *ASME J. Appl. Mech.*, **55** (1988): 706—710

43 Nayfeh A H. On the undesirable roll characteristics of ships in regular sea. *Journal of Ship Reserch*, **32** (1988) : 92—100

44 Nayfeh A H, Raouf R A. Nonlinear forced response of infinitely long circular cylindrical shells. *Journal of Hydronautics*, **7** (1987) : 145—152

45 Nayfeh A H, Balachandran B, Colbert M A. Nayfeh M A. An experimental investigation of complicated responses of a two-degree-of-freedom structure. *ASME J. Appl. Mech.*, **56** (1989) : 960—967

46 Nayfeh A H, Balachandran B. Experimental investigation of resonantly forced oscillations of a two-degree-of-freedom structure. *Int. J. Nonlinear Mechanics*, **25** (1990) : 199—209

47 Balachandran B, Nayfeh A H. Observations of modal interactions in resonantly forced beam-mass structures. *Nonlinear Dynamics*, **2** (1991) : 77—117

48 Yukio Ishida, Toshio Yamamoto. Forced oscillations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics and internal damping. *Nonlinear Dynamics*, **4** (1993) : 413—431

49 Chiba M. Non-linear hydroelastic vibrations of a cantilever cylindrical tank-I: experiment (empty case) . *Int. J. Nonlinear Mechanics*, **28**, 5 (1993) : 591—599

50 Chiba M. Non-linear hydroelastic vibrations of a cantilever cylindrical tank-Ⅱ experiment (liquid filled case) . *Int. J. Nonlinear Mechanics*, **28**, 5 (1993) : 601—612

51 Afaneh A A, Ibrahim R A. Nonlinear response of an initially buckled beam with 1 : 1 internal response to sinusoidal excitation. *Nonlinear Dynamics*, **4** (1993) : 547—571

52 Zaretzky C L, Crespo da silva M R M.Experimental investigation of modal coupling in the response of cantilever beams. *Journal of Sound and Vibration*, **174**, 2 (1994) : 145—167

53 Haddow A G, Hasan S M. Nonlinear oscillation of a flexible cantilever: experimental results. Proceedings of the Second Conference on Non-linear Vibrations, Stability, and Dynamics of Structures and Mechanisms, Blacksburg, VA (1988)

54 Burton T D, Kolowith M. Nonlinear resonances and chaotic motion in a flexible parametrically excited beam. Proceedings of the Second Conference on Non-linear Vibrations, Stability, and Dynamics of Structures and Mechanisms, Blacksburg, VA (1988)

55 Cusumano J P, Moon F C, Low dimensional behavior in chaotic nonlinear motions of a forced elastic rod: experiment and theory. Nonlinear Dynamics in Engineering Systems, IUTAM Symposium, Germany (1989)

56 Anderson T J, Balachandran B, Nayfeh A H. Observations of nonlinear interactions in a flexible cantilever beam. AIAA Paper No.92-2332, 33rd AIAA Structures, Structural Dynamics and Material Conference, Dallas, Texas (1992)

57 Nayfeh S A, Nayfeh A H. Energy transfer from high-to low-frequency modes in a flexible structure via modulation. *Journal of Vibration and Acoustics*, **116** (1994) : 203—207

58 Nayfeh T A, Nayfeh A H, Mook D T. A theoretical and experimental investigation of a three-degree-of-freedom structure. *Nonlinear Dynamics*, **4** (1993) : 111—138

59 Bux S L, Roberts J W. Nonlinear vibratory interactions in systems of coupled beams. *Journal of Sound and Vibration*, **104**, 3 (1986) : 497—520

60 Molteno T C A, Tufillaro N B. Torus doubling and chaotic string vibrations: experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, **137** (1990) : 327—330

61 O'Reilly O, Holmes P J. Nonlinear, non-planar and non-periodic vibrations of a string. *Journal of Sound and Vibration*, **153**, 3 (1992) : 413—435

62 Fujino Y, Wrnitchai P, Pacheco B M. An experimental and analytical study of autoparametric resonance in a 3 DOF modal cabble-stayed-beam. *Nonlinear Dynamics*, **4** (1993) : 111—138

63 Saliba H T. Experimental free vibration analysis of rectangular cantilever plates with rigid point supports. *Journal of Sound and Vibration*, **174**, 4 (1994) : 459—472

64 Green M F, Cebon D. Dynamic response of highway bridges to heavy vehicles loads: Theory and experimental validation. *Journal of Sound and Vibration*, **170**, 1 (1994) : 51—78

65 Nayfeh A H, Mook D T. Proceedings of the Fifth Conference on Nonlinear Vibrations, Stability, and Dynamics of Structures. Blacksburg, VA (1994)

66 TO C W S, Jin Z S. Characterization of nonlinear and chaotic motions by the cepstral analysis. *Nonlinear Dynamics*, **2** (1991) : 353—365

67 Ranada A F. Phenomenology of chaotic motion. a volume in Methods and Applications of Nonlinear Dynamics. World Scientific, Colombia (1986)
68 Gollub J P, Simonellic F, Goldberg J D. Advances in experimental nonlinear dynamics: space time patterns. in Chaos and Complexity. World Scientific, Torino (1987)
69 张清杰，刘士光等. 结构动力屈曲研究进展. 力学进展，**23**，4 (1994)：530—539
70 Hatwal H, Mallik A K, Ghosh A. Nonlinear vibrations of a harmonically excited autoparametric system. *Journal of Sound and Vibration*, **81** (1982)：153—164
71 Hatwal H. Notes on an autoparametric vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, **83** (1983)：440—443
72 Miller H M, Gartner J R. Nonlinear vibration absorber. ASME Report No. 75 (1975)，Tunable.
73 Tuer K L, Golnaraghi M F, Wang D. Development of a generalized active vibration suppression strategy for a cantilever beam using internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, **5** (1994)：131—151
74 Tuer K L, Duquette A P, Golnaraghi M F. Vibration control of a flexible beam using a rotational internal resonance controller, part 1, theoretical development and analysis. *Journal of Sound and Vibration*, **167**, 1 (1993)：41—62
75 Tuer K L, Duquette A P, Golnaraghi M F. Vibration control of a flexible beam using a rotational internal resonance controller, part 2: experiment. *Journal of Sound and Vibration*, **167**, 1 (1993)：63—75
76 Ibrahim R A. Nonlinear random vibration: experimenal results. *Applied Mechanics Review*, **44**, 10 (1991)：423—446
77 Balachandran B, Nayfeh A H, Smith S W, Pappa R S. Identification of nonlinear interactions in structures. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, **17**, 2 (1994)：257—262
78 Blazejczyk B, et al. Controlling chaos in mechanical systems. *Applied Mechanics Reviews*, **46**, 7 (1993)：385—391

THE EXPERIMENTAL STUDIES OF DYNAMICAL BEHAVIOR OF NONLINEAR OSCILLATING SYSTEMS

Chen Yushu Ji Jinchen
Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072

Abstract A review on the experimental studies of dynamical behavior of nonlinear oscillating systems in recent years is given. The emphasis is laid on mechanical model experiments. Analysis methods for dealing with experimental data are discussed in detail. Finally, some suggestions are given to the future studies on nonlinear vibration experiments.

Keywords *nonlinear oscillating systems; dynamical behavior; experiment*