第26卷 第3期 力学进展 Vol.26 No.3
1996年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1996

磁弹性、热磁弹性理论及其应用

白 象 忠
东北重型机械学院，富拉尔基 161042*

提要 介绍了磁弹性、热磁弹性的基本内容，发展简史，基本方程，理论研究，实际应用研究及其未来应用前景。

关键词 磁弹性；热磁弹性；耦合场

1 引 言

弹性物体中耦合场理论的创立和发展，对于处在高温、高压和强电磁场作用下的结构元件的强度、可靠性分析具有非常重要的意义。在最近的二、三十年中，由于航空、航天、化工、原子及核工业装置的防护系统、热加工、无损探伤、供电器械、超声技术、电声技术、地球物理、磁声加工工艺分析等方面实际应用的需要，尤其是薄壁结构的强度设计及其结构优化的需要，导致了耦合场理论及其未来应用向新的方向发展。

在上个世纪，变形固体力学的发展主要局限于研究线弹性理论和与其平行发展的计算技术，以及简化板壳问题的解决方法；而本世纪产生了变形体力学的新分支，即塑性理论和粘弹性、粘塑性理论；20世纪末，理论研究和实际应用研究的需要，使耦合场理论研究有了飞速发展，特别是磁弹性和热磁弹性相互作用的问题，在现代的力学发展中占有重要的位置。正象W.Nowacki[1]所指出的那样："耦合场理论的研究，其中电磁场与机械介质间的相互作用理论的发展，必将成为固体力学今后的主要发展方向之一"。耦合场理论的发展有着十分广泛的应用前途，它对于促进工业技术革命、实现科学技术现代化均将起到重要作用。本文将介绍耦合场理论中的磁弹性和热磁弹性理论的应用及其发展前景。

2 磁弹性和热磁弹性的基本概念

电磁效应是变形场同电磁场、温度场在弹性固体内外产生相互作用的一种效应。在线性状态范围内，此效应无论是对电介质，还是对导电物体均具有各式各样的数学模型。最近几年，把研究此效应的新兴学科称为耦合场理论。其中，磁弹性理论将专门研究电磁场同变形场的耦合，即研究在弹性固态物体中电磁场和变形场的相互作用。这个理论基本是线弹性理论和在自由运动介质中线性电动力学理论的耦合。如果所研究的弹性物体位于初始强大的磁场中，机械载荷、热载荷在引起变形场的同时，将要产生电磁场。两个场将发生相互作用和

* 现在地址：河北省秦皇岛市燕山大学，

相互影响，出现耦合机制．电磁场对变形场的作用是由运动方程中的洛仑兹力引起的．变形场会影响磁场的强度、磁弹性波和电磁波的传播速度与位相，具体表现在欧姆定律中多了电流密度增长项，而且，该项取决于变形物体在磁场中位移的速度．

热磁弹性理论是专门研究电磁场、温度场同变形场的耦合的．热磁弹性理论的产生，对于处在高温高压和强电场作用下的结构及结构元件的强度与可靠性分析具有非常重要的意义．我们知道，热弹性理论是将弹性和热传导结合在一起讨论温度场和变形场相互耦合的理论，这是自然界各物理场相互作用的一个古典例证；而热磁弹性将囊括经典的弹性理论、热传导和电磁场理论，且用以解决位于磁场中考虑热作用下的导电体弹性变形及运动的一些技术问题，即解决温度场、变形场和电磁场的相互作用和相互影响问题．

弹性电磁效应还研究变形体和电磁场、温度场的耦联问题．例如，在压电晶体中的压电效应和与温度场相关的热压电效应问题．

应该指出，温度场、电磁场同导体、变形物体间的相互作用问题的研究才刚刚起步，许多因素在理论中都未能考虑，例如大多数工作都没有考虑磁和电的极化特征．当弹性物体材料（例如铁磁材料）具有磁极化特征时，场相互作用的机制将明显变得复杂．近来，曾有人采用简化理论，即线性化理论来处理较复杂的磁化问题．

磁、热、电变形相互作用的如下理论，在某种程度上代表着对其现象的一些不同观点，而这些观点将成为目前解决问题的有效手段[2]．

①变形弹性体位于强的静电磁场中，其变形与电磁相互作用所产生的洛仑兹力，对于磁场中运动的物质介质是满足广义欧姆定律的．且可得到与弹性介质相关的电动力学方程．弹性介质由此产生的电磁场所引起的机械作用要比原来磁场引起的机械作用小，这一理论曾广泛应用于定常磁场中薄板和薄壳的磁弹性计算．

②在研究变化的电磁场中导电体的热弹性问题时，大多数采用简化系统．该系统是忽略机械电效应和热电效应的．利用电动力学的不相关方程可确定感应电流和由它们引起的且按照电磁波波动周期进行的热传导规律，因此，在所给定的模型中没有考虑电磁场同变形及温度间的联系，而由热源的传播和分布来确定温度场和电导体的应力应变状态．还可用该系统来确定时变电磁场作用下变形导体的热弹性状态，从而成为研究金属结构零件感应热加工工艺制度的理论基础．

③在研究磁感应材料的磁弹性相互作用时，必须考虑外电磁场引起的磁感应效应．静电磁场中具有小磁滞损失的软磁材料的磁感应理论，其电磁场运动方程中除了有洛仑兹力外还包含有其它成分的电磁感应质动力项．这时会使线性状态方程和软磁材料的原始状态方程变得十分复杂．此类问题的研究有着实际的应用前景，因为种种磁感应材料，例如铁合金，已被广泛应用于电机、电感器、变压器和其它处于强磁场作用下的电气元件中．

④磁弹性、热磁弹性理论和其它理论，例如，相对论理论、大变形理论、磁各向异性理论、导流理论以及在顺磁材料中、或者是在软磁材料中的磁感应理论等等，一起建立起了更加复杂的，能反映出相互作用的数学模型与物理模型．

3 磁弹性、热磁弹性理论的基本方程

3.1 磁弹性理论的基本方程

位于强磁场中的弹性体，由于机械载荷或者温度载荷的作用，在弹性体中产生了与电磁场有关的变形场．如果该弹性体为各向同性介质且具有良好的导电性，又处于静止的初始状态，那么这时所研究的对象及电磁场将满足马克斯威尔方程[3]

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}; &&\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\&\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho_e; &&\operatorname{div}\mathbf{B}=0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 $\mathbf{H}$ 为磁场强度矢量，$\mathbf{E}$ 为电场强度矢量，$\mathbf{B}$ 为磁感应矢量，$\mathbf{D}$ 为电位移矢量，$\mathbf{J}$ 为导流密度矢量，ρ_e 为自由电荷密度．当弹性介质处于运动状态且电磁场发生变化时，弹性体满足介质的运动方程，同时，在运动方程中出现作用于变形场的洛仑兹质动力，该力是受电场中的自由电荷密度和导流密度约束的，即

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij,j}+X_i+f_i=\rho\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}\\&f_i=\rho_e E_i+(\mathbf{J}\times\mathbf{B})_i\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中 σ_{ij} 为应力张量，U_i 为弹性介质位移矢量，ρ 为介质材料密度，X_i 为体力矢量，f_i 为洛仑兹质动力．对于线弹性物体则满足

$$\text{虎克定律}\quad \sigma_{ij}=2G\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \tag{3}$$

$$\text{应变关系式}\quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(U_{i,j}+U_{j,i}) \tag{4}$$

不考虑介质的偏振与极化效应，其介质状态方程为

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}\varepsilon+\alpha\mathbf{V}\times\mathbf{H};\quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}-\alpha\mathbf{V}\times\mathbf{E};\quad \alpha=\varepsilon\mu-\varepsilon_0\mu_0 \tag{5}$$

在式（3）、（4）、（5）中，G、λ 为弹性常数，$\mathbf{V}=\dfrac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}$，$\varepsilon$ 为介质常数，μ 为磁导系数，ε_0 为真空介电常数，μ_0 为真空磁导系数，δ_{ij} 为单位张量．对于运动的介质，导流密度矢量将由广义欧姆定律

$$\mathbf{J}=\rho_e\mathbf{V}+\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}) \tag{6}$$

来确定．式中 σ 为介质的电导率．方程式（1）至（6）形成了各向同性介质的磁弹性非线性方程的封闭系统．这些方程应当是在给出初始条件和区别二种介质表面的边界条件之后得到解．一般情况下，当在弹性物体的边界表面 S 上不存在电流和电荷时，电磁场的边界条件可写成[2]

$$\begin{aligned}&[\mathbf{E}_\tau+\mathbf{V}\times\mathbf{B}_\tau]=0; &&[\mathbf{H}_\tau-\mathbf{V}\times\mathbf{D}_\tau]=0;\\&[\mathbf{B}]\cdot\mathbf{n}=0; &&[\mathbf{D}]\cdot\mathbf{n}=0;\\&\sigma[\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}]\cdot\mathbf{n}+\rho_e\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=0\end{aligned} \tag{7}$$

这里符号 $[S]$ 代表相应表面上量值的突变值．$\mathbf{n}$ 为表面 S 的法向单位矢量，并假设速度 V 在表面 S 上是连续的，脚标 τ 代表相对应物理量切向方向的分量．

对于机械应力来说，在形成边界条件时，必须考虑在电磁场作用下，介质中出现拉应力或压应力，这些应力是由马克斯威尔电动应力张量

$$T_{ij}=E_iD_j+H_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}(E_kD_k+H_kB_k) \tag{8}$$

确定的。因此，物体中全部应力等于弹性应力与马克斯威尔应力之和，而在边界 s 上的边界条件可写成[4]

$$[\sigma_{ij}+T_{ij}]n_j=0 \tag{9}$$

3.2 热弹性理论的基本方程

电磁场和温度场对弹性物体变形所带来的影响引起了学者们对热磁弹性问题研究的注意。在解决这类问题时，不但要考虑马克斯威尔热传导方程存在的条件、材料本构方程、介质运动方程和欧姆定律存在的条件，还必须补充更加普遍的介质导热、导电的方程式[2]

$$K\nabla^2T+Q=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+T_0\beta\frac{\partial e}{\partial t}+\Pi_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{J} \tag{10}$$

这里 Q 为热源的强度，K 为热传导系数，$\beta=(3\lambda+2G)\alpha$，$\alpha$ 为线性扩散系数，$\mathbf{J}$ 为导流密度矢量，$e=\mathrm{div}\,\mathbf{V}$，$\Pi_0$ 为由电流对热流密度的影响来确定的系数。c 为光速，T、T_0 分别为温度和初始温度。在广义欧姆定律表达式中，需要补充与电磁场及温度有关的部分，即

$$\mathbf{J}=\sigma[\mathbf{E}+(\mathbf{V}\times\mathbf{B})]-K_0\,\mathrm{grad}\,T+\rho_0\mathbf{V} \tag{11}$$

其中 K_0 为与温度变化有关的系数。

有限速度热传导的磁弹性普遍方程系统，是在研究无限各向同性介质中传播的平面电磁热弹性波的基础上得到的。若设 $T-T_0=\theta$，电磁场的扰动为 $\mathbf{h}$，$\mathbf{e}$ 及弹性位移矢量 $\mathbf{u}$，则有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu}\nabla^2\theta=\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial\theta}{\partial t}+q\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial e}{\partial t}\\
&\qquad-\Pi\,\mathrm{div}\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta_0^2\mathbf{e}+\alpha_0^2\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{n}_0\right)\\
&\nabla^2\mathbf{h}=\left(1+\beta_0^2\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t}-\left(1+\alpha_0^2\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{rot}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{n}_0\right)\\
&\nabla^2\mathbf{u}+\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)\mathrm{grad}\,\mathbf{e}-b\,\mathrm{grad}\,\theta+R_H(\mathrm{rot}\,\mathbf{h}\times\mathbf{n}_0)\\
&\qquad-R_H\frac{\partial}{\partial t}\left[\beta_0^2\mathbf{e}+\alpha_0^2\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{n}_0\right]\times\mathbf{n}_0=\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

这里 $\nu=\dfrac{\rho C}{\lambda\sigma\mu}$；$q=\dfrac{(3\lambda+2G)\cdot\alpha}{\rho C}$；$\beta_0^2=\varepsilon\mu C_2^2$；$C_2^2=\dfrac{G}{\rho}$；$\alpha_0^2=(\varepsilon\mu-\varepsilon_0\mu_0)C_2^2$；$\beta^2=\dfrac{G}{(\lambda+2G)}$；$b=(3\lambda+2G)\alpha_0T_0/G$；$R_H=\dfrac{\mu H_0^2}{G}$；$\tau=\tau_0\sigma\mu C_2^2$，$\tau_0$ 为热松弛时间，$\Pi=\dfrac{\Pi_0\sigma\mu H_0}{\rho CT_0}$，$\mathbf{n}_0$ 为 H_0 方向的单位矢量，C 为光速。

3.3 考虑磁化强度效应的磁弹性方程

外磁场作用于物体将产生磁化强度现象，其表现是置于外磁场中的物体形成的磁矩，即从外电磁场方向产生了转动的机械作用。欲研究该现象，首先应研究磁化强度矢量 $\mathbf{M}$，$\mathbf{M}$ 与磁矩方向重合，且等于变形物体单位体积上所产生的磁矩数值。物体内部的磁感应矢量 $\mathbf{B}$ 由

$$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}) \tag{13}$$

确定，式中 $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\mathrm{H/m}$。在推导考虑介质磁化强度运动方程时，还必须考虑介质中单位质量上作用的一对体力 f_k 和 I_k，即

$$f_k=\mu_0M_jH_{k,j};\qquad I_k=\mu_0\varepsilon_{kji}M_jH_i \tag{14}$$

式中 ε_{ijk} 为 Кронекер 对称符号。由动量和动量矩方程可得介质的磁化强度运动方程为

$$t_{ij,i} + \mu_0 M_i H_{j,i} = \rho \ddot{u}_j \tag{15}$$

和关系式

$$\varepsilon_{ijk}(t_{jk} + \mu_0 M_j H_k) = 0 \tag{16}$$

式中 t_{ij} 为非对称应力张量，u_j 为位移矢量；其中，式（16）可以写成

$$t_{jk} - t_{kj} + \mu_0(M_j H_k - M_k H_j) = 0 \tag{17}$$

因此，考虑了磁化强度后导致了非对称的应力张量 t_{ij}，该张量与弹性理论中的对称应力张量 σ_{ij} 不同，若设

$$t_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\mu_0}{2}(M_i H_j - M_j H_i) \tag{18}$$

则介质的磁化强度运动方程可以写作

$$(t_{ij} + t^{m}_{ij})_{,i} = \rho \ddot{u}_j \tag{19}$$

其中 $t^{m}_{ij} = \mu_0\left[H_i H_j - \frac{1}{2}(H_k H_k)\delta_{ij}\right] + \mu_0 M_i H_j$，称为马克斯威尔非对称磁张量。对于软磁性材料，即材料具有较明显小的磁滞损失（窄的磁滞回线）和较低的剩磁效应，物体介质的弹性磁化运动方程（19）还需要补充准静态磁化强度方程

$$B_{i,i} = 0; \qquad H_{j,k} - H_{k,j} = 0 \tag{20}$$

和相应的边界条件

$$\left.\begin{aligned} &(t_{ij} + t^{m}_{ij})n_i = P_i; \qquad n_i(B^{+}_i - B^{-}_i) = 0 \\ &n_j(H^{+}_k - H^{-}_k) - n_k(H^{+}_j - H^{-}_j) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式中 n_i 为表面 S 的法向单位矢量，其方向为从表面（－）向指向表面的（＋）向。P_i 为边界处应力。

3.4 电磁场同各向异性物体相互作用的动力方程

当所研究的材料具有磁对称、偏振、磁化强度特性，并且是电热导体和粘弹性物体时，利用热动力势和自由能、熵的不平衡原理，可以得到各向异性导电、导热介质的线性状态方程[5]。当研究单一类型磁场强度、方向对在导电和磁感应各向异性粘弹性物体中的平面波的传播速度、相位、阻尼的影响，且不考虑自由电荷时，其变形和运动介质的马克斯威尔方程[6]可记作

$$\varepsilon_0 E_{i,i} = \rho^{(p)}; \qquad \mu_0 H_{i,i} = \rho^{(m)}$$

$$\varepsilon_{ijk} E_{k,j} + \mu_0 \frac{\partial H_i}{\partial t} = -J^{(m)}_i$$

$$\varepsilon_{ijk} H_{k,j} - \varepsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial t} = J_i + J^{(p)}_i$$

这里 $\rho^{(p)} = -P_{i,i}$，$\rho^{(m)} = -\mu_0 M_{i,i}$，分别为偏振电荷密度和磁化电荷密度。

$$J^{(p)}_i = \frac{\partial P_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}(P_m V_n)_{,j}, \quad J^{(m)}_i = \frac{\partial(\mu_0 M_i)}{\partial t} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}(\mu_0 M_m V_n)_{,j}$$

分别为偏振电流和磁化电流，P_i 为偏振电荷量，J_i 为导流，V_n 为物体粒子速度。此外，

若考虑由导电性、偏振性和磁化性所决定的电磁质动力[7]，则

$$\rho f_i=\varepsilon_{ijk}J_j\mu_0H_k+\rho f_i^{(p)}+\rho f_i^{(m)}$$

$$\rho f_i^{(p)}=P_kE_{i;k}^{\prime}+\mu_0\varepsilon_{ijk}\left\{V_iP_mH_{k;m}^{\prime}+\left[\frac{\partial P_i}{\partial t}+(V_mP_j)_{;m}^{\prime}\right]H_k\right\}$$

$$\rho f_i^{(m)}=\mu_0M_kH_{i;k}^{\prime}-\varepsilon_0\varepsilon_{ijk}\left\{V_j\mu_0M_mE_{k;m}^{\prime}+\left[\frac{\partial\mu_0M_j}{\partial t}+(V_m\mu_0M_j)_{;m}^{\prime}\right]E_k\right\}\tag{22}$$

3.5 偏振磁弹性介质的线性状态方程

如果介质处于原始各种磁状态，那么它是弹性的也是各向同性的。如果将热动力势分解成级数，可以得到与弹性磁化材料近似的状态方程。选择自由能的热动力势作为物理量单位，利用分解得出级数形式的变形张量 ε_{ij} 的分量、单位磁化强度矢量 M*（磁矩单位）和温度改变量 ΔT。对于原始的介质状态，选择了 $\varepsilon_{ij}=0$，$M_q^*=0$（M_q^* 为磁矩），$T=T_0$，并假设单位体积自由能的变化有形式

$$\mathrm{d}F=H\,\mathrm{d}M_q+\sigma_{ji}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-S\,\mathrm{d}T\tag{23}$$

其中 $M_q=M_q^*/v$ 为磁化强度（单位体积磁矩）；S 为熵；如果给出 M_0 为磁化强度 M_q 的常数部分（M_0 为顺着 Z 轴的偏振磁化强度），并且由于 $|I_q|\ll|M_0|$，I_q 为在数值仅有微小变化时的 M_q 的组成部份，所以，偏振介质的状态方程就可以由非偏振磁弹性介质的状态方程得到。这时偏振磁弹性介质的线性状态方程将采用形式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i&=\sigma_i^0+C_{ij}(I,T)\varepsilon_j+h_{mi}(\varepsilon,T)I_m+\beta_i(\varepsilon,I)\Delta T\\H_n&=H_n^0+h_{nj}(I,T)\varepsilon_j+\gamma_{mn}(\varepsilon,T)I_m+P_n(\varepsilon,I)\Delta T\\\Delta Q&=\Delta Q^0-T\beta_j(I,T)\varepsilon_j-TP_m(\varepsilon,T)I_m+\rho C(\varepsilon,I)\Delta T\\&\qquad(i,j=1,2,\cdots6;\ m、n=1,2,3)\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

这里 $C_{ij}(I,T)$ 为弹性模量张量；$h_{mi}(\varepsilon,T)$、$h_{nj}(I,T)$ 为等容磁致伸缩常量张量；$\beta_i(\varepsilon,I)$、$\beta_j(I,T)$ 为机械应力温度系数张量；$\gamma_{mn}(\varepsilon,T)$ 为反向敏感等容系数；$P_n(\varepsilon,I)$、$P_m(\varepsilon,T)$ 为热磁常数；$C(\varepsilon,I)$ 为在给定变形和给定磁化强度变化量下测得的热容量；H_n^0 为磁场偏振强度；σ_i^0、ΔQ^0 分别为受磁化偏振 M_0 限制的机械应力和热量的改变量；ε_j 为应变量，ΔT 为温度改变量，I_m 为磁化强度变化量。应该注意，在式（24）中采用了对称应力张量 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,6)$，且所有的系数张量均为偏振磁化强度 M_0 的函数。

3.6 弹性体在磁场中的振动和热弹性波的传播方程

热、电导体中的热磁弹性波的传播与振动过程的研究建立在如下方程组研究的基础上：弹性介质考虑质动力的运动方程，考虑焦耳热的热传导方程、缓慢运动介质的电动力学方程。这些方程构成的非线性方程组其非线性关系由质动力、焦耳热和欧姆定律确定。

在有限变形和各向异性导电介质电动力学方程和弹性理论方程的基础上，得到了位于磁场中预受力物体的磁弹性线性化方程，其运动方程为[8]

$$[\sigma_{ij}^*(\delta_{kj}+u_{k;j}^{\prime})]_{;i}^{\prime}+F_k=\rho\frac{\partial^2U_k}{\partial t^2}\tag{25}$$

其中 $F_k=\varepsilon_{klm}J_lB_m$ 为洛仑兹力，σ_{ij}^* 为与变形有关的非线性超弹性各向异性物体的一般应

力，其表达式为

$$\sigma^{*}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_{ij}}+\frac{\partial}{\partial l_{ji}}\right)\Phi \tag{26}$$

这里 Φ 为弹性势函数，l_{ij} 为格林变形张量．同时利用各向异性物体电动力学的关系

$$B_i=\mu_{ij}H_j;\quad D_i=\varepsilon_{ij}E_j;\quad J_i=\gamma_{ij}\left(E_j+\varepsilon_{jpk}\frac{\partial U_p}{\partial t}B_k\right) \tag{27}$$

并假设张量 μ_{ij}、ε_{ij}、γ_{ij} 的分量是变形张量 e_{ij} 的函数．采用一般线性化程序可得到各向异性物体和各向同性物体在具有任意初始变形状态下弹性方程的线性化系统；同时可研究平面波在各向同性导体中，承受单一状态变形和单一方向磁场中的传播问题；还可给出确定在各向同性导体中分析磁弹性波频率的方程，进而研究同一方向的初始变形对电磁波衰减速度和传播速度的影响．

3.7　电导体热弹性状态分析方程

对处于横向电磁场的电导体，其热弹性状态的确定性分析研究，利用了一系列与磁弹性问题不相关的简化系统．该系统在于利用电动力学方程来确定电磁场和焦耳热分布．根据电磁场振动周期的平均值可以得到确定焦耳热量的表达式，它可以像热传导方程中热源功率不间断分布的表达式一样加以利用．当确定了温度场后，便可以找到准静态物体的应力应变状态．此时，忽略了机电和热电效应以及质动力与变形场、温度场相联系的效应，可导出导电体在不考虑偏振和磁化效应时的电动力学和热弹性的基本方程．其中，电动力学方程对于物体外部已经给定电流情况下，可表达如下：

若在感应物体内部的电流密度 $\mathbf{j}^{(0)}(r,t)$ 表达式为

$$\mathbf{j}^{(0)}(r,t)=j(t)\,\mathbf{j}^{(0)}(r)\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{28}$$

式中 $j(t)$ 为按时间 t 变化的幅值，$\mathbf{j}^{(0)}(r)$ 为按位置 r 变化的幅值，ω 为圆频率．在所采用的加工感应制度下，幅值 $j(t)$ 按振动周期的变化是很小的，即

$$\left|\frac{\mathrm{d}j(t)}{\mathrm{d}t}\right|\ll\omega j(t)\;;\qquad\left|\frac{\mathrm{d}^2j(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|\ll\omega^2 j(t)$$

相对于准静态感生电流状态，电场和磁场强度在物体内部（$\mathbf{E},\mathbf{H}$）和物体外部（$\mathbf{E}^{(0)},\mathbf{H}^{(0)}$）可以近似地写成下面两种形式：

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{E}(r,t)=j(t)\mathbf{E}(r)\mathrm{e}^{i\omega t};\qquad \mathbf{H}(r,t)=j(t)\mathbf{H}(r)\mathrm{e}^{i\omega t}\\&\mathbf{E}^{(0)}(r,t)=j(t)\mathbf{E}^{(0)}(r)\mathrm{e}^{i\omega t};\quad \mathbf{H}^{(0)}(r,t)=j(t)\mathbf{H}^{(0)}\mathrm{e}^{i\omega t}\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

其中 $\mathbf{E}(r)$、$\mathbf{E}^{(0)}(r)$、$\mathbf{H}(r)$、$\mathbf{H}^{(0)}(r)$ 满足方程式

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0; && \mathrm{div}\,\mathbf{E}=0\\&\nabla^2\mathbf{E}^{(0)}+k_0^2\mathbf{E}^{(0)}=i\mu_0\omega\,\mathbf{j}^{(0)}; && \mathrm{div}\,\mathbf{E}^{(0)}=0\\&\nabla^2\mathbf{H}+k^2\mathbf{H}=0; && \mathrm{div}\,\mathbf{H}=0;\\&\nabla^2\mathbf{H}^{(0)}+k_0^2\mathbf{H}=-\mathrm{rot}\,\mathbf{j}^{(0)}; && \mathrm{div}\,\mathbf{H}^{(0)}=0\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

这里 $k^2=\mu\omega(\varepsilon\omega-i\sigma)$，$k_0^2=\mu_0\varepsilon_0\omega^2$．$\mu$、$\mu_0$、$\varepsilon$、$\varepsilon_0$ 为物体材料在介质和真空中的磁电系数和介电系数．

感应加载时，热弹性状态的计算系统是在根据电磁波振动周期内焦耳热的平均单位功率

和不考虑质动力对温度状况及导电振动周期特征的影响情况下建立的，导出了与温度场和变形场有关的、按时间周期变化的焦耳热量和质动力热弹性问题的解。如果研究对象电动力学方程的解是已知的，那么焦耳热的单位功率Q和质动力F可以用二项和的形式表达出来，即

$$Q=Q^{(1)}+Q^{(2)};\qquad F=F^{(1)}+F^{(2)} \tag{31}$$

其中$Q^{(1)}$和$F^{(1)}$与时间无关，是周期为$2\pi/\omega$的平均值，而$Q^{(2)}$、$F^{(2)}$为按周期变化的成分。研究热弹性状态下的介质在周期变化的电磁场作用下，即施以切向电场强度（$E=E_0e^{i\omega t}$）的加热问题时，其温度函数$T(r,t)$（r为所研究对象的厚度坐标，t为时间）及应力σ_{rr}、$\sigma_{\theta\theta}$可表达为

$$T=T^{(1)}+T^{(2)};\qquad \sigma_{ii}=\sigma_{ii}^{(1)}+\sigma_{ii}^{(2)}\quad (i=r,\theta) \tag{32}$$

其中$T^{(1)}$和$\sigma_{ii}^{(1)}$是对应于焦耳热成分振动周期的平均值，它们是在不考虑质动力的准静态下确定的；而量值$T^{(2)}$和$\sigma_{ii}^{(2)}$是随时间作周期变化的成分，它是在对介质表面加热时考虑质动力影响下确定的。通常对所有外电磁场的频率来说，$T^{(2)}$、$\sigma_{ii}^{(2)}$与$T^{(1)}$、$\sigma_{ii}^{(1)}$比较，它们都是小到可以忽略不计的程度。

当研究在大温度范围内，对于结构元件进行感应加热时，必须考虑材料的电导率和温度的混合关系，电荷的守恒方程将采用[9]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\varepsilon}=-E\,\mathrm{grad}\,\sigma \tag{33}$$

由此式可知，物体内将有电荷产生。为了确定导电物体中的电场强度、焦耳热量和温度，文献[9]还同时考虑了关系$\sigma=\sigma(T)$的方程组。

4 基础理论研究和实际应用研究简介

近几年来，一些学者致力于磁弹性、热磁弹性理论的实际应用研究；同时在实验领域内，开始对磁弹性、热磁弹性力学效应[10]，以及对耦合场作用下的振型及其稳定性进行测试，提出了一些实际应用的建议和设想。

在理论研究方面，多数学者致力于方程式的建立和解题方法的研究，并广泛利用计算手段进行数值解[11,12]。同时研究深入到了电热粘弹性的磁弹性问题中[13,14]。文献[15,16]给出了非线性磁弹性问题的数值解，并讨论了磁场强度、侧向电流方向和密度对应力应变状态的影响。下面对其研究现状作简单介绍。

首先把磁弹性理论应用于导体中波传播问题的是L.Knoppoff[17]和P.Chadwick[18]，随后一些学者在此基础上分析了平面波在具有有限导电性的无限弹性空间中的传播，得到了弹性、非弹性各向异性物体在强磁场中运动的基本方程，研究了导电弹性体与温度场相关的运动。1970年以前，学者们所完成的研究工作并不详尽，近20年来，研究成果才进入了一个崭新的阶段。

4.1 基本理论的研究

4.1.1 基本方程的建立和解题方法的研究

P. Pratar[19]给出了线性磁弹性本构方程组，并利用离散方法分析得到平面磁弹性波传播的一些具体问题的解。

S. Tomita和Y. shindo[20]得到了Релеи表面波沿着半无限热导电体传播问题的

解，利用方程式（12）的平面波形式的解得到了考虑磁场和温度场影响的状态方程。为了估算表面波的传播速度和相位，利用扰动方法[21]在磁弹性和热磁弹性关联最少的情况下，找到了状态方程的近似解。

Ф. Т. Махорт[8]得出了位于磁场中预受力物体的磁弹性线性方程和运动方程。文献[22]给出了确定在各向同性导体中磁弹性波频率的分析方程，研究了在同向磁场作用下和在随时间作谐变规律变化的法向载荷的作用下，其热磁弹性的平面问题。

Ж. О. Ахниян和А. Г. Багдоев[23]给出了在磁弹性介质中施加集中脉冲后平面问题的基本解。

在文献[24,25]中，得到了薄板薄壳的磁弹性基本方程，也得到了处于定常磁场中导电板壳的稳定性和振动等一些问题的解。

4.1.2 关于振动问题的理论研究

Э. Х. Григорян[26]解决了关于各向同性无边界介质在集中调谐力作用下存在着同向磁场的振动问题，并借助傅里叶变换得到了磁弹性方程的解。

В. Ф. Кондрат[27]研究了在半无限空间 $y>0$ 中有一个感应强度为 $\mathbf{B}_0=\{0,0,\mathbf{B}_0\}$ 的横向磁场，在其表面 $y=0$ 上有一个随时间变化的法向力 $f(x,t)=f_0e^{i\omega t}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$（$\lambda$为载荷的作用周期）作用时的磁弹性问题。对于非铁磁性介质，研究了半空间和真空中的波动方程，且确定了焦耳热磁场在物体表面上的振动周期的平均值。

Г. Е. Багдасарян 和 П. А. Мкртчян[28]得到了描述完整球型壳在磁场中振动的磁弹性二维方程组。在他们的其他著作中给出了球型壳在磁场中的振动问题和动稳定性的解[84]。

关于无限导电薄板位于磁场中且感应矢量垂直于中性层的共振问题，可参见文献[29]，该文给出了精确的理论解并和近似方程的解进行了比较。

Г. Е. Багдасарян[30]在薄壁结构磁弹性假说的基础上得到了确定纵向磁场中导电平板的主参数共振极限频率方程，研究了平板材料导电性能对极限频率的影响，以及外电磁场强度对极限频率的影响，并可求得磁场强度的最大值，排除参数共振的可能性。

С. А. Амбарцумян[31]为了分析弹性薄板在横向磁场中的振动，利用板的弯曲理论并考虑横向剪切变形的精确理论，研究了磁场和变形间的相互作用，即考虑了横向剪切将会产生的新的取决于磁场强度的振动形式。

4.1.3 关于各向异性体的动力方程及磁弹性波传播问题的研究

Y. Ersoy 和 E. Kiral[5]制定了电磁场同各向异性体相互作用的动力理论方案。这些物体的材料具有磁对称、偏振、磁化特性，而且是电热导体和粘弹性物体。在作者的另一篇文章[6]中，阐述了单一类型的磁场强度和方向对磁弹性波传播速度和相位的影响，以及对平面波在具有导电和磁感应各向同性粘弹性物体中传播时衰减的影响。

D. P. Kumara[32]阐述了在具有不同拉梅常量（Lame constants）的空间中及在不同（Steady）密度和磁导率的弹性介质中波的传播问题，对于处于定常外磁场中和不同的状态下的介质得到了它的运动方程。

热电导体中的热磁弹性波的传播过程和振动过程的研究是在研究了考虑质动力的弹性介

质方程组、焦耳热的热传导方程组和缓慢运动介质的电动力学方程组的基础上进行的。

4.1.4 关于热磁弹性的理论研究

A. Nayfeh 和 S. Nemet-Nassera[33] 给出了在有限热传导速度时，磁弹性的更加普遍的方程组，以及平面的电磁热弹性波在无限各向异性介质中的传播方程。

Я. И. Бурак 和 В. Ф. Кондрат[34] 阐述了导电半无限空间 $x>0$ 的热磁弹性振动问题。这半无限空间的边界与真空相接，并置于磁感应矢量为 $\mathbf{B}_0=\{0,0,\mathbf{B}_0\}$ 的磁场中。在 $x=0$ 的平面上，均匀地分布着作用载荷 $F=(F_0\cos\omega t, 0, 0)$ 及在热对流的条件下，作者得到了磁热弹性非线性系统的解，并且研究了外电磁场、力作用载荷的频率及弹性波和电磁波的基波，二次谐波对导电介质的影响。

Я. И. Бурак 和 А. Р. Гачкевич[35] 研究了在无限导电平板中焦耳热量随时间周期变化的特征对热应力的影响，指出了焦耳热量是沿板厚分布的。

Я. И. Бурак 和 Л. Б. Черняская[36] 得到了高频电流对薄壳的加热问题的解，阐述了无限圆柱体在感应加热时所产生的温度场和应力场是对称分布的，并且指出了感应电流的大小。感应深度和焦耳热的分布是随壳体厚度、从外到内近似按指数规律衰减的[37]。

Б. И. Чорный[38] 阐明了当对半无限空间利用线性感应电流加热时确定焦耳热源功率的近似方法。

为了研究加入外电磁场时在导体中产生的交换过程，文献[39]给出了在非感应层中，当磁冲击基础层时的温度应力状态和电场分布。

4.1.5 经典磁弹性问题的理论研究

S. K. Chakranarty 和 P. R. Sengupta[40,41] 解决了带有椭圆形孔、三角形孔和方形孔的无限平板的磁弹性静态问题。作者对原始方程采用线性化的方法。设 $H_x=h_0+h_x$、$H_y=h_y$ 忽略二次项数值和函数 h_x、h_y 的导数值，在无限远处拉伸载荷的作用下及在与拉伸方向相同的磁场作用下，通过复变解析函数和保角变换的方法，对上述各种形状孔的理想导电平板建立了磁静态弹性平面问题的解。

A. Basu[42] 讨论了在极坐标下得到的磁弹性动力方程的基本解，研究了其中对于理想导电圆形薄板在有集中力作用的情况下，且位于横向磁场中的平面变形问题。之后，作者又利用类似的办法建立了平板在各种边界条件下其平面应力状态的磁弹性问题解。

Я. И. Лопушанский[43] 研究了在随时间周期变化的电磁场作用下，以及在定常的电磁场作用下的各向同性导电物体的变形问题。

С. А. Амбарцумен 和 М. В. Белубекян[44] 在磁弹性薄板近似方程的基础上研究了与纵坐标无关的自由弯曲振动，给出了考虑磁弹性相互作用下的弯曲振动方程。

顺着板层有电流流动的弹性弯曲振动问题是 М. В. Белубекян[45] 解决的。其中利用了磁弹性假设。同时证明了在此情况下未知的电磁场分量在板的表面上是可以通过电流密度表达的。

文献[46]研究了多层磁感应蜂窝结构在高频磁场作用下的弯曲强迫振动问题。作者研究了由外部磁感应层和非线性磁感应介质材料的中间层构成的三层平行平板位于横向平面磁场中的强迫振动问题。这个场在每一层板中产生不同的感应磁场，计算了各层板的磁弹性、导出了所在平面内的各种不同长度板的弯曲表达式。

4.1.6 稳定性理论的研究

Y. H. Pao和C. S. Geh[47] 利用自己所提出来的线性化理论方案解决了铁磁薄板在横向磁场中的失稳问题。

在[24,25]等一系列文章中作者给出了薄板薄壳的磁弹性基本方程，以及处于定常磁场中的导电板壳的稳定性和振动等一些问题的解。这些解是基于板壳的弹性位移随厚度变化及磁场为变化特征的磁弹性假设，及利用磁弹性三维方程的渐近积分方法得到的。这些文章除了对定常磁场中的薄壁物体建立假设外，还导出了薄壁载流板和壳体的磁弹性振动方程，解决了板壳在存有运动气体的磁场中的动力稳定性问题。

П. А. Мкртчян[48] 研究了板和壳在低粘度气体和超音速流动中且有纵向和横向磁场作用下的稳定性问题。

Г. Е. Багдасарян[49] 研究了处于理想导电气体中的各种非导电弹性薄板，在纵向磁场作用下的稳定性问题。

K. Miya, K.Hara 和 K. Somcya[50] 给出了磁化平板失稳的理论解和实验解，并解决了矩形板在垂直于其所在平面的磁场作用下筒形弯曲形式的失稳问题。

J. Lani[51] 研究了磁感应环位于直径方向磁场中失稳问题的解，其中利用了环的中线不伸长的假设，并得到了磁场极限值的简单形式。

4.1.7 断裂力学的理论研究

Y. shindo[52] 研究了非剪切驻波在裂纹长度的末端及无限弹性介质中的绕射，其介质具有无限导电性，在磁场强度矢量位于垂直或者平行于裂纹平面的情况下，采用拉普拉斯变换方法，得到对双参数积分方程磁弹性问题的数值解。该结果可以用来研究裂纹尖端的应力状态与磁场强度及波的传播方向之间的关系。在他的另一篇文章[53]中，研究了具有调和性质的水平偏振切向绕射波在有限长直线裂纹并存有静电场和感应强度矢量 H_0 情况下的磁弹性问题。利用傅里叶变换，作者得到了裂纹尖端部分的动应力与磁场强度以及电磁波与裂纹所在平面间夹角 φ 之间的关系。

Y. Shindo[54] 还研究了在无边界的理想导电介质中，其纵向共振波在圆片状裂纹中的轴对称绕射问题。对在轴向磁场作用下的弹性各向异性介质，当垂直于裂纹所在平面的磁感应强度矢量为 H_0 时，得到了它的积分线性磁弹性方程的解。

Y. Shindo[55] 利用软磁感应材料的线性理论研究了一系列关于裂纹在弹性磁感应多蜂窝结构材料中的扩展问题，得到了在同向磁场作用下其有限长度的等直线裂纹静力平衡问题解的封闭形式及应力强度因子表达式。此时，存在着磁感应强度 B_0 的极限值。在文献[56]中，他还研究了带有圆片状裂纹的软磁化弹性物体在同向磁场作用下的轴对称变形问题，找到了关于圆片状裂纹在磁场中的解，得到了磁弹性和马克斯威尔应力在裂纹边界处分布的特殊性。对应力强度因子的分析表明：当强度因子达到无限大的时候，在刚性状态下且垂直于裂纹方向的磁感应强度方向矢量 B_0 的数值处于极限值的情况下，裂纹将失稳。

文献[57]的作者应用电磁场对裂纹前缘破坏过程的理论研究，确定了在无限大的平板中，在电磁场和弹性场存在的情况下，导电介质流有直流电流瞬间出现半无限直角裂纹的问题，指出电磁场对变形过程的影响和对与焦耳热源相关的热传导的影响。从马克斯威尔方程的解中得到了磁场强度和电流密度的矢量分量。在电流密度分布已知的情况下，确定了焦耳

热的散发、板中非定常热场及非导电裂纹的形成、特别是确定了对于准静态裂纹扩展的估算，并证明了裂纹的开裂是在压应力状态下发生的．

文献[58]进一步证明了在没有外加机械载荷的初始瞬间，电磁场中材料内的裂纹将不扩展．这时，在板中通过放电，在裂纹前缘产生热应力，其材料将被加热到熔化程度，从而可以使裂纹止裂．

4.1.8 偏振效应与感应磁场等方面的理论研究

В．В．Лохин[59] 阐明了变形介质在考虑电和磁的偏振效应和形状效应的情况下，能得到偏振介质中的应力张量和质动力的表达式．

К．Б．Власов[60] 给出了具有单晶六角对称的磁化单晶磁偏振热动力状态方程．

Я．И．Бурак，В．Ф．Кондрат 和 Т．С．Начирный[61] 取得了热磁弹性一维方程系统线性化的解，并且研究了在磁场周围介质中产生的感应量值与频率 ω 的关系．

确定在导电介质内机械振动时的电磁场和声场是由 Я．И．Бурак，Б．И．Колодия 和 В．Ф．Кондрат 在文献[62]中给出的．作者们阐述了半无限物体（$y>0$）置于磁场 $\mathbf{B}_0=\{0,0,\mathbf{B}_0\}$ 之中，并在法向载荷 $F_0\delta(x)e^{-i\omega t}$（$\delta(x)$ 为狄拉克函数）的作用下，采用傅里叶变换的方法来解线性磁弹性方程的问题，同时确定了弹性位移矢量在无限半空间内的分量，且阐述了磁弹性空间波的本质．

4.2 实际应用研究

许多学者在研究磁弹性，热磁弹性理论的同时，对其实际应用进行了探讨．总的来说这方面的研究才刚刚起步，成果不甚显著．不过，学者们已经认识到，该理论研究的应用前景是十分美好的．

对置于磁场的导电物体波的传播过程和振动过程的研究表明，研究成果与实际应用联系紧密而且有可能飞速发展．可在无损探伤、结构元件的磁声加工、金属电热加工、磁电效应的利用以及其它科技领域中得到广泛应用．

4.2.1 磁电效应的应用研究

文献[63]的研究表明，对于具有明显小的磁滞损失和较低剩磁效应的软磁性材料，如果继续渗入各种铁合金，可以提高磁化强度，使其能有效地应用在电机转子、电动机、电感器、变压器等电气元件之中，特别是在研制压电陶瓷制品时，正确渗入铁素体的含量是控制压磁材料质量的关键．文献[64]指出，在研究磁场同压磁材料相互作用时，导体电流对弹性变形体的影响是可以忽略的．

4.2.2 磁能应用的研究

从实用观点出发，人们更感兴趣的是应力变形波能量中磁能量的转换过程．例如，磁冲压金属，若在具有可调 Q 值激光的帮助下，发射的电磁场脉冲功率传导到导体中便产生了应力波的热弹性．导体对能量的吸收则降低了发射能，只有微小厚度的一层表面是磁能转化成的热能源．为此，学者们建立了发射电磁场作用下的热弹性应力问题的简化系统，解决了关于在导体中热弹性应力波的产生、电磁脉冲均匀分布地作用在表面吸收层中以及表面热源和热应力在层内将按深度成指数衰减分布等一系列问题，同时给出了热波传播、预应力估算的表达式[65]．

学者们模拟在磁场中的冲压过程时，解决了半无限空间中导体热弹性的一维问题．

当位于磁场中的金属内部通过超声波时，会产生涡流并同时释放出焦耳热，阻碍超声波的传播[66]．因而在磁声加载的实际应用中，便可确定热源密度的条件和外电磁场的特征．文献[62]已详细研究了与此类似的问题，得到了半空间中机械振动幅值和超声波波长比趋肤层厚度小的情况下，热磁弹性一维线性方程组的解．在此基础上，还确定了热源功率，并且研究了它们的分布特征．

磁声加工研究和导电层的变形随外电磁场变化的研究证明了非同类物体温度的分布必须考虑热电现象，且热析出与热电效应有关，它和与初始温度相应的焦耳热量释放梯度有关[67]．

4.2.3 金属构件电热加工的研究

在研究电导体中机械、热和电磁过程的同时，研究了用高频感应电流加热和加工零件时的技术问题．

学者们研究了焦耳热量和质动力随时间变化的周期特征及对电导体中的应力和温度分布的影响[68]．解决了在介质层表面上，在切向方向上有磁场强度时弹性层的振动问题．对于表面加热的情况，当感应电流渗透的深度与层厚度相比较小时，所得到的结果证明，当用所有频率（共振频率区除外）的电磁场对导电层感应加热时，在其问题的近似解中可以用焦耳热和时间的平均值且不考虑质动力的影响来确定温度场和应力强度．所观察到的温度场和应力场的急骤回升是受随时间周期性变化的焦耳热和质动力制约的．研究结果表明，电磁场的共振频率是弹性层特殊振动频率的一半．

热感应加工过程所产生的温度场和应力场，取决于加热系统的选择、分布配给、外电场源的频率和振幅以及同介质进行热交换的条件．为了使加热过程的温度不散失，必须制定感应加热规范以便定量地给出一些参数[69]．

Я．И．Бурак和А．Р．Гачкевич[69]给出了在导电薄板上确定给定切向电磁场强度的最佳感应加热工艺规范．

Б．И．Колодий和Б．И．Чорный[70]指出了在很宽的温度范围内制定结构元件感应加热规范时，必须考虑到材料导电率和温度之间的关系．

Я．И．Бурак，А．Р．Гачкевич和Б．И．Колодий[71]在继续研究感应加载时双金属层中的温度场、弹性热应力的计算方法之后，给出了焦耳热、温度、应力沿弹性双金属厚度分布的情况．

热磁弹性状态的近似计算系统，是在感应加载时只考虑焦耳热单种功率的电磁波振动周期，而不考虑质动力等因素对温度状态和导电体振动周期特征影响的基础上建立的．特别令人感兴趣的是考虑随时间周期变化的焦耳热量和质动力的热弹性问题的解，恰恰是与温度和变形场相关的．

4.2.4 薄壁结构相互作用的研究

现代技术的各个领域,利用有磁场作用的薄板和薄壳作为结构元件已是屡见不鲜[72-75]，如热核反应装置的保护壳．当存在有绕线激起的外电磁场时，反应堆壳体内会产生很大的应力，甚至导致结构丧失工作能力．在建立磁蓄发电机、电磁泵及其测量装置时，则会遇到电磁场与板和壳体类型结构元件相互作用的问题．近期出现了许多有关电磁场中薄壁导电薄壳的磁弹性问题，其中一些理论研究成果是由亚美尼亚[3]和乌克兰的力学家们及我国学者完

成的[78,79,82]。

4.2.5 断裂力学问题的应用研究

对于裂纹体的磁弹性问题的解，必须研究电磁场作用下的材料破坏问题。目前，线性断裂力学研究的是机械载荷和热温度载荷共同作用下，弹性体内裂纹的萌生和发展。磁场对弹性体的作用导致了体力和体力矩的产生，而这些因素在分析裂纹尖端处的应力状态时是必须考虑的。

В. М. Финкель, Ю. И. Галовин 和 А. А. Слетков[80,81]用实验方法研究了薄板内有电流脉冲时裂纹扩展的动力过程。他们观察了裂纹尖端的集中效应。在裂纹前缘处一个很小的范围内，很快地熔化了板的材料，导致了裂纹前缘尖端区金属的熔化，并形成了微小焊口，结果使其裂纹前缘的曲率半径增加了，减少了机械应力的集中。利用这种办法，当热量集中在裂纹前缘时，可以阻止干线裂纹源的形成，从而防止裂纹的扩展。

5 磁弹性、热磁弹性的应用前景

当前的研究结果表明，磁弹性、热磁弹性理论具有十分重要的应用价值和广阔的前景。下面仅就应用前景浅述一下笔者的看法，肯定远远不能概括全部。

5.1 磁电效应与热磁电效应的利用

在一些具有特殊晶格特征的晶体中，压电效应有明显的表现。这种效应与温度场结合起来便产生热压效应。该效应可以应用在传感器的制作中，象压力加速度变换器、磁弹性压力计的制作等。

目前，压磁效应原件作为声发射、接收、选择、继电结构元件被广泛应用在滤波、变压、延时线路中及磁弹性压力计和加速度变换器中。于是，在磁感应合金和磁感应材料中，在偏振定常磁场或是有剩磁、压电效应的偏振陶瓷材料中，均要考虑线性的压磁效应。

磁电效应可用在磁声加载、雷放电激波、磁声加工、感应加载的工艺过程中。

双金属热电效应的应用范围更广泛，特别是双金属层在感应加载状态下，焦耳热、温度、应力均可按金属层的厚度给出，为此，可能扩大它的应用范围，特别是将它应用于控制系统中。

5.2 涡电流与焦耳-楞次热的应用

高频电流对金属结构的感应热加工工艺已应用于工业加工中。如果应用磁弹性和热磁弹性理论对此工艺进行理论分析和计算，将会设计出更加理想的加工设备，制定出合理的工艺制度。

用高频电流对壳体进行感应加热时，感应电流和相应热源的分布特征实质上取决于壳体的几何尺寸、材料的特征、材料的导电率、外电磁场源的分布和频率等等。为了使热加工过程的温度不散失，必须适当考虑到给定补充值和根据感应加热规范给定一些参数。建立感应规范最合适的条件是根据弹性变形最小势能原理确定的。

5.3 在波动学中的应用

由于超声和电声学技术的发展，由偏振压磁材料制成的、且处于超声频率波段状态下工作的结构元件的设计，以及变换器磁机械作用力的理论计算，非常令人感兴趣。利用磁弹性和热磁弹性理论设计制造声发射、声接收元件可以应用到无损探伤、超声技术、电声技术等

领域中.

5.4 电脉冲方面的应用

实验证明，将脉冲电流通入带有裂纹的导体，利用电磁和热磁效应制止分布在导电材料中的裂纹是可能的. 借助于超高速摄影机的帮助，曾记录过这一实验过程的如下几个阶段:

第一阶段，可观察到物体材料在裂纹前缘小范围内强化加热，然后进入第二阶段，即裂纹前缘接着曲率半径增大，并局部迸发爆炸形成焊口. 当脉冲电流有较大的延长作用时，裂纹尖端的曲率半径在几秒钟内将会增大一至二个数量级，大大减小了机械应力的集中. 这就意味着在制止裂纹扩展时，允许利用所给定的效应抑制形成裂纹主干线的势能源.

利用磁弹性和热磁弹性在不考虑有质动力、变形场、温度场之间耦联的条件下，对此过程进行研究可以解得裂纹前缘的电场、温度场的分布状态.

对于裂缝体材料在电磁场作用下的破坏问题的研究，可利用线性断裂力学的分析方法，即对弹性体机械载荷、温度载荷作用下裂纹的萌生发展过程，体力和体力矩的产生等因素进行分析. 这些因素是在分析裂纹尖端的应力状态时必须考虑的，还要考虑裂纹体材料中共振波、剪切波的作用效应、动应力的作用效应等. 可见对于含有裂纹的导体在磁场作用下，通入一定的脉冲电流，便可达到制止裂纹扩展或在裂纹前缘形成焊口的目的. 利用上述理论可建立如下机制：应用磁场和脉冲电流技术制止机翼与机身连接部位出现裂纹扩展，从而延长飞机寿命. 这种机理也适合其他相应含有裂纹体结构元件的裂纹止裂.

5.5 核反应技术中的应用

热核反应装置的保护壳是用薄板薄壳制成的结构元件，有静电屏蔽功能. 对在强电磁场环境下的工作人员能起到防护作用. 当绕线激起外电磁场时，保护壳将产生很大的弹性应力，甚至导致结构丧失工作能力，因此，磁弹性、热磁弹性理论可以应用到核反应堆防护元件的设计之中. 改变磁场强度或改变侧向电流的大小或方向，均会改变壳体的应力应变状态，从而便可找到最佳设计方案.

5.6 航空航天方面的应用

导电的薄板和薄壳在流动的气流中且存在磁场的条件下的理论研究表明：可以通过理论计算来解决板与壳体在低粘度气体和超音速流动中纵向磁场或横向磁场作用下的稳定性问题，确定流动的极限速度公式以及磁场强度对极限速度值的影响，从而这一理论可应用到飞行器的结构设计之中.

用热磁弹性效应的理论计算原理可对飞机除冰系统进行设计计算，给飞机建立一套高效率的除冰系统. 根据磁弹性、热磁弹性的计算原理，对飞机的防雷和其他防护系统进行设计计算及效率分析计算，进而可以选择最理想的机体外型和结构参数.

5.7 在磁悬浮技术方面的应用

目前，磁悬浮技术已经广泛应用于交通运输、机械、冶金等领域. 利用磁悬浮原理可以建立非接触的支承系统，如磁座系统、磁热系统等. 该系统的建立能改变机械结构和机械连接系统.

5.8 在优化结构设计计算方面的应用

在磁场作用下，杆件的弹性变形是在计算供电线路结构和线路运输发动机元件时产生的. 所以在电机结构、电感器、继电器、变压器等电器元件的结构设计中，若考虑磁弹性效

应，便可使设计规范发生变化．在这方面，我国学者已经进行了初步的尝试[83]．

目前，处于非定常机械场和电磁场作用下的壳体非线性热磁弹性问题的理论研究已经提到日程上来了．位于电磁场的电导体中产生了感生电流，那么该电流将伴随着产生焦耳热量的电流流动，由此产生的温度场的温度应力可达到相当大的值甚至超过允许限，因此必须制定新的有效计算模型和计算方法来确定和研究电磁场、焦耳热量、热源及在导体中与外部电磁场有关的热应力、频率、幅值随时间变化的情况．研究和确定物体连同外部介质的热容量及材料的热物理特性、热机械特性，研究关于侧向电流的作用方向和大小，可以改善壳体在非定常电磁场和机械场作用下的应力状态．不难设想，磁弹性、热磁弹性理论的发展将给结构设计计算带来新的优化设计方法．

参 考 文 献

1 Новацкий В. Успех. Мех., (ПНР), **1—2** (1978): 17—24

2 Кудрявцев Б А, Партон В З. Итоги наукии техники. Мех. Дефор. Твердого тела, **14** (1981): 4—6

3 Амбарцумян С А, Багдасарян Г Е, Белубекян М В. Магнитоупругость Тонких Оболочек и пластин., Наука, Москва (1977): 10—12

4 Мольченко Л В, Индиаминов Р Ш. Численные методы Прикладной Механики. Соборник Научных Статей Самарканд (1992): 6—11

5 Ersoy Y, Kiral E. *Int. J. Eng. Sci.*, **16**, 7 (1978) : 483—492

6 Ersoy Y. *Int. J. Eng. Sci.*, **17**, 2 (1979) : 193—214

7 Pao Y H, Hutter K. *Proc. IEEE.*, **63**, 7 (1975): 1011—1021

8 Махорт Ф Г. Прикл. Мех., **13**, 7 (1977): 51—58

9 Гачкевич А Р, Мисьонг О Р. В Сб: Физ-Мех. Поля в Деформир. Средах. Наукова Думка, Киев(1978): 39—42

10 Баландин В В, Брагов А М, Дресвянников В И. Прикладные Проблемы Прочности и Пластичности, **22** (1982) : 94—102

11 Дресвянников В И. Прикладные Проблемы Прочностии Пластичности, **23** (1983) : 66—67

12 Дресвянников В И. Прикладные Проблемы Прочностии Пластичности, **20** (1982) : 10—23

13 Карнаухов В Г, Киричок И Ф. Электротермовязкоупругость. Наукова Думка, Киев (1988): 318

14 Короткина М Р. Электромогнитоупругостуь. Изд-во. Моск. Ун-та (1988) : 303

15 Мольченко Л В. Магнитоупругость Нелиннейных Токонесущих Оболочек. Виша щкола, Киев (1989)

16 Григоренко Я М, Лоос И И, Мольченко Л В. Вичисл. и Прикл. Математика, **57**, (1986) : 62—67

17 Knopoff L. The interaction between elastic wave motions and a magnetic field in electrical conductors. *J. Geophys.*, **60** (1955) : 441—456

18 Chadwick P. Elastic wave propegation in magnetic field. In: Congr. Appl. Mech. Ninth Brussels (1956): 143—153

19 Pratar P. Plane waves in thermoelasticity and magnetothermoelasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, **10**, 5 (1972) : 467—477

20 Tomita S, Shindo Y. Thermoelastic Rayleigh waves with thermal relaxation in the magnetic field normal to the surface. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. techn.*, **27**, 1 (1979) : 9—15

21 Tomita S, Shindo Y. Rayleigh waves in magnetothemoelastic solids with thermal relaxations. *Int. J. Eng. Sci.*, **17**, 2 (1979) : 227—232

22 Махрорт Ф Г. Прикл. Мех., **14**, 7 (1978) : 113—116

23 Ахинян Ж О, Багдоев А Г. Изв. А Н СССР, Мех. Тверд. тела, 6 (1977) : 91—100

24 Амбарцумян С А, Багдасарян Г Е. Прикл. Мат. и Мех., **37**, 1 (1973) : 114—130

25 Багдасарян Г Е, Белубекян М В. Докл. АН Арм ССР, **57**, 5 (1973) : 276—281

26 Григорян Э Х. Изв. АН Арм ССР, Механика, **31**, 5 (1978) : 48—62

27 Кондрат В Ф. Мат. Методы и Физ-Мех. Поли. Респ. Межвед. Сб., 3 (1976) : 42—47

28 Багдасарян Г Е, Мкртчян П А. Изв. АН Арм ССР, Механика, **25**, 5 (1976) : 28—41
29 Белубекян М В, Варданян Л В. Изв. АН Арм ССР, Механика, **30** (1977) : 44—52
30 Багдасарян Г Е. Изв. АН Арм ССР, Механика, **28**, 5 (1975) : 48—56
31 Амбарцумеян С А. Изв. АН СССР, Мех Тверд. Тела, **32**, 3 (1979) : 164—173
32 Kumar D P. *Int. J. Eng. Sci.*, **17**, 2 (1979) : 145—150
33 Nayfeh A, Nemat-Nasser S. Pap. ASME (1971)
34 Бурак Я И, Кондрат В Ф. В Сб: Волны в Сплошн. Средах, Киев (1978) : 85—92
35 Бурак Я И, Гачкевич А Р. Динамика и Прочность машин. Респ. Межвед. Сб, **21** (1975) : 102
36 Бурак Я И, Чернявская Л В. Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела, 2 (1973) : 101—107
37 Бурак Я И, Чернявская Л В. Мат. и Физ-Мех Поля. Респ. Межвед. Сб, 1 (1975) : 79—84
38 Чорный Б И, Мат. Методы и Физ-Мех Поля. Респ. Межвед. Сб, 3 (1976) : 104—107
39 Гачкевич А Р, Мусий Р С. В Сб: Физ-Мех. Поля в Деформир. Средах., Киев (1978) : 28—33
40 Chakravarty S K, Segnupta P R. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. techn.*, **24**, 5 (1976): 397—400
41 Chakravarty S K, Segnupta P R. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. techn.*, **24**, 7—8 (1976) : 557—561
42 Basu A. *Acta phys. Acad. Sci. Hung.*, **43**, 1 (1977) : 81—91
43 Лопушанский Я И, В Сб: Физ-Мех. Поля в Деформир. Средах., Киев (1978) : 33—39
44 Амбарцумян С А, Белубекян М В.В Сб: Тр.Х. Всес. Конф по Теории Оболочек и Пластинки. Тбилиси, Кутанси (1975) : 3—10
45 Белубекян М В. Докл. АН Арм ССР, **61**, 2 (1975) : 75—81
46 Филиппов Б Н, Болтачев В Д, Таркуанов В В. Ж. Техн. Физ., **47**, 1 (1977) : 209—219
47 Pao Y H, Geh C S. *Int. J. Eng. Sci.*, **11**, 4 (1973) : 415—436
48 Мкртчян П А. Изв. АН Арм ССР, Механика, **28**, 4 (1975) : 12—26
49 Багдасарян Г И. Изв. АН Арм ССР, Механика, **28**: 4 (1975): 27—39
50 Miya K, Hara K, Someya K. *Trans ASME. J. Appl. Mech.*, **45**, 2 (1978) : 355—360
51 Lani J. *Bull. ASME*, **20**, 143 (1977) : 528—533
52 Shindo Y. *Lett. Appl. Eng. Sci.*, 3 (1975) : 313—329
53 Shindo Y. *Math and Mech.*, **56**, 1 (1976) : 33—41
54 Shindo Y. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. techn.*, **26**, 4 (1978) : 325—330
55 Shindo Y. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **44**, 1 (1977) : 47—50
56 Shindo Y. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **45**, 2 (1978) : 291—296
57 Партон В З, Кудрявцев Б А, Рубинский Б Д. Докл. АН СССР, **250**, 5 (1980) : 1096—1100
58 Кудрявцев Б А, Партон В З. Рубинский Б Д. Прикл. Мат и Мех., **44**, 5 (1980) : 916—922
59 Лохин В В. Науч. Тр. Ин-т. Мех. Моск. ун-та, **31** (1974) : 149—166
60 Власов К Б. Ж. Эксп. и Техн. Физ., **38**, 3 (1960) : 889—894
61 Бурак Я И, Кондрат В Ф, Начирный Т С. Респ. Межвед. Сб., **52**, Киев (1977) : 41—44
62 Бурак Я И, Колодий Б И, Кондрат В Ф. Респ. Межвед. Сб., **42**, Киев (1974) : 38—44
63 Новацкий В. Электромагнитные Эффекты Твердых Телах. Мир. Москва (1986) : 159
64 Гринченко В Т, Улитко А Ф, Шульга Н А. Электроупругость. Наукова Думка., Киев (1989): 272
65 Гусев А В, Холин Н Н, Прикл. Пробл. Прочности и Пластичности, 2 (1975) : 62—69
66 Гузь А Н, Махорт Ф Г. Акустоэлектромагнитоупругость., Наукова Думка, Киев (1989) : 288
67 Галапац Б П, Прикл. Термомех., Киев (1979) : 154—159
68 Бурак Я И, Гачкевич А Р. Прикл. Мех., **10**, 7 (1974) : 42—48
69 Бурак Я И, Гачкевич А Р. Мат. Методы и Физ-Мех. Поля. Респ. Межвед. Сб., 2 (1975): 93—98
70 Колодий Б И, Чорный Б И. Мат. Методы и Физ-Мех. Поля. Респ. Межвед. Сб., 4 (1976): 16—20
71 Бурак Я И, Гачкевич А Р, Колодий Б И. Прикл. Мех., **9**, 9 (1973): 87—93
72 Индиаминов Р Ш. В Сб: Институт Механики АН УССР, Киев (1991) : 263—268
73 Мольченко Л В, Индиаминов Р Ш. Вторая Всесоюзная Школа-Семинар Молодых Учёных Специалистов "Современное Состояние Теории Разработки Программного Обеспечения СУ с ЭВМ" в Самарканде, Москва (1991) : 41—43
74 Индиаминов Р Ш. Учёт влияния тангенциальной составляющей силы Лоренца на напряженное состояние токонесущей конической оболочки, Киев, Ун-т., Киев (1992)

75 Индиаминов Р Ш. Тр. 17. Научн. Конф. Мол. Учёных Ин-та Механики АН УССР, Киев (1992) : 62—67
76 Мольченко Л В. Прикл. Механика, **23**, 8 (1987) : 120—122
77 Мольченко Л В. Докл. АН УССР. Сер. А, 4 (1987) : 46—49
78 Мольченко Л В. Математические Основы Нелинейной Тагнитоупругости Теории Оболочек, Киев (1988) : 10—20
79 Улітко А Т. Мольченко Л В. Ковальчук В Ф. Магнітопружність при Динамічному навантаженні, Либідь, Київ (1994)
80 Финкель В В, Головник Ю И, Слетков А А. Докл. АН СССР, **227**, 4 (1976) : 848—857
81 Финкель В В, Головник Ю И, Слетков А А. Докл. АН СССР, **237**, 2 (1977) : 325—327
82 Бай Сянчжун, Мольченко Л В, Гандзюк С А. Докл. А Н Украины, 5 (1994) : 49—53
83 谢慧才，方葛丰，王得满. 平面圆形线圈的磁弹性屈曲，力学学报，**23**，6 (1991) : 706—711
84 Багдасарян Г Е, Мкртчян П А. Изв. АН Арм ССР, Механика, **28**, 1 (1975) : 3—19

MAGNETOELASTICITY, THERMAL-MAGNETOELASTICITY AND THEIR APPLICATIONS

Bai Xiangzhong
Northeast Heavy Machinery Institute, Qiqihar 161042

Abstract This paper presents the research scopes, developing history, basic equations, theoretical studies and the applications of magnetoelasticity and thermal-magnetoelasticity.

Keywords *magnetoelasticity; thermal-magnetoelasticity; coupling field*