第26卷 第2期　　力 学 进 展　　Vol. 26 No. 2
1996年5月25日　　ADVANCES IN MECHANICS　　May 25, 1996

张量函数的表示理论*

——本构方程统一不变性研究（续上期）

郑泉水 (Q-S Zheng)
清华大学工程力学系，北京 100084

4 矢量和二阶张量的二维所有种类各向异性张量函数

如前所述，理论和应用力学的研究者对平面问题一直怀有浓厚的兴趣。三维空间各向异性物理行为通常是极其复杂的，比较而言，相应的平面问题则简单得多。二维各向异性张量函数表示构成了建立平面问题物理行为模型的一个理性基础。

在表6中，我们列出了二维空间所有种类材料对称性及其结构张量，它们都具有简单形式 $\mathbf{P}_n$ 或 $\mathbf{P}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$。利用 $\mathbf{P}_n$ 适度的简单特性，Zheng[134] 得以很快地建立起对应全部种类各向异性的有关 $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{W}_p$, $\mathbf{v}_m$ 的标量、矢量和二阶对称、反对称张量值函数完备和不可约表示，并独自证明了这些无限多个表示的不可约性。表10和11中列出了相应结果，其中对任意矢量 $\mathbf{v}$ 和二阶张量 $\mathbf{A}$ 采用缩记

$$\mathbf{M}=\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}-\mathbf{j}\otimes\mathbf{j},\qquad \mathbf{N}=\mathbf{i}\otimes\mathbf{j}+\mathbf{j}\otimes\mathbf{i} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{p}_n^{\mathbf{v}}=(P^{(n)}_{i\,j\cdots k}v_j\cdots v_k)\mathbf{e}_i \tag{4.2}$$

$$\mathbf{P}_n^{\mathbf{v}}=(P^{(n)}_{i\,j\,k\cdots l}v_k\cdots v_l)\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{4.3}$$

$$\mathbf{p}_n^{\mathbf{A}}=(P^{(n)}_{i\,j\,k\cdots l\,m}A_{jk}\cdots A_{lm})\mathbf{e}_i \qquad (\text{当 } n=\text{奇数}>1) \tag{4.4}$$

和

$$\mathbf{P}_n^{\mathbf{A}}=(P^{(n)}_{i\,j\,k\,l\cdots r\,s}A_{kl}\cdots A_{rs})\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \qquad (\text{当 } n=\text{偶数}>2) \tag{4.5}$$

进而，令 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ 为 (3.13) 所定义的正交标架。通过引入

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2,\qquad \mathbf{E}_2=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 \tag{4.6}$$

我们可以写出分量形式

$$\mathbf{v}=v(\cos\varphi\,\mathbf{e}_1+\sin\varphi\,\mathbf{e}_2),\qquad v\geqslant 0 \tag{4.7}$$

$$2\mathbf{A}=(\mathrm{tr}\,\mathbf{A})\mathbf{I}+A(\cos\Phi\,\mathbf{E}_1+\sin\Phi\,\mathbf{E}_2),\qquad A\geqslant 0 \tag{4.8}$$

* 对 Applied Mechanic Reviews 的主编 Arther W Leissa 教授书面许可本译稿的正式出版谨致谢意.

表 10 二维空间关于 A_i, W_p, v_m 在所有种类对称性下的不可约函数基中的不变量

群	不变量
$\mathscr{C}_1$	trA, trMA, trNA, trεW, v·i, v·j
$\mathscr{C}_2$	trA, trMA, trNA, trεW, v·Mv, v·Nv, v·u, v·εu
$\mathscr{C}_{1v}$	trA, trA^2, trMA, trAB, trW^2, trMAW, trWV, v·v, v·i, v·Ai, v·Wi, v·u
$\mathscr{C}_{2v}$	trA, trA^2, trMA, trAB, trW^2, trMAW, trWV, v·v, v·Mv, v·Av, v·MWv, v·u, v·Mu, v·Au, v·Wu
$\mathscr{C}_n (n=3,5,7,\ldots)$	trA, trP^A_{2n}A, trP^A_{2n}Aε, trAB, trABε, trεW, v·p^v_n, v·εp^v_n, v·Av, v·Aεv, v·u, v·εu
$\mathscr{C}_{nv} (n=3,5,7,\ldots)$	trA, trA^2, trP^A_{2n}A, trAB, trP^A_{2n}B, trW^2, trP^A_{2n}AW, trABW, trWV, v·v, v·p^v_n, v·Av, trP^v_nA, v·Wp^v_n, v·AWv, v·u, u·p^v_n, v·Wu
$\mathscr{C}_n (n=4,6,8,\ldots)$	trA, trP^A_nA, trP^A_nAε, trAB, trABε, trεW, v·p^v_n, v·εp^v_n, v·Av, v·εAv, v·u, v·εu
$\mathscr{C}_{nv} (n=4,6,8,\ldots)$	trA, trA^2, trP^A_nA, trAB, trP^A_nB, trW^2, trP^A_nAW, trWV, trABW, v·v, v·p^v_n, v·Av, trP^v_nA, v·Wp^v_n, v·AWv, v·u, u·p^v_n, v·Au, v·Wu
$\mathscr{C}_\infty$	trA, trA^2, trAB, trABε, trεW, v·v, v·Av, v·εAv, v·u, v·εu
$\mathscr{C}_{\infty v}$	trA, trA^2, trAB, trW^2, trABW, trWV, v·v, v·Av, v·AWv, v·u, v·Au, v·Wu

表 11 二维空间关于 A_i, W_p, v_m 在所有种类对称性下的完备和不可约张量值函数表示中的形式不变量

群	形式不变量	群	形式不变量
	二阶对称张量值		
$\mathscr{C}_1$	I, M, N	$\mathscr{C}_{1v}$	I, M, A, MW-WM, $\langle i\otimes v\rangle_s$
$\mathscr{C}_2$	I, M, N	$\mathscr{C}_{2v}$	I, M, A, MW-WM, v⊗v, $\langle v\otimes u\rangle_s$
$\mathscr{C}_n (n=3,5,7,\ldots)$	I, A, Aε−εA, v⊗v, $\langle v\otimes \varepsilon v\rangle_s$	$\mathscr{C}_{nv} (n=3,5,7,\ldots)$	I, A, P^A_{2n}, AW-WA, v⊗v, P^v_n, $\langle v\otimes Wv\rangle_s$
$\mathscr{C}_n (n=4,6,8,\ldots)$	I, A, Aε−εA, v⊗v, $\langle v\otimes \varepsilon v\rangle_s$	$\mathscr{C}_{nv} (n=4,6,8,\ldots)$	I, A, P^A_n, AW−WA, v⊗v, P^v_n, $\langle v\otimes Wv\rangle_s$, $\langle v\otimes u\rangle_s$
$\mathscr{C}_\infty$	I, A, Aε−εA, v⊗v, $\langle v\otimes \varepsilon v\rangle_s$	$\mathscr{C}_{\infty v}$	I, A, v⊗v, AW−WA, $\langle v\otimes Wv\rangle_s$, $\langle v\otimes u\rangle_s$

群	形式不变量	群	形式不变量
		二阶反对称张量值	
$\mathscr{C}_1$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\mathscr{C}_{1v}$	$\mathbf{MA}-\mathbf{AM},\mathbf{W},[\mathbf{i}\otimes\mathbf{v}]_a$
$\mathscr{C}_2$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\mathscr{C}_{2v}$	$\mathbf{MA}-\mathbf{AM},\mathbf{W},[\mathbf{v}\otimes\mathbf{Mv}]_a,[\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}]_a$
$\mathscr{C}_n(n=3,5,7,\dots)$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\mathscr{C}_{nv}(n=3,5,7,\dots)$	$\mathbf{AP}^{\mathbf{A}}_{2n}-\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{2n}\mathbf{A},\mathbf{AB}-\mathbf{BA},\mathbf{W},$ $[\mathbf{v}\otimes\mathbf{p}^{\mathbf{v}}_n]_a,[\mathbf{v}\otimes\mathbf{Av}]_a,[\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}]_a$
$\mathscr{C}_n(n=4,6,8,\dots)$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\mathscr{C}_{nv}(n=4,6,8,\dots)$	$\mathbf{AP}^{\mathbf{A}}_n-\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_n\mathbf{A},\mathbf{AB}-\mathbf{BA},\mathbf{W},$ $[\mathbf{v}\otimes\mathbf{p}^{\mathbf{v}}_n]_a,[\mathbf{v}\otimes\mathbf{Av}]_a,[\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}]_a$
$\mathscr{C}_\infty$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\mathscr{C}_{\infty v}$	$\mathbf{AB}-\mathbf{BA},\mathbf{W},[\mathbf{v}\otimes\mathbf{Av}]_a,[\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}]_a$
		矢 量 值	
$\mathscr{C}_1$	$\mathbf{i},\mathbf{j}$	$\mathscr{C}_{1v}$	$\mathbf{i},\mathbf{Ai},\mathbf{Wi},\mathbf{v}$
$\mathscr{C}_2$	$\mathbf{v},\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}$	$\mathscr{C}_{2v}$	$\mathbf{v},\mathbf{Mv},\mathbf{Av},\mathbf{Wv}$
$\mathscr{C}_n(n=3,5,7,\dots)$	$\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_n,\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_n,\mathbf{v},\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}$	$\mathscr{C}_{nv}(n=3,5,7,\dots)$	$\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_n,\mathbf{Ap}^{\mathbf{A}}_n,\mathbf{Wp}^{\mathbf{A}}_n,\mathbf{v},\mathbf{p}^{\mathbf{v}}_n,\mathbf{Wv}$
$\mathscr{C}_n(n=4,6,8,\dots)$	$\mathbf{v},\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}$	$\mathscr{C}_{nv}(n=4,6,8,\dots)$	$\mathbf{v},\mathbf{p}^{\mathbf{v}}_n,\mathbf{Av},\mathbf{Wv}$
$\mathscr{C}_\infty$	$\mathbf{v},\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}$	$\mathscr{C}_{\infty v}$	$\mathbf{v},\mathbf{Av},\mathbf{Wv}$

根据（3.14），我们可以进一步写出表示式[184]

$$\mathbf{p}^{\mathbf{v}}_n=v^{n-1}\,\mathrm{Re}[\exp(i\,n\,\theta+i\,(n-1)\,\varphi)\,(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_2)] \tag{4.9}$$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{v}}_n=v^{n-2}\,\mathrm{Re}[\exp(i\,n\,\theta+i\,(n-2)\,\varphi)\,(\mathbf{E}_1+i\mathbf{E}_2)] \tag{4.10}$$

$$\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{2m+1}=A^m\,\mathrm{Re}[\exp(i\,(2m+1)\theta+i\,m\,\Phi)\,(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_2)] \tag{4.11}$$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{A}}_{2m}=A^{m-1}\,\mathrm{Re}[\exp(i\,2m\,\theta+i\,(m-1)\,\Phi)\,(\mathbf{E}_1+i\mathbf{E}_2)] \tag{4.12}$$

和

$$2\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{2m+1}\otimes\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{2m+1}=A^{2m}\mathbf{I}+\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{4m+2} \tag{4.13}$$

实践表明了在建立二维各向异性材料本构方程的模型时，上述关系式是非常有用的[180,188]。

对于表10和11应该注意到下面3点：首先，相应 $\mathscr{C}_n(n=1,2,3,\dots,\infty)$ 的二阶反对称张量值函数的表示与标量值函数的表示是对偶的，这一事实与二维张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和单位值 $\mathbf{I}$ 相对偶的事实相一致。其次，关于 $\mathscr{C}_n$（n 为不小于3的整数）的二阶对称张量值函数表示中的形式不变量与关于 $\mathscr{C}_\infty$ 的相应形式不变量完全一致。最后一点，分别比较与 $\mathscr{C}_n$ 和 $\mathscr{C}_{nv}$（n 取不小于3的整数）相联系和与 $\mathscr{C}_\infty$ 和 $\mathscr{C}_{\infty v}$ 相联系的表示，我们可以看到各向同性不变量 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$ 和 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ 不出现在与 $\mathscr{C}_n$（n 取不小于3的整数）相关的表示中，而各向同性不变量 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{Au}$、形式不变量 $\mathbf{Av}$ 和 $\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ 不出现在与 $\mathscr{C}_{nv}$（n 为不小于3的奇数）相关的表示

中．然而这些缺省的不变量和形式不变量在某些应用的场合可能完全需要用到．例如，如果 $\mathrm{tr}\,\mathbf{P}_n^{A}\mathbf{A}$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{P}_n^{A}\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}$ 中的一个（或 $\mathrm{tr}\,\mathbf{P}_{2n}^{A}\mathbf{A}$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{P}_{2n}^{A}\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}$的一个）在某个具体应用时被删除了（如在线弹性理论中），则就必须使用 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$．类似地，如果 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}_n^{v}$ 和 $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{p}_n^{v}$ 之一、$\mathrm{tr}\,\mathbf{P}_n^{v}\mathbf{A}$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{P}_n^{u}\mathbf{A}$之一、$\mathbf{p}_n^{A}$ 和 $\mathbf{A}\mathbf{p}_n^{A}$ 之一、以及 $\mathbf{P}_n^{v}$ 和 $\mathbf{P}_n^{u}$ 之一因故省缺了，则相应地需要用到 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}$ 以及 $\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$．

表 10 和 11 中一般结果的某些特殊形式早先由一些作者给出过．Zheng [178] 给出了关于二维正交异性 $\mathscr{C}_{2v}$ 的结果，而关于 $\mathscr{C}_{nv}$（n 取不小于 4 的偶数）的结果则由 Zheng 等 [177] 给出．对称性 $\mathscr{C}_{4v}$（四方各向异性）、$\mathscr{C}_{6v}$（六方各向异性）和 $\mathscr{C}_{8v}$（八方各向异性）特别引人注意．如 Zheng等 [177] 所示，它们分别相应于沿 0°/90°、0°/±60° 和 0°/90°/±45° 的等同纤维增强的复合材料对称性．Zheng 和 Betten [188] 及 Zheng [186] 研究了四、六、八方各向异性纤维增强复合材料的弹性、屈服和失效的本构方程．一般来说，在 n 个方向（n 取不小于 3 的整数）增强的复合材料，自 Weiren 和 Norris [170] 开始就在文献中称为准各向同性复合材料，其材料对称性为 $\mathscr{C}_{nv}$．

5 矢量和二阶张量的横观各向同性张量函数

具有单一主导方向的三维材料被称为横观各向同性材料．单向纤维复合材料即是横观各向同性材料的一个典型例子，其纤维方向即为主导方向．本构关系在绕主导方向旋转时具有不变性．肌肉应被视为横观各向同性材料而不是各向同性材料．初始各向同性多聚物在只承受单轴应力而经历大变形后，诱导出横观各向同性．内部分布着平行微裂纹的金属，具有垂直裂面的主导方向，呈现损伤诱导的横观各向同性．还可以举出更多有关横观各向同性的有趣例子．

如表 7 所示，在三维空间存在五种横观各向同性，即 $\mathscr{C}_{\infty}, \mathscr{C}_{\infty h}, \mathscr{D}_{\infty}, \mathscr{C}_{\infty v}$ 和 $\mathscr{D}_{\infty h}$．对称性 $\mathscr{D}_{\infty h}$ 对应通常定义的横观各向同性，$\mathscr{C}_{\infty}$ 为旋转对称性 [147] 和 $\mathscr{D}_{\infty}$ 被 Zheng 和 Boehler [190] 称为横观半向同性．一些作者，例如 Smith [134]，Zheng [180,181]，Zheng 和 Boehler [190] 喜欢使用（3.3）中的替换符号，即 $\mathscr{T}_1=\mathscr{C}_{\infty}$，$\mathscr{T}_3=\mathscr{C}_{\infty h}$，$\mathscr{T}_5=\mathscr{D}_{\infty}$，$\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$ 和 $\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}$．从表 7 中，可见五种横观各向同性的群生成元和结构张量分别为

$$\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h} \qquad \mathbf{R}(\phi\mathbf{k}),\ \mathbf{R}_i,\ -\mathbf{I} \qquad \mathbf{k}\otimes\mathbf{k} \tag{5.1}$$

$$\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v} \qquad \mathbf{R}(\phi\mathbf{k}),\ \mathbf{R}_i \qquad \mathbf{k} \tag{5.2}$$

$$\mathscr{T}_5=\mathscr{D}_{\infty} \qquad \mathbf{R}(\phi\mathbf{k}),\ -\mathbf{R}_i \qquad \mathbf{k}\otimes\mathbf{k},\boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.3}$$

$$\mathscr{T}_3=\mathscr{C}_{\infty h} \qquad \mathbf{R}(\phi\mathbf{k}),\ -\mathbf{I} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{k} \tag{5.4}$$

$$\mathscr{T}_1=\mathscr{C}_{\infty} \qquad \mathbf{R}(\phi\mathbf{k}) \qquad \mathbf{k},\boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.5}$$

最近，Zheng 在文［180］中对任意有限数目二阶张量 $\mathbf{A}_i$ 和 $\mathbf{W}_p$ 及矢量 $\mathbf{v}_m$ 的标量值、矢量值和二阶张量值函数建立了相应于每一种横观各向同性的完备和不可约表示．这些表示的不可约性则由 Zheng 在一篇后续文章［181］中采用 Pennisi 和 Trovato 方法 [100] 作了独立的证明．这些一般性结果已归纳在表 12—15 中．

表 12　关于 A_i, W_p, v_m 在 $\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}$, $\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$ 和 $\mathscr{T}_5=\mathscr{D}_{\infty}$ 下的横观各向同性不可约函数基中的不变量

变量	$\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}(k\otimes k)$	$\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}(k)$	$\mathscr{T}_5=\mathscr{D}_{\infty}(k\otimes k,\varepsilon)$
A		$\mathrm{tr}A$, $\mathrm{tr}A^2$, $\mathrm{tr}A^3$, $k\cdot Ak$, $k\cdot A^2k$	
A,B		$\mathrm{tr}AB$, $\mathrm{tr}A^2B$, $\mathrm{tr}AB^2$, $k\cdot ABk$	
A,B,C		$\mathrm{tr}\,ABC$	
W		$\mathrm{tr}W^2$, $k\cdot W^2k$	
A,W		$\mathrm{tr}AW^2,\mathrm{tr}A^2W^2,\mathrm{tr}A^2W^2AW,k\cdot AWk,k\cdot A^2Wk,k\cdot WAW^2k$	
A,B,W		$\mathrm{tr}ABW,\mathrm{tr}A^2BW,\mathrm{tr}AB^2W,\mathrm{tr}AW^2BW$	
W,V		$\mathrm{tr}WV,k\cdot WVk,k\cdot W^2Vk,k\cdot WV^2k$	
A,W,V		$\mathrm{tr}AWV,\mathrm{tr}AW^2V,\mathrm{tr}AWV^2$	
W,V,U		$\mathrm{tr}WVU$	
v	$v\cdot v,(k\cdot v)^2$	$v\cdot v,k\cdot v$	$v\cdot v,(k\cdot v)^2$
A,v	$v\cdot Av,v\cdot A^2v,$ $(k\cdot v)(k\cdot Av)$	$v\cdot Av,k\cdot Av,$ $k\cdot A^2v$	$v\cdot Av,v\cdot A^2v,[k,v,Ak],$ $[k,v,A^2k],[v,Av,A^2v],$ $(k\cdot v)[k,v,Av]$
A,B,v	$v\cdot ABv$	$k\cdot(AB-BA)v$	$v\cdot\varepsilon[AB],v\cdot\varepsilon[A^2B],$ $v\cdot\varepsilon[AB^2],[v,Av,Bv]$
W,v	$v\cdot W^2v,(k\cdot v)(k\cdot Wv),$ $(k\cdot Wv)(k\cdot W^2v)$	$k\cdot Wv,k\cdot W^2v$	$v\cdot\varepsilon[W],[k,v,Wk],$ $[k,v,W^2k],(k\cdot v)(k\cdot Wv)$
A,W,v	$v\cdot AWv,v\cdot A^2Wv,$ $v\cdot WAW^2v$	$v\cdot AWv,$ $k(AW+WA)v$	$v\cdot AWv,v\cdot\varepsilon[AW],$ $v\cdot\varepsilon[AW^2]$
W,V,v	$v\cdot WVv,v\cdot W^2Vv,$ $v\cdot WV^2v$	$k\cdot(WV-VW)v$	$v\cdot\varepsilon[WV]$
v,u	$v\cdot u,(k\cdot v)(k\cdot u)$	$v\cdot u,[k,v,u],$ $(k\cdot v)(k\cdot u)$	$v\cdot u,(k\cdot v)(k\cdot u),$ $(k\cdot v)[k,v,u],(k\cdot u)[k,v,u]$
A,v,u	$v\cdot Au,v\cdot A^2u,$ $v\cdot(k\otimes Ak-Ak\otimes k)u$	$v\cdot Au$	$v\cdot Au,[v,u,Au],[u,v,Av]$
A,B,v,u	$v\cdot(AB-BA)u$	—	—
W,v,u	$v\cdot Wu,v\cdot W^2u,$ $v\cdot(k\otimes Wk-Wk\otimes k)u$	$v\cdot Wu$	$v\cdot Wu$
A,W,v,u	$v\cdot(AW+WA)u$		—
W,V,v,u	$v\cdot(WV-VW)u$		—
v,u,w	—	—	$[v,u,w]$

表 13 关于 A_i, W_p, v_m 在 $\mathscr{T}_3=\mathscr{C}_{\infty h}$ 和 $\mathscr{T}_1=\mathscr{C}_{\infty}$ 下的横观各向同性完备和不可约张量值函数表示中的形式不变量

变量	$\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}(k\otimes k)$	$\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}(k)$	$\mathscr{T}_5=\mathscr{D}_{\infty}(k\otimes k,\varepsilon)$
	二阶对称张量值		
—	$I, k\otimes k$		
A	$A, A^2, k\otimes Ak+Ak\otimes k, k\otimes A^2k+A^2k\otimes k$		
A,B	$AB+BA$		
W	$W^2, k\otimes Wk+Wk\otimes k, Wk\otimes Wk, Wk\otimes W^2k+W^2k\otimes Wk$		
A,W	$AW-WA, WAW^2-WA^2W, A^2W-WA^2$		
W,V	$WV+VW, W^2V-VW^2, WV^2-V^2W$		
v	$v\otimes v$, $(k\cdot v)(v\otimes k+k\otimes v)$	$v\otimes v, v\otimes k+k\otimes v$	$v\otimes v, (k\cdot v)\langle k\otimes v\rangle_s$, $\langle k\otimes(k\times v)\rangle_s$, $(k\cdot v)\langle v\otimes(k\times v)\rangle_s$
A,v	$v\otimes Av+Av\otimes v$	$A[v\otimes k]_a-[k\otimes v]_a A$	$\langle A\varepsilon v\rangle_s, \langle A^2\varepsilon v\rangle_s$, $\langle v\otimes(v\times Av)\rangle_s$
W,v	$v\otimes Wv+Wv\otimes v$, $v\otimes W^2v+W^2v\otimes v$	$v\otimes Wv-Wv\otimes v$. $\langle W[k\otimes v]_a\rangle_s$	$\langle v\otimes Wv\rangle_s, \langle W\varepsilon v\rangle_s, \langle W^2\varepsilon v\rangle_s$
v,u	$v\otimes u+u\otimes v, k\otimes[v\otimes u]_a$ $k+[v\otimes u]_a k\otimes k$	$v\otimes u+u\otimes v$	$\langle v\otimes u\rangle_s, \langle v\otimes(v\times u)\rangle_s$, $\langle u\otimes(v\times u)\rangle_s$
A,v,u	$A[v\otimes u]_a-[v\otimes u]_a A$	—	—
W,v,u	$W[v\otimes u]_a+[u\otimes v]_a W$	—	—
	二阶反对称张量值		
A	$k\otimes Ak-Ak\otimes k,\ k\otimes A^2k-A^2k\otimes k,\ Ak\otimes A^2k-A^2k\otimes Ak$		
A,B	$AB-BA,\ A^2B-BA^2,\ AB^2-B^2A,\ [Ak\otimes Bk+k\otimes(AB-BA)k]_a$		
W	$W,\ k\otimes Wk-Wk\otimes k,\ k\otimes W^2k-W^2k\otimes k$		
A,W	$AW+WA,\ AW^2-W^2A$		
W,V	$WV-VW$		
v	$(k\cdot v)(v\otimes k-k\otimes v)$	$v\otimes k-k\otimes v$	$\varepsilon v, [k\otimes(k\times v)]_a, (k\cdot v)[k\otimes v]_a$
A,v	$v\otimes Av-Av\otimes v$, $v\otimes A^2v-A^2v\otimes v$, $[(k\cdot v)(u\otimes Av-v\otimes Au)$ $+v\cdot Au(v\otimes u)]_a$	$v\otimes Av-Av\otimes v$, $[A[k\otimes v]_a]_a$	$[v\otimes Av]_a, [A\varepsilon v]_a$
W,v	$v\otimes Wv-Wv\otimes v$, $v\otimes W^2v-W^2v\otimes v$	$W[v\otimes k]_a-[k\otimes v]_a W$	$[W\varepsilon v]_a$
v,u	$v\otimes u-u\otimes v$, $k\otimes[v\otimes u]_a k-[v\otimes u]_a k\otimes k$	$v\otimes u-u\otimes v$	$v\otimes u-u\otimes v$
A,v,u	$A[v\otimes u]_a+[v\otimes u]_a A$	—	—
W,v,u	$W[v\otimes u]_a-[u\otimes v]_a W$	—	—

变量	$\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}(k\otimes k)$	$\mathscr{T}_2=\mathscr{G}_{\infty v}(k)$	$\mathscr{T}_5=\mathscr{D}_{\infty}(k\otimes k,\varepsilon)$
	矢量值		
—	—	k	—
A	—	Ak, A^2k	$k\times Ak, k\times A^2k, Ak\times A^2k$
A,B	—	$(AB-BA)k$	$\varepsilon[AB], \varepsilon[A^2B], \varepsilon[AB^2]$, $Ak\times Bk+k\times[AB]_a k$
W	—	Wk, W^2k	$\varepsilon[W], k\times Wk, k\times W^2k$
A,W	—	$(AW+WA)k$	$\varepsilon[AW], \varepsilon[AW^2]$
W,V	—	$(WV-VW)k$	$\varepsilon[WV]$
v	$v, (k\cdot v)k$	v	$v, (k\cdot v)k, (k\cdot v)(k\times v)$
A,v	Av, A^2v, $(k\otimes Ak-Ak\otimes k)v$	Av	$Av, v\times Av$
A,B,v	$(AB-BA)v$	—	—
W,v	Wv, W^2v, $(k\otimes Ak-Ak\otimes k)v$	Wv	Wv
A,W,v	$(AW+WA)v$	—	—
W,V,v	$(WV-VW)v$	—	—
v,u	—	—	$v\times u$

表 14 关于 A_i, W_p, v_m 在 $\mathscr{T}_3=\mathscr{C}_{\infty h}$ 和 $\mathscr{T}_1=\mathscr{C}_{\infty}$ 下的横观各向同性不可约函数基中的不变量

变量	$\mathscr{T}_3=\mathscr{C}_{\infty h}(\varepsilon k)$	$\mathscr{T}_1=\mathscr{C}_{\infty}(\varepsilon,k)$
A	$\mathrm{tr}A, \mathrm{tr}A^2, \mathrm{tr}A^3, k\cdot Ak, k\cdot A^2k, [k, Ak, A^2k]$	
A,B	$\mathrm{tr}AB, \mathrm{tr}A^2B, \mathrm{tr}AB^2, k\cdot\varepsilon[AB], k\cdot\varepsilon[A^2B], k\cdot\varepsilon[AB^2], [k, Ak, Bk]$	
W	$\mathrm{tr}W^2, k\cdot\varepsilon[W]$	
A,W	$\mathrm{tr}AW^2, k\cdot AWk, k\cdot\varepsilon[AW], k\cdot\varepsilon[AW^2]$	
W,V	$\mathrm{tr}WV, k\cdot\varepsilon[WV]$	
v	$v\cdot v, (k\cdot v)^2$	$v\cdot v, k\cdot v$
A,v	$v\cdot Av, v\cdot A^2v, [k,v,Av], [k,v,A^2v]$, $(k\cdot v)[k,v,Ak]$	$v\cdot Av, k\cdot Av, [k,v,Av]$, $[k,v,Ak]$
W,v	$v\cdot W^2v, [k,v,Wv], [k,v,W^2v], (k\cdot v)(k\cdot Wv)$	$v\cdot\varepsilon[W], k\cdot Wv$
v,u	$v\cdot u, [k,v,u], (k\cdot v)(k\cdot u)$	$v\cdot u, [k,v,u]$
A,v,u	$v\cdot Au, k\cdot(v\times Au-u\times Av)$	—
W,v,u	$v\cdot Wu, k\cdot(v\times Wu-u\times Wv)$	—

表 15 关于 A_i, W_p, v_m 在 $\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}$，$\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$ 和 $\mathscr{T}_5=\mathscr{D}_\infty$ 下的横观各向同性完备和不可约张量值函数表示中的形式不变量

<table>
<tr><th>变量</th><th>$\mathscr{T}_3=\mathscr{C}_{\infty h}(\varepsilon k)$</th><th>$\mathscr{T}_1=\mathscr{C}_{\infty}(k,\varepsilon)$</th></tr>
<tr><td colspan="3">二阶对称张量值</td></tr>
<tr><td>—</td><td colspan="2">$I, k\otimes k$</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="2">$A, A^2, k\otimes Ak+Ak\otimes k, A\varepsilon k-\varepsilon kA, A^2\varepsilon k-\varepsilon kA^2, k\otimes(k\times Ak)+(k\times Ak)\otimes k$</td></tr>
<tr><td>W</td><td colspan="2">$W^2, k\otimes Wk+Wk\otimes k, W\varepsilon k+\varepsilon kW, W^2\varepsilon k-\varepsilon kW^2$</td></tr>
<tr><td>v</td><td>$v\otimes v, \langle v\otimes(k\times v)\rangle_s, (k\cdot v)\langle k\otimes v\rangle_s,$
$(k\cdot v)\langle k\otimes(k\times v)\rangle_s$</td><td>$v\otimes v, \langle k\otimes v\rangle_s, \langle k\otimes(k\times v)\rangle_s, \langle v\otimes(k\times v)\rangle$</td></tr>
<tr><td>v,u</td><td>$\langle v\otimes u\rangle_s, [v\otimes u]_a\varepsilon k+\varepsilon k[v\otimes u]_a$</td><td>—</td></tr>
<tr><td colspan="3">二阶反对称张量值</td></tr>
<tr><td>—</td><td colspan="2">εk</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="2">$k\otimes Ak-Ak\otimes k, A\varepsilon k+\varepsilon kA$</td></tr>
<tr><td>W</td><td colspan="2">$W, W\varepsilon k-\varepsilon kW$</td></tr>
<tr><td>v</td><td>$[v\otimes(k\times v)]_a, (k\cdot v)[k\otimes v]_a$</td><td>$\varepsilon v, [k\otimes v]_a$</td></tr>
<tr><td>v,u</td><td>$[v\otimes u]_a, [v\otimes u]_a\varepsilon k-\varepsilon k[v\otimes u]_a$</td><td>—</td></tr>
<tr><td colspan="3">矢 量 值</td></tr>
<tr><td>—</td><td>—</td><td>k</td></tr>
<tr><td>A</td><td>—</td><td>$Ak, k\times Ak$</td></tr>
<tr><td>W</td><td>$Wv, [W\varepsilon k]_a v$</td><td>$\varepsilon[W], Wk, k\times Wk$</td></tr>
<tr><td>v</td><td>$v, k\times v, (k\cdot v)k$</td><td>$v, k\times v$</td></tr>
<tr><td>A,v</td><td>$Av, [A\varepsilon k]_a v$</td><td>—</td></tr>
</table>

Boehler[36] 也曾给出了相应于通常横观各向同性 $\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}$ 的关于任意有限数目的二阶对称张量 $A_1,\cdots,A_N$ 的标量值和二阶对称张量值函数的表示．将这些表示与表12和13中的一般结果相比较，可以看出 Boehler 的函数基是完备且不可约的，但其二阶张量值函数的表示中包含了多余的形式不变量 A^2B+BA^2 和 AB^2+B^2A，因而只是完备但不是不可约的．

已建立起的横观各向同性整基，包括 Pipkin 和 Rivlin[102] 给出的在 $\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$ 下关于 v_m 和单个二阶对称张量的整基，Adkins[2,3] 给出的在 $\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$ 和 $\mathscr{T}_1=\mathscr{C}_\infty$ 下关于 A_i 和 v_m 的整基，Long 和 McIntire（见 Smith[134]）给出的在 $\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}$ 下关于 A_i，W_p, v_m 的整基，以及 Smith[134] 给出的相应五种横观各向同性的 A_i, W_p, v_m 的整基．对于这些结果，Boehler 曾在文[36]的表Ⅳ中给出了相应 $\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}$ 的关于 $A_1,\cdots,A_N$ 的一般

函数和多项式表示的对比．前者比后者要简单得多，很明显，这给描述横观各向同性材料的力学行为带来了很大的便利[151]．

有两点需要着重强调一下：(i) 表 12—15 中的表示均为与坐标无关的，而已有的横观各向同性整基[134] 则与坐标有关，考虑到主导方向 $\mathbf{k}$ 不必要是常量，而是可以随位置发生变化（如由单族弯曲纤维增强的复合材料），与坐标无关的表示是有其优点的．(ii) 对于 $\mathbf{A}_i$ 和 $\mathbf{W}$ 的标量值和二阶张量值函数，在表 12 和 13 中给出了与 $\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}$，$\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$ 或 $\mathscr{T}_5=\mathscr{D}_{\infty}$ 无关的相同表示，在表 14 和 15 中给出了与 $\mathscr{T}_3=\mathscr{C}_{\infty h}$ 或 $\mathscr{T}_1=\mathscr{C}_{\infty}$ 无关的相同表示．这相应于中心反演 $-\mathbf{I}$ 作用下任意二阶张量不发生变化这一事实．换言之，二阶张量的标量值和二阶张量值函数横观各向同性的类型，从 $\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}$，$\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$ 和 $\mathscr{T}_5=\mathscr{D}_{\infty}$ 三种减至 $\mathscr{T}_4=\mathscr{D}_{\infty h}$ 一种，从 $\mathscr{T}_3=\mathscr{C}_{\infty h}$ 和 $\mathscr{T}_1=\mathscr{C}_{\infty}$ 两种减至 $\mathscr{T}_3=\mathscr{C}_{\infty h}$．

容易对表 12—15 的表示作一有用的推广．令 $\mathbf{D}$ 为仅有两个不同主值的任意二阶对称张量．$\mathbf{D}$ 的特征平面法线方向记作 $\mathbf{k}$，即

$$\mathbf{D}=D_0\mathbf{I}+D\mathbf{k}\otimes\mathbf{k},\quad D\neq 0 \tag{5.6}$$

在表 12—15 中用 $\mathbf{D}$ 替换 $\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}$ 并加上

$$\operatorname{tr}\mathbf{D},\quad \operatorname{tr}\mathbf{D}^2 \tag{5.7}$$

立刻产生了完备和不可约横观各向同性张量函数表示的一个等价的广义化形式．这一广义化特别令人感兴趣之处，是当考虑塑性或损伤诱导的横观各向同性时将 $\mathbf{D}$ 直接认作塑性应变或连续损伤张量，它描述了诱导的横观各向同性．

已有大量的文献致力于横观各向同性张量函数表示定理在固体力学中的应用，如见 Spencer[148]、Boehler[32-35,37,38] 和 Betten[25] 的专著．此外我们还将在第 8 章中看到，与 $\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$ 有关的表示可用于直接给出某些类型的二维空间二阶和四阶张量的各向同性张量函数表示．

6　矢量和二阶张量的三维正交各向异性张量函数

正交异性材料如正交层合板在现代工程中有着重要的应用，其材料对称性可由 $\mathscr{D}_{2h}$ 表示（见表 7）．轧制薄钢板具有塑性诱导的，沿轧制方向、横向和厚度方向的正交异性．一般地，我们可将正交晶系中的 3 种晶体点群都视为正交异性，采用两组可相互替换的符号[182,183]，即

$$\mathscr{O}_3=\mathscr{D}_{2h},\quad \mathscr{O}_1=\mathscr{C}_{2v},\quad \mathscr{O}_2=\mathscr{D}_2 \tag{6.1}$$

见表 7，这些正交异性的群生成元和结构张量可为

$$\mathscr{O}_3=\mathscr{D}_{2h}\qquad \mathbf{R}_i,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_k,-\mathbf{I}\qquad \mathbf{M}\qquad (\text{或 } \mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3) \tag{6.2}$$

$$\mathscr{O}_1=\mathscr{C}_{2v}\qquad \mathbf{R}_i,\mathbf{R}_j,-\mathbf{R}_k\qquad \mathbf{M},\mathbf{k}\qquad (\text{或 } \mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{k}) \tag{6.3}$$

$$\mathscr{O}_2=\mathscr{D}_2\qquad -\mathbf{R}_i,-\mathbf{R}_j,-\mathbf{R}_k\qquad \mathbf{M},\boldsymbol{\varepsilon}\qquad (\text{或 } \mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3,\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{6.4}$$

其中

$$\mathbf{M}=\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}-\mathbf{j}\otimes\mathbf{j} \tag{6.5}$$

$$N_1 = i\otimes i,\ N_2 = j\otimes j,\ N_3 = k\otimes k \tag{6.6}$$

Zheng[182] 导出了关于任意有限数目二阶张量 $\mathbf{A}_i$ 和 $\mathbf{W}_p$ 及矢量 $\mathbf{v}_m$ 的标量值、矢量值和二阶张量值函数在正交异性 $\mathscr{O}_3=\mathscr{D}_{2h}$，$\mathscr{O}_1=\mathscr{C}_{2v}$ 和 $\mathscr{O}_2=\mathscr{D}_2$ 下的完备表示。紧接着，Zheng 在文 [183] 中又证明了这些表示的不可约性。现将这些一般性的完备和不可约表示归纳为表 16 和 17。

表 16　三维空间关于 $\mathbf{A}_i,\mathbf{W}_p,\mathbf{v}_m$ 的正交异性不可约函数基中的不变量

变量	$\mathscr{O}_3(\mathbf{M})$	$\mathscr{O}_1(\mathbf{M},\mathbf{k})$	$\mathscr{O}_2(\mathbf{M},\boldsymbol{\varepsilon})$
A		$\mathrm{tr}\mathbf{A},\mathrm{tr}\mathbf{A}^2,\mathrm{tr}\mathbf{A}^3,\mathrm{tr}\mathbf{MA},\mathrm{tr}\mathbf{M}^2\mathbf{A},\mathrm{tr}\mathbf{MA}^2,\mathrm{tr}\mathbf{M}^2\mathbf{A}^2$	
A,B		$\mathrm{tr}\mathbf{AB},\mathrm{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B},\mathrm{tr}\mathbf{AB}^2,\mathrm{tr}\mathbf{MAB}$	
A,B,C		$\mathrm{tr}\mathbf{ABC}$	
W		$\mathrm{tr}\mathbf{W}^2,\mathrm{tr}\mathbf{MW}^2,\mathrm{tr}\mathbf{M}^2\mathbf{W}^2,\mathrm{tr}\mathbf{M}^2\mathbf{W}^2\mathbf{MW}$	
A,W		$\mathrm{tr}\mathbf{AW}^2,\mathrm{tr}\mathbf{MAW},\mathrm{tr}\mathbf{M}^2\mathbf{AW},\mathrm{tr}\mathbf{MA}^2\mathbf{W}$	
A,B,W		$\mathrm{tr}\mathbf{ABW}$	
W,V		$\mathrm{tr}\mathbf{WV},\mathrm{tr}\mathbf{MWV},\mathrm{tr}\mathbf{MW}^2\mathbf{V},\mathrm{tr}\mathbf{MWV}^2$	
A,W,V		$\mathrm{tr}\mathbf{AWV}$	
W,V,U		$\mathrm{tr}\mathbf{WVU}$	
v	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v},\mathbf{v}\cdot\mathbf{Mv},\mathbf{v}\cdot\mathbf{M}^2\mathbf{v}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v},\mathbf{v}\cdot\mathbf{Mv},\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v},\mathbf{v}\cdot\mathbf{Mv},\mathbf{v}\cdot\mathbf{M}^2\mathbf{v},[\mathbf{v},\mathbf{Mv},\mathbf{M}^2\mathbf{v}]$
A,v	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Av},\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{v},\mathbf{v}\cdot\mathbf{MAv}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Av},\mathbf{k}\cdot\mathbf{Av},\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{v},\mathbf{k}\cdot(\mathbf{AM}-\mathbf{MA})\mathbf{v}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Av},\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{M}^2\mathbf{A}],\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{MA}],\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{MA}^2]$
A,B,v	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{ABv}$	$\mathbf{k}\cdot(\mathbf{AB}-\mathbf{BA})\mathbf{v}$	$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{AB}]$
W,v	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{W}^2\mathbf{v},\mathbf{v}\cdot\mathbf{MWv},\mathbf{v}\cdot\mathbf{M}^2\mathbf{Wv}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{MWv},\mathbf{k}\cdot\mathbf{Wv},\mathbf{k}\cdot\mathbf{W}^2\mathbf{v},\mathbf{k}\cdot(\mathbf{MW}+\mathbf{WM})\mathbf{v}$	$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{W}],\mathbf{v}\cdot\mathbf{MWv},\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{MW}],\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{MW}^2]$
A,W,v	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{AWv}$	$\mathbf{k}(\mathbf{AW}+\mathbf{WA})\mathbf{v}$	$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{AW}]$
W,V,v	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{WVv}$	$\mathbf{k}\cdot(\mathbf{WV}-\mathbf{VW})\mathbf{v}$	$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{WV}]$
v,u	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u},\mathbf{v}\cdot\mathbf{Mu},\mathbf{v}\cdot\mathbf{M}^2\mathbf{u}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u},\mathbf{v}\cdot\mathbf{Mu}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u},\mathbf{v}\cdot\mathbf{Mu},[\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{Mu}],[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{Mv}]$
A,v,u	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Au},\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{u},\mathbf{v}\cdot(\mathbf{AM}-\mathbf{MA})\mathbf{u}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Au}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Au}$
W,v,u	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Wu},\mathbf{v}\cdot\mathbf{W}^2\mathbf{u},\mathbf{v}\cdot(\mathbf{MW}+\mathbf{WM})\mathbf{u}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Wu}$	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Wu}$
A,B,v,u	$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{AB}-\mathbf{BA})\mathbf{u}$	—	—
A,W,v,u	$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{AW}+\mathbf{WA})\mathbf{u}$	—	—
W,V,v,u	$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{WV}-\mathbf{VW})\mathbf{u}$	—	—
v,u,w	—	—	$[\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w}]$

表 17 三维空间关于 A_i, W_p, v_m 的正交异性完备和不可约张量值函数表示中的形式不变量

变量	$\mathscr{O}_3(M)$	$\mathscr{O}_1(M,k)$	$\mathscr{O}_2(M,\varepsilon)$
	二阶对称张量值		
—	$I,\ M,\ M^2$		
A	$A,\ A^2,\ MA+AM,\ M^2A+AM^2$		
A,B	$AB+BA$		
W	$W^2,\ MW-WM,\ M^2W-AM^2$		
A,W	$AW-WA$		
W,V	$WV+VW$		
v	$v\otimes v, \langle v\otimes Mv\rangle_s, \langle v\otimes M^2v\rangle_s$	$v\otimes v, \langle k\otimes v\rangle_s, \langle M[k\otimes v]_a\rangle_s$	$v\otimes v, \langle M\varepsilon v\rangle_s, \langle M^2\varepsilon v\rangle_s$
A,v	$\langle v\otimes Av\rangle_s$	$\langle A[k\otimes v]_a\rangle_s$	$\langle A\varepsilon v\rangle_s$
W,v	$\langle v\otimes Wv\rangle_s$	$\langle W[k\otimes v]_a\rangle_s$	$\langle W\varepsilon v\rangle_s$
v,u	$\langle v\otimes u\rangle_s, \langle M[v\otimes u]_a\rangle_s$	$\langle v\otimes u\rangle_s$	$\langle v\otimes u\rangle_s$
A,v,u	$\langle A[v\otimes u]_a\rangle_s$	—	—
W,v,u	$\langle W[v\otimes u]_a\rangle_s$	—	—
	二阶反对称张量值		
A	$MA-AM,\ MA^2-A^2M,\ M^2A-AM^2,\ MAM^2-M^2AM$		
A,B	$AB-BA$		
W	$W,\ MW+WM,\ MW^2-W^2M$		
A,W	$AW+WA$		
W,V	$WV-VW$		
v	$[v\otimes Mv]_a, [v\otimes M^2v]_a, [Mv\otimes M^2v]_a$	$[v\otimes Mv]_a, [k\otimes v]_a, [M[k\otimes v]_a]_a$	$\varepsilon v, [M\varepsilon v]_a, [v\otimes Mv]_a$
A,v	$[v\otimes Av]_a$	$[A[k\otimes v]_a]_a$	$[A\varepsilon v]_a$
W,v	$[v\otimes Wv]_a$	$[W[k\otimes v]_a]_a$	$[W\varepsilon v]_a$
v,u	$[v\otimes u]_a, [M[v\otimes u]_a]_a$	$[v\otimes u]_a$	$[v\otimes u]_a$
A,v,u	$[A[v\otimes u]_a]_a$	—	—
W,v,u	$[W[v\otimes u]_a]_a$	—	—

变量	$\mathscr{O}_3(\mathbf{M})$	$\mathscr{O}_1(\mathbf{M},\mathbf{k})$	$\mathscr{O}_2(\mathbf{M},\varepsilon)$
		矢 量 值	
—	—	$\mathbf{k}$	—
$\mathbf{A}$	—	$\mathbf{Ak},\mathbf{A}^2\mathbf{k},(\mathbf{MA}-\mathbf{AM})\mathbf{k}$	$\varepsilon[\mathbf{MA}],\varepsilon[\mathbf{M}^2\mathbf{A}],\varepsilon[\mathbf{MA}^2],\varepsilon[\mathbf{M}^2\mathbf{AM}]$
$\mathbf{A},\mathbf{B}$	—	$(\mathbf{AB}-\mathbf{BA})\mathbf{k}$	$\varepsilon[\mathbf{AB}]$
$\mathbf{W}$	—	$\mathbf{Wk},\mathbf{W}^2\mathbf{k},(\mathbf{MW}+\mathbf{WM})\mathbf{k}$	$\varepsilon[\mathbf{W}],\varepsilon[\mathbf{MW}],\varepsilon[\mathbf{MW}^2]$
$\mathbf{A},\mathbf{W}$	—	$(\mathbf{AW}+\mathbf{WA})\mathbf{k}$	$\varepsilon[\mathbf{AW}]$
$\mathbf{W},\mathbf{V}$	—	$(\mathbf{WV}-\mathbf{VW})\mathbf{k}$	$\varepsilon[\mathbf{WV}]$
$\mathbf{v}$	$\mathbf{v},\mathbf{Mv},\mathbf{M}^2\mathbf{v}$	$\mathbf{v},\mathbf{Mv}$	$\mathbf{v},\mathbf{Mv},\mathbf{v}\times\mathbf{Mv}$
$\mathbf{A},\mathbf{v}$	$\mathbf{Av},\mathbf{A}^2\mathbf{v},(\mathbf{MA}-\mathbf{AM})\mathbf{v}$	$\mathbf{Av}$	$\mathbf{Av}$
$\mathbf{W},\mathbf{v}$	$\mathbf{Wv},\mathbf{W}^2\mathbf{v},(\mathbf{MW}+\mathbf{WM})\mathbf{v}$	$\mathbf{Wv}$	$\mathbf{Wv}$
$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{v}$	$(\mathbf{AB}-\mathbf{BA})\mathbf{v}$	—	—
$\mathbf{A},\mathbf{W},\mathbf{v}$	$(\mathbf{AW}+\mathbf{WA})\mathbf{v}$	—	—
$\mathbf{W},\mathbf{V},\mathbf{v}$	$(\mathbf{WV}-\mathbf{VW})\mathbf{v}$	—	—
$\mathbf{v},\mathbf{u}$	—	—	$\mathbf{v}\times\mathbf{u}$

我们要指出如下两条：（i）表16和17中的表示都是与坐标无关的．（ii）根据与中心反演 $-\mathbf{I}$ 作用下任意二阶张量不出现变化这一事实，表16和17中就正交异性为 $\mathscr{O}_3=\mathscr{D}_{2h}$，$\mathscr{O}_1=\mathscr{C}_{2v}$ 和 $\mathscr{O}_2=\mathscr{D}_2$ 中的每一种，对 $\mathbf{A}_i$ 和 $\mathbf{W}_p$ 的标量和二阶张量值函数给出了相同表示，特别是，力学本构关系总是以中心反演作为一个对称变换，故相应 $\mathscr{D}_{2h}$，$\mathscr{C}_{2v}$ 和 $\mathscr{D}_2$ 类型材料的力学对称性只能是通常意义下的正交异性 $\mathscr{O}_3=\mathscr{D}_{2h}$．

读者可在（6.2）和（6.4）中注意到，对称性 $\mathscr{D}_{2h}$ 和 $\mathscr{D}_2$ 的三个主导方向 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 是等价的，所以表16和17中与 $\mathscr{O}_3=\mathscr{D}_{2h}$ 和 $\mathscr{O}_2=\mathscr{D}_2$ 有关的结构张量 $\mathbf{M}=\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}-\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}$ 可等价地替换为

$$\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}-\mathbf{k}\otimes\mathbf{k} \tag{6.7}$$

或

$$\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}-\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} \tag{6.8}$$

在 $\mathscr{O}_3=\mathscr{D}_{2h}$ 下关于 $\mathbf{A}_i,\mathbf{W}_p,\mathbf{v}_m$ 的正交异性标量值、矢量值和二阶张量值函数完备和不可约表示，其中 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 相互等价（如表18所示），也已由 Zheng 和 Boehler[192] 给出了一般结果．用二阶反对称张量 $\varepsilon\mathbf{v}_m$ 替换表18中的矢量 $\mathbf{v}_m$，并利用 Zheng 文献［179］中表1给出的变换关系，即可立即得出在 $\mathscr{O}_2=\mathscr{D}_2$ 下关于 $\mathbf{A}_i,\mathbf{W}_p,\mathbf{v}_m$ 的正交异性标量值、矢量值和二阶张量值函数完备和不可约表示，其中 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 相互等价．

然而，将表16和17与表18给出的正交异性张量函数表示相比较，可见前者显然更为简单．另外，有许多正交异性工程材料具有两个较“强”的主导方向和一个较“弱”的主导方向．正交层合板便是这样一个例子，其力学特性（刚度、强度）在两个正交单向层方向与

表 18 关于 A_i, W_p, v_m 在 $\mathscr{O}_3$ 下另一种形式的完备和不可约张量函数

变量	不变量	变量	不变量
A	$trN_1A,\ trN_2A,\ trN_3A,$	v	$v\cdot N_1v,\ v\cdot N_2v,\ v\cdot N_3v$
	$trN_1A^2,\ trN_2A^2,\ trN_3A^2,\ trA^3$	A, v	$v\cdot N_1AN_2v,\ v\cdot N_2AN_3v,$
A, B	$trA^2B,\ trAB^2,$		$v\cdot N_3AN_1v,\ v\cdot A^2v$
	$trN_1AN_2B,\ trN_2AN_3B,\ trN_3AN_1B$	A, B, v	$v\cdot ABv$
A, B, C	$trABC$	W, v	$v\cdot N_1WN_2v,\ v\cdot N_2WN_3v,$
W	$trN_1W^2,\ trN_2W^2,\ trN_3W^2,$		$v\cdot N_3WN_1v,\ v\cdot W^2v$
	$trN_1WN_2WN_3W$	A, W, v	$v\cdot AWv$
A, W	$trN_1AN_2W,\ trN_2AN_3W,\ trN_3AN_1W,$	W, V, v	$v\cdot WVv$
	$tr(N_1WN_2+N_2WN_3+N_3WN_1)A^2,\ trAW^2$	v, u	$v\cdot N_1u,\ v\cdot N_2u,\ v\cdot N_3u$
A, B, W	$trABW$	A, v, u	$v\cdot Au, v\cdot A^2u,\ v\cdot[N_1AN_2+N_2AN_3+N_3AN_1]_a u$
W, V	$trN_1WN_2V,\ trN_2WN_3V,\ trN_3WN_1V,$	W, v, u	$v\cdot Wu, v\cdot W^2u,$
	$tr(N_1VN_2+N_2VN_3+N_3VN_1)W^2,$		$v\cdot\langle N_1WN_2+N_2WN_3+N_3WN_1\rangle_a u$
	$tr(N_1WN_2+N_2WN_3+N_3WN_1)V^2$	A, B, v, u	$v\cdot(AB-BA)u$
A, W, V	$trAWV$	A, W, v, u	$v\cdot(AW+WA)u$
W, V, U	$trWVU$	W, V, v, u	$v\cdot(WV-VW)u$
变量	**矢量值**	**变量**	**矢量值**
v	$N_1v,\ N_2v,\ N_3v$	A, B, v	$(AB-BA)v$
A, v	$Av,\ A^2v,\ [N_1AN_2+N_2AN_3+N_3AN_1]_a v$	A, W, v	$(AW+WA)v$
W, v	$Wv,\ W^2v,\ \langle N_1WN_2+N_2WN_3+N_3WN_1\rangle_s v$	W, V, v	$(WV-VW)v$

续表18

变量	二阶对称张量值	二阶反对称张量值
—	$N_1,\ N_2,\ N_3$	—
A	$\langle N_1AN_2\rangle_s,\ \langle N_2AN_3\rangle_s,\ \langle N_3AN_1\rangle_s,\ A^2$	$[N_1AN_2]_a,\ [N_2AN_3]_a,\ [N_3AN_1]_a,$ $[N_1A^2N_2+N_2A^2N_3+N_2A^2N_1]_a$
A,B	$AB+BA$	$AB-BA$
W	$\langle N_1WN_2\rangle_s,\ \langle N_2WN_3\rangle_s,$ $\langle N_3WN_1\rangle_s,\ W^2$	$[N_1WN_2]_a,\ [N_2WN_3]_a,\ [N_3WN_1]_a,$ $[N_1W^2N_2+N_2W^2N_3+N_3W^2N_1]_a$
A,W	$AW-WA$	$AW+WA$
W,V	$WV+VW$	$WV-VW$
v	$\langle N_1v\otimes N_2v+N_2v\otimes N_3v+N_3v\otimes N_1v\rangle_s$	$[N_1v\otimes N_2v+N_2v\otimes N_3v+N_3v\otimes N_1v]_a$
A,v	$\langle v\otimes Av\rangle_s$	$[v\otimes Av]_a$
W,v	$\langle v\otimes Wv\rangle_s$	$[v\otimes Wv]_s$
v,u	$\langle N_1[v\otimes u]_aN_1+N_2[v\otimes u]_aN_3$ $+N_3[v\otimes u]_aN_1\rangle_s,\ \langle v\otimes u\rangle_s$	$[N_1[v\otimes u]_aN_1+N_2[v\otimes u]_aN_3$ $+N_3[v\otimes u]_aN_1]_a,\ [v\otimes u]_a$
A,v,u	$A[v\otimes u]_a-[v\otimes u]_aA$	$A[v\otimes u]_a+[v\otimes u]_aA$
W,v,u	$W[v\otimes u]_a+[v\otimes u]_aW$	$W[v\otimes u]_a-[v\otimes u]_aW$

厚度方向有明显的不同．因而，我们建议将与 $\mathbf{M}=\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}-\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}$ 相关的 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 分别放在两个强主导方向上．

我们可以很容易地得到表 16 和 17 中表示的一种广义化形式．令 $\mathbf{D}$ 为一个具有三个不同主值的二阶对称张量．对于 $\mathscr{O}_3=\mathscr{D}_{2h}$ 和 $\mathscr{O}_2=\mathscr{D}_2$（以及 $\mathscr{O}_1=\mathscr{C}_{2v}$，如果 $\mathbf{k}$ 被看做是 $\mathbf{D}$ 的一个主导方向时），将表 16 和 17 中的 $\mathbf{M}$ 用 $\mathbf{D}$ 替换并加上

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{D},\ \mathrm{tr}\,\mathbf{D}^2,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{D}^3 \tag{6.9}$$

立刻得到正交异性张量函数完备和不可约表示的一个等价的广义形式．读者可能尤为感兴趣的是，这里 $\mathbf{D}$ 可代表一个塑性诱导或损伤诱导正交异性的塑性应变或连续损伤张量．

Boehler[36] 考虑过关于任意有限数目二阶对称张量 $\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_N$ 的标量值和二阶张量值函数在通常正交异性 $\mathscr{O}_3=\mathscr{D}_{2h}$ 下的表示，其中 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 置于相互等价的地位．在下面的（6.10）—（6.13）给出了 Boehler[36] 和表 18 中有关不变量和形式不变量的一个比较，其中相同的有

$$\mathrm{tr}\mathbf{N}_1\mathbf{A},\mathrm{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A},\mathrm{tr}\mathbf{N}_3\mathbf{A},\mathrm{tr}\mathbf{N}_1\mathbf{A}^2,\mathrm{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^2,\mathrm{tr}\mathbf{N}_3\mathbf{A}^2,\mathrm{tr}\mathbf{A}^3,\mathrm{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B},\mathrm{tr}\mathbf{A}\mathbf{B}^2,\mathrm{tr}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C} \tag{6.10}$$

$$\mathbf{N}_1,\ \mathbf{N}_2,\ \mathbf{N}_3,\ \mathbf{A}^2 \tag{6.11}$$

不同的有

Boehler[36]	Zheng 和 Boehler[192]（或见表18）	
$\mathrm{tr}\mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{B}$, $\mathrm{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A}\mathbf{B}$, $\mathrm{tr}\mathbf{N}_3\mathbf{A}\mathbf{B}$,	$\mathrm{tr}\mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{N}_2\mathbf{B}$, $\mathrm{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A}\mathbf{N}_3\mathbf{B}$, $\mathrm{tr}\mathbf{N}_3\mathbf{A}\mathbf{N}_1\mathbf{B}$	(6.12)
$\langle\mathbf{N}_1\mathbf{A}\rangle_s$, $\langle\mathbf{N}_2\mathbf{A}\rangle_s$, $\langle\mathbf{N}_3\mathbf{A}\rangle_s$,	$\langle\mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{N}_2\rangle_s$, $\langle\mathbf{N}_2\mathbf{A}\mathbf{N}_3\rangle_s$, $\langle\mathbf{N}_3\mathbf{A}\mathbf{N}_1\rangle_s$	(6.13)

在（6.12）和（6.13）中，尽管 Boehler 的表示形式比表 18 的更为简单，遗憾的是，$\mathrm{tr}\mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{B}$，$\mathrm{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A}\mathbf{B}$ 和 $\mathrm{tr}\mathbf{N}_3\mathbf{A}\mathbf{B}$ 三者中只有两个是不可约的，而 $\langle\mathbf{N}_1\mathbf{A}\rangle_s$，$\langle\mathbf{N}_2\mathbf{A}\rangle_s$，$\langle\mathbf{N}_3\mathbf{A}\rangle_s$ 中也只有两个是不可约的．

对于正交晶系中的晶体类，Smith 和 Rivlin[139] 及 Smith[129] 相继给出了关于 $\mathbf{v}_m$ 的整基，Smith 和 Rivlin[138] 给出了单个二阶对称张量的整基，Smith 等[140] 给出了关于单个二阶对称张量和单个矢量的以及 Smith 和 Kiral[135] 给出了关于 $\mathbf{A}_i$ 的整基结果．进一步的结果还可见 Kiral 和 Smith 的工作[75]．对在 $\mathscr{D}_{2h}$ 下关于 $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_N$ 的一般函数和多项式的表示，Boehler 在文 [36] 的表Ⅲ中作了比较．前者较后者有显著的简单性，这对于给出正交异性材料的力学行为模型具有重要意义．

关于正交异性张量函数表示定理在固体力学中的应用，读者可以参考 Spencer[148]，Boehler[32,33,35,37,38] 和 Betten[25] 的有关专题论著．

7 各向异性张量函数的进一步结果

本章综述了在三维空间三斜、单斜和立方晶系对称群下矢量和二阶张量的完备和不可约表示，以及在二维空间斜、矩形和三角晶系对称群下矢量、二阶和三阶张量的完备和不可约表示，

7.1 三维空间三斜系、单斜系和立方系晶类

如表 7 所示，在无限多种三维紧点群中，可由矢量、二阶张量和三阶置换张量 ε 表征的，一共只有 7 个极限群和前 8 个晶体点群，即

$$\mathscr{K}_h, \mathscr{K}; \ \mathscr{D}_{\infty h}, \mathscr{C}_{\infty v}, \mathscr{D}_{\infty}, \mathscr{C}_{\infty h}, \mathscr{C}_{\infty}; \ \mathscr{D}_{2h}, \mathscr{C}_{2v}, \mathscr{D}_2;$$

$$\mathscr{C}_{2h}, \mathscr{C}_{1h}, \mathscr{C}_2; \ \mathscr{C}_i, \mathscr{C}_1 \tag{7.1}$$

张量函数完备和不可约表示相应于（7.1）中前 10 个对称性的，已在第 2、5 和第 6 章给出，相应于（7.1）中后 5 个，即单斜系中的 3 个和三斜系中的 2 个对称性的，将在随后介绍。然而我们指出，对于在三维空间中无法用矢量、二阶张量和 ε 表征的其它各向异性，推导有关 $\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m$ 的张量函数一般完备和不可约表示的问题依然有待于解决。已解决的只是一些特殊的情形，如立方晶系晶体群下关于单个二阶对称张量之标量值和二阶对称张量值函数的完备和不可约表示。

Zheng 和 Boehler [191] 把单斜晶系中的晶体和在两个非正交且力学上非等价方向增强的纤维复合材料称为斜交各向同性材料。令 a 和 b 为与 k 垂直的两个非正交方向，如斜交各向同性类型的纤维增强复合材料的二个纤维方向。单斜晶系中对称群、它们的群生成元和结构张量可写成（见表 7）

$$\mathscr{M}_3 = \mathscr{C}_{2h} \qquad \mathbf{R}_k, -\mathbf{I} \qquad \mathbf{M}, \varepsilon\mathbf{k} \qquad (\text{或 } \mathbf{a}\otimes\mathbf{a},\ \mathbf{b}\otimes\mathbf{b}) \tag{7.2}$$

$$\mathscr{M}_1 = \mathscr{C}_{1h} \qquad \mathbf{R}_k \qquad \mathbf{i}, \mathbf{j} \qquad (\text{或 } \mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{7.3}$$

$$\mathscr{M}_2 = \mathscr{C}_2 \qquad -\mathbf{R}_k \qquad \mathbf{M}, \mathbf{k}, \varepsilon \qquad (\text{或 } \mathbf{a}\otimes\mathbf{a},\ \mathbf{b}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{k}) \tag{7.4}$$

其中 $\mathbf{M} = \mathbf{i}\otimes\mathbf{i} - \mathbf{j}\otimes\mathbf{j}$；相应于三斜系的，则为

$$\mathscr{C}_i \qquad -\mathbf{I} \qquad \varepsilon\mathbf{i},\ \varepsilon\mathbf{j},\ \varepsilon\mathbf{k} \tag{7.5}$$

$$\mathscr{C}_1 \qquad \mathbf{I} \qquad \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \tag{7.6}$$

关于 $\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m$ 斜交各向异性张量函数的完备和不可约表示已由 Zheng 和 Boehler [191] 得出，现归纳成表 19。另外我们还在表 20 中提供了与之等价的表示。

很容易得到在两个一般各向异性，即三斜系中的 $\mathscr{C}_i$ 和 $\mathscr{C}_1$ 下，关于 $\mathbf{A}_i \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_m$ 的张量函数完备和不可约表示，结果见表21。

Zheng 和 Betten [187] 用表 20 所列关于 $\mathscr{M}_1 = \mathscr{C}_{1h}$ 的表示结果，直接得出了某些类型的二维空间二阶和四阶张量的正交异性张量函数表示，见第 8 章。

文献中，我们看到了 Smith 和 Spencer [141] 的关于单个二阶对称张量 A 的斜交各向异性整基以及 Basista [11] 的关于 A 的斜交各向同性标量值和二阶对称张量值函数的表示。作为比较，下面重新写出 Basista 的结果

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{A}\mathbf{a},\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{A}\mathbf{b},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{A}\mathbf{b},\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{A}\mathbf{k},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{k},\ \mathrm{tr}\mathbf{A}^3 \tag{7.7}$$

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{a},\ \mathbf{b}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{k}\otimes\mathbf{k},\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}+\mathbf{b}\otimes\mathbf{a},\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{A}\mathbf{a}+\mathbf{A}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a},\ \mathbf{b}\otimes\mathbf{A}\mathbf{b}+\mathbf{A}\mathbf{b}\otimes\mathbf{b},\ \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A} \tag{7.8}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} - \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$，可以很容易证明（7.7）是不完备的，因而是不正确的。

表 19　关于 A_i, W_p, v_m 的斜交异性完备和不可约张量值函数表示

$(L = a\otimes a + b\otimes b,\ \Omega = a\otimes b - b\otimes a)$

变量	$\mathscr{M}_3(a\otimes a, b\otimes b)$	$\mathscr{M}_1(a,b)$	$\mathscr{M}_2(a\otimes a, b\otimes b, k)$
—		$a\cdot b$	
A		$\mathrm{tr}A, a\cdot Aa, b\cdot Ab, a\cdot Ab, \mathrm{tr}A^2, a\cdot A^2a, b\cdot A^2b$	
A,B		$\mathrm{tr}AB, a\cdot(AB-BA)b$	
W		$a\cdot Wb, \mathrm{tr}W^2, a\cdot W^2a, b\cdot W^2b$	
A,W		$\mathrm{tr}LAW,\ a\cdot(AW+WA)b$	
W,V		$\mathrm{tr}WV,\ a\cdot(WV-VW)b$	
v	$v\cdot v, (a\cdot v)^2,$ $(b\cdot v)^2, (a\cdot v)(b\cdot v)$	$v\cdot v, a\cdot v, b\cdot v$	$k\cdot v, (a\cdot v)^2,$ $(b\cdot v)^2, (a\cdot v)(b\cdot v)$
A,v	$v\cdot Av, v\cdot\Omega Av$	$a\cdot Av, b\cdot Av$	$k\cdot Av, v\cdot(k\times Ak)$
W,v	$v\cdot LWv, v\cdot\Omega Wv$	$a\cdot Wv, b\cdot Wv$	$k\cdot Wv, v\cdot(k\times Wk)$
v,u	$v\cdot u, v\cdot Lu, v\cdot\Omega u$	$v\cdot u$	$v\cdot Lu, v\cdot\Omega u$
A,v,u	$v\cdot Au, v\cdot(\Omega A+A\Omega)u$	—	—
W,v,u	$v\cdot Wu, v\cdot(\Omega W-W\Omega)u$	—	—
		二阶对称张量值	
—		$I, a\otimes a, b\otimes b, a\otimes b+b\otimes a$	
A		$A, A\Omega-\Omega A$	
W		$WL-LW,\ W\Omega+\Omega W$	
v	$v\otimes v,$ $v\otimes\Omega v+\Omega v\otimes v$	$v\otimes a+a\otimes v,$ $v\otimes b+b\otimes v$	$v\otimes k+k\otimes v,$ $\Omega[k\otimes v]_a+[k\otimes v]_a\Omega$
v,u	$v\otimes u+u\otimes v,$ $\Omega[v\otimes u]_a+[v\otimes u]_a\Omega$	$v\otimes u+u\otimes v,$ $\Omega[v\otimes u]_a+[v\otimes u]_a\Omega$	—
		二阶反对称张量值	
—		$\Omega(=a\otimes b-b\otimes a)$	
A		$AL-LA,\ A\Omega+\Omega A$	
W		$W,\ W\Omega-\Omega W$	
v	$v\otimes Lv-Lv\otimes v,$ $v\otimes\Omega v-\Omega v\otimes v$	$v\otimes a-a\otimes v,$ $v\otimes b-b\otimes v$	$v\otimes k-k\otimes v,$ $\Omega[k\otimes v]_a-[k\otimes v]_a\Omega$
v,u	$v\otimes u-u\otimes v,$ $\Omega[v\otimes u]_a-[v\otimes u]_a\Omega$	$v\otimes u-u\otimes v,$ $\Omega[v\otimes u]_a-[v\otimes u]_a\Omega$	—

变量	$\mathscr{M}_3(a\otimes a, b\otimes b)$	$\mathscr{M}_1(a,b)$	$\mathscr{M}_2(a\otimes a, b\otimes b, k)$
		矢 量 值	
—	—	a, b	k
A	—	Aa, Ab	Ak, $k\times Ak$
W	—	Wa, Wb	Wk, $k\times Wk$
v	v, Lv, Av	v	Lv, Ωv
A,v	Av, $(\Omega A+A\Omega)v$	—	—
W,v	Wv, $(\Omega W-W\Omega)v$	—	—

表 20 关于 A_i, W_p, v_m 另一种形式的斜交异性完备和不可约张量函数表示

变量	$\mathscr{M}_3(M, \varepsilon k)$	$\mathscr{M}_1(i,j)$	$\mathscr{M}_2(M,\varepsilon,k)$
A		$\mathrm{tr}A, \mathrm{tr}MA, \mathrm{tr}M^2A, k\cdot\varepsilon[MA], \mathrm{tr}A^2, \mathrm{tr}MA^2, k\cdot\varepsilon[MA^2]$	
A,B		$\mathrm{tr}AB, k\cdot\varepsilon[AB]$	
W		$k\cdot\varepsilon[W], \mathrm{tr}W^2, \mathrm{tr}MW^2, k\cdot\varepsilon[MW^2]$	
A,W		$\mathrm{tr}M^2AW, k\cdot\varepsilon[AW]$	
W,V		$\mathrm{tr}WV, k\cdot\varepsilon[WV]$	
v	$v\cdot v, v\cdot Mv, v\cdot M^2v,$ $[k,v,Mv]$	$v\cdot v, i\cdot v, j\cdot v$	$k\cdot v, v\cdot Mv, v\cdot M^2v,$ $[k,v,Mv]$
A,v	$v\cdot Av, [k,v,Av]$	$i\cdot Av, j\cdot Av$	$k\cdot Av, v\cdot(k\times Ak)$
W,v	$v\cdot M^2Wv, [k,v,Wv]$	$i\cdot Wv, j\cdot Wv$	$k\cdot Wv, v\cdot(k\times Wk)$
v,u	$v\cdot u, v\cdot M^2u, [k,v,u]$	$v\cdot u$	$v\cdot M^2u, [k,v,u]$
A,v,u	$v\cdot Au, k\cdot(v\times Au-u\times Av)$	—	—
W,v,u	$v\cdot Wu, k\cdot(v\times Wu-u\times Wv)$	—	—
		二阶对称张量值	
—		I, M, M^2, $M\varepsilon k$	
A		A, $A\varepsilon k-\varepsilon kA$	
W		M^2W-WM^2, $W\varepsilon k+\varepsilon kW$	
v	$v\otimes v, v\otimes(k\times v)+(k\times v)\otimes v$	$v\otimes i+i\otimes v, v\otimes j+j\otimes v$	$v\otimes k+k\otimes v,$ $[v\otimes k]_a\varepsilon k+\varepsilon k[v\otimes k]_a$
v,u	$v\otimes u+u\otimes v,$ $[v\otimes u]_a\varepsilon k+\varepsilon k[v\otimes u]_a$	$v\otimes u+u\otimes v,$ $[v\otimes u]_a\varepsilon k+\varepsilon k[v\otimes u]_a$	—

续表20

变量	$\mathscr{M}_3(M,\varepsilon k)$	$\mathscr{M}_1(i,j)$	$\mathscr{M}_2(M,\varepsilon,k)$
		二阶反对称张量值	
—		εk	
A		M^2A-AM^2, $A\varepsilon k+\varepsilon kA$	
W		W, $W\varepsilon k-\varepsilon kW$	
v	$v\otimes M^2v-M^2v\otimes v$, $v\otimes(k\times v)-(k\times v)\otimes v$	$v\otimes i-i\otimes v, v\otimes j-j\otimes v$	$v\otimes k-k\otimes v$, $[v\otimes k]_a\varepsilon k-\varepsilon k[v\otimes k]_a$
v,u	$v\otimes u-u\otimes v$, $[v\otimes u]_a\varepsilon k-\varepsilon k[v\otimes u]_a$	$v\otimes u-u\otimes v$, $[v\otimes u]_a\varepsilon k-\varepsilon k[v\otimes u]_a$	—
		矢　量　值	
—	—	i, j	k
A	—	Ai, Aj	Ak, $k\times Ak$
W	—	Wi, Wj	Wk, $k\times Wk$
v	v, M^2v, $k\times v$	v	M^2v, $k\times v$
A,v	Av ,$(A\varepsilon k+\varepsilon kA)v$	—	—
W,v	Wv, $(W\varepsilon k-\varepsilon kW)v$	—	—

表 21　关于 A_{ij}, W_p, v_m 的一般各向异性完备和不可约张量值函数表示

变量	$\mathscr{C}_i(\varepsilon i,\varepsilon j,\varepsilon k)$	$\mathscr{C}_1(i,j,k)$
	标　量　值	
A	$i\cdot Ai, j\cdot Aj, k\cdot Ak, i\cdot Aj, j\cdot Ak, k\cdot Ai$	
W	$i\cdot Wj, j\cdot Wk, k\cdot Wi$	
v	$(i\cdot v)^2,(j\cdot v)^2,(k\cdot v)^2,(i\cdot v)(j\cdot v),(j\cdot v)(k\cdot v),(k\cdot v)(i\cdot v)$	$i\cdot v, j\cdot v, k\cdot v$
v,u	$v\cdot u,[i,v,u],[j,v,u],[k,v,u]$	—
	二阶对称张量值	
—	$i\otimes i, j\otimes j, k\otimes k$, $i\otimes j+j\otimes i, j\otimes k+k\otimes j, k\otimes i+i\otimes k$	
	二阶反对称张量值	
—	$i\otimes j-j\otimes i, j\otimes k-k\otimes j, k\otimes i-i\otimes k$	
	矢　量　值	
—	—	i,j,k
v	$v, i\times v, j\times v, k\times v$	—

绝大多数金属都是立方或六方晶体．尽管它们一般以晶粒的聚合体形态即多晶体存在，而且一般被视作各向同性材料．然而具有明显各向异性的单晶立方晶体，由于它具有完美无瑕的物理特性，在现代材料科学和工程中正引起越来越多的重视．

存在5种立方晶类，它们的生成元和结构张量可以写成（见表7）

$$\mathscr{O}_h \quad \mathbf{R}(2\pi/3\mathbf{c}),\ \mathbf{R}(\pi/2\mathbf{i}),\ \mathbf{R}_j,\ -\mathbf{I} \quad \mathbf{O}_h \tag{7.9}$$

$$\mathscr{T}_d \quad \mathbf{R}(2\pi/3\mathbf{c}),\ -\mathbf{R}(\pi/2\mathbf{i}),\ -\mathbf{R}_j \quad \mathbf{T}_d \tag{7.10}$$

$$\mathscr{O} \quad \mathbf{R}(2\pi/3\mathbf{c}),\ \mathbf{R}(\pi/2\mathbf{i}),\ -\mathbf{R}_j \quad \mathbf{O}_h, \boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.11}$$

$$\mathscr{T}_h \quad \mathbf{R}(2\pi/3\mathbf{c}),\ \mathbf{R}_j,\ -\mathbf{I} \quad \mathbf{T}_h \tag{7.12}$$

$$\mathscr{T} \quad \mathbf{R}(2\pi/3\mathbf{c}),\ -\mathbf{R}_j \quad \mathbf{T}_h, \boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.13}$$

矢量 $\mathbf{c}$ 和张量 $\mathbf{O}_h, \mathbf{T}_h$ 及 $\mathbf{T}_d$ 已在（3.1）和（3.6）—（3.9）中作了说明．另外，需要定义六阶完全对称的张量

$$\mathbf{S} = \mathbf{O}_h \cdot \mathbf{O}_h = \mathbf{i}^6 + \mathbf{j}^6 + \mathbf{k}^6 \tag{7.14}$$

Smith[127] 和 Bao[10] 分别对在 $\mathscr{T}_h$ 和 $\mathscr{O}_h$ 下关于单个二阶对称张量 $\mathbf{A}$ 和 N 个二阶对称张量 $\mathbf{A}_i$ 的函数基作了研究；且 Bao 和 Smith[9] 得到了 $\mathbf{A}$ 在 $\mathscr{T}_h$ 下的一个不可约函数基．最近，作者和 Betten 教授建立了 $\mathbf{A}$ 在 $\mathscr{T}_h$ 和 $\mathscr{O}_h$ 下的完备和不可约表示．这些表示包含不变量

$$\mathscr{O}_h: \quad I_1, I_2, \ldots, I_8 \tag{7.15}$$

$$\mathscr{T}_h: \quad I_1, I_2, \ldots, I_7, I_9, I_{10} \tag{7.16}$$

和形式不变量

$$\mathscr{O}_h: \quad \mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{O}_A, \mathbf{O}_A{}^2, \mathbf{S}_A, \mathbf{S}_A{}^2, \mathbf{A}\mathbf{O}_A + \mathbf{O}_A\mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{O}_A{}^2 + \mathbf{O}_A{}^2\mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_A\mathbf{A} \tag{7.17}$$

$$\mathscr{T}_h: \quad \mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{T}_A, \mathbf{T}_A{}^2, \mathbf{O}_A, \mathbf{O}_A{}^2, \mathbf{A}\mathbf{T}_A + \mathbf{T}_A\mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{T}_A{}^2 + \mathbf{T}_A{}^2\mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{O}_A + \mathbf{O}_A\mathbf{A} \tag{7.18}$$

这里我们采用了缩写

$$\mathbf{O}_A = \mathbf{O}_h : \mathbf{A} = (O^{(h)}_{ijkl} A_{kl}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{7.19}$$

$$\mathbf{T}_A = \mathbf{T}_h : \mathbf{A} = (T^{(h)}_{ijkl} A_{kl}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{7.20}$$

$$\mathbf{S}_A = \mathbf{A} : \mathbf{S} : \mathbf{A} = (S_{ijklmn} A_{kl} A_{mn}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{7.21}$$

和

$$I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}, \quad I_2 = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2, \quad I_3 = \operatorname{tr} \mathbf{A}^3 \tag{7.22}$$

$$I_4 = \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{O}_A, \quad I_5 = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\mathbf{O}_A, \quad I_6 = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\mathbf{O}_A{}^2, \quad I_7 = \operatorname{tr} \mathbf{A}\mathbf{S}_A \tag{7.23}$$

$$I_8 = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\mathbf{S}_A, \quad I_9 = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\mathbf{T}_A, \quad I_{10} = \operatorname{tr} \mathbf{T}_A{}^2\mathbf{S}_A{}^2 \tag{7.24}$$

我们注意到（7.16）中 $\mathscr{T}_h$ 下的函数基要比 Bao 和 Smith[9] 的式（22）所给出的结果在形式上要简单一些．

7.2 二维空间斜、矩形和三角晶系

从表 6 可见，在二维空间无限多种物理上可能的材料对称性中，只存在 8 种对称性可用阶数不高于 3 的张量来表征．它们是圆系中的各向同性 $\mathscr{C}_{\infty v}$ 和半向同性 $\mathscr{C}_{\infty}$，斜晶系中的两个对称性 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$，矩形系中的 $\mathscr{C}_{1v}$ 和 $\mathscr{C}_{2v}$（$\mathscr{C}_{2v}$ 为正交异性），以及三角晶系中的 $\mathscr{C}_3$ 和 $\mathscr{C}_{3v}$．

笔者得到了在这 8 个群下关于任意有限数目二阶对称张量 $\mathbf{A}_i$、二阶反对称张量 $\mathbf{W}_p$、矢量 $\mathbf{v}_m$ 和不可约三阶张量 $\mathbf{T}_a$ 的标量值、二阶和三阶张量值函数的完备和不可约表示，其结果已经在表 4 和 5 中给出．有关详细的推导过程将另文发表．在这些表示中的三阶不可约张量 $\mathbf{P}$，指的是按（3.12）定义的结构张量 $\mathbf{P}_3$，即

$$\mathbf{P}=\mathrm{Re}(\mathbf{i}+i\,\mathbf{j})^3=\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}-(\mathbf{i}\otimes\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}+\mathbf{j}\otimes\mathbf{i}\otimes\mathbf{j}+\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}\otimes\mathbf{i}) \tag{7.25}$$

7.3 几点进一步注记

相应的32个晶类的整基，已相继由 Smith 和 Rivlin [138] 给出了单个二阶对称张量的，Smith 等 [140] 给出了单个二阶对称张量和单个矢量的，Smith 和 Rivlin [139] 及Smith [129] 给出了 $\mathbf{v}_m$ 的，以及 Smith 和 Kiral [135] 给出了 $\mathbf{A}_i$ 的有关结果．进一步的一些结果可见 Kiral 和 Smith 的论文[75]．

与 Zheng [184] 确定关于二维空间全部种类各向异性张量函数的完备和不可约表示（见第 4 章）的过程相似，确定三维空间全部多方系对称性的张量函数完备和不可约表示的过程应该不难，且可统一进行，不过其工作量可能是很大的．在这样一个确定过程中，基本结构张量 $\mathbf{P}_n$ 的简洁性将带来很大便利．

在构造与立方和二十面晶系的对称性有关的张量函数表示时，如果使用结构张量 $\mathbf{T}_h$，$\mathbf{O}_h$ 和 $\mathbf{I}_h$ 的不可约（即完全对称和迹数为零的）部分来取代其自身，可能是有益的．关于将任意阶张量简化成不可约张量之和的一个基本方法，参见 Spencer [145,148] 和 Hannabuss [70]．

8 二阶和四阶张量的张量函数

得到包含四阶张量的张量函数完备和不可约表示的重要性，可见于现代连续介质力学和物理中的许多方面，如用四阶损伤张量度量材料内部损伤状态 [50,51,17,25,77,78] 的连续介质力学．有关上述课题的某些一般性结果已在最近得到，将叙述如下．

8.1 四阶张量的符号，术语和分解

记 $\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{W}},\alpha$ 和 ω 为四阶张量．根据下标对称性，我们采用术语

双重对称 $$\bar{A}_{ijkl}=\bar{A}_{jikl}=\bar{A}_{ijlk}=\bar{A}_{klij} \tag{8.1}$$

反正对称 $$\bar{W}_{ijkl}=\bar{W}_{jikl}=\bar{W}_{ijlk}=-\bar{W}_{klij} \tag{8.2}$$

正反对称 $$\alpha_{ijkl}=-\alpha_{jikl}=-\alpha_{ijlk}=\alpha_{klij} \tag{8.3}$$

双重反对称 $$\omega_{ijkl}=-\omega_{jikl}=-\omega_{ijlk}=-\omega_{klij} \tag{8.4}$$

线弹性张量为一个四阶双重对称（或 Voigt 对称）张量，而 Riemann 几何中的 Riemann-Christoffel 张量是一个四阶正反对称张量．张量 $\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{W}},\alpha$ 和 ω 的非零独立分量的数目在三

维空间中分别为 21,15,6 和 3，而在二维空间中分别为 6,3,1,0.

用 ***Sym*** 和 ***Anti*** 分别表示全部二阶对称和反对称张量的集合，它们都可看作是二阶张量空间的子空间. 在二维和三维空间中，***Sym*** 的维数分别为 6 和 3，而 ***Anti*** 的维数分别为 3 和 1. 我们可将二阶对称和反对称张量分别称为 ***Sym*** 和 ***Anti*** 中的'矢量'. 这样一来，四阶双重对称张量 $\bar{\mathbf{A}}$ 和反-正对称张量 $\overline{\mathbf{W}}$ 就又成为 ***Sym*** 中的二阶对称和反对称'张量'. 四阶正-反对称张量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和双重反对称张量 $\boldsymbol{\omega}$ 则分别为 ***Anti*** 中二阶对称和反对称'张量'. 特别地，***Sym*** 和 ***Anti*** 中的二阶单位'张量'分别为

$$\bar{\mathbf{I}}=\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i)/2 \quad 或 \quad \bar{I}_{ijkl}=(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})/2 \tag{8.5}$$

和

$$\boldsymbol{\delta}=\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i)/2 \quad 或 \quad \delta_{ijkl}=(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})/2 \tag{8.6}$$

一般地说，任意四阶张量 $\bar{\mathbf{K}}$ 可以分解成和式

$$\bar{\mathbf{K}}=\bar{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{W}}+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\omega}+\bar{\mathbf{K}}^{\pm}+\bar{\mathbf{K}}^{\mp} \tag{8.7}$$

其中 $\bar{\mathbf{K}}^{\pm}$ 和 $\bar{\mathbf{K}}$ 具有如下的下标对称性：

$$\bar{K}^{\pm}_{ijkl}=\bar{K}^{\pm}_{jikl}=-\bar{K}^{\pm}_{ijlk}, \qquad \bar{K}_{ijkl}=-\bar{K}^{\mp}_{jikl}=\bar{K}^{\mp}_{ijlk} \tag{8.8}$$

从而 $\bar{\mathbf{K}}^{\pm}$ 和 $\bar{\mathbf{K}}^{\mp}$ 在三维中的非零独立分量数是 18，在二维中是 3.

令 $\bar{\mathbf{K}}$ 和 $\bar{\mathbf{L}}$ 为任意四阶对称张量，$\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{t}$ 为任意二阶张量. 在本章中我们采用符号

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{L}}=\bar{\mathbf{K}}:\bar{\mathbf{L}}=(\bar{K}_{ijmn}\bar{L}_{mnkl})\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l \tag{8.9}$$

$$\bar{\mathbf{K}}^2=\bar{\mathbf{K}}\,\bar{\mathbf{K}},\dots,\bar{\mathbf{K}}^n=\bar{\mathbf{K}}\,\bar{\mathbf{K}}^{n-1} \tag{8.10}$$

$$\mathrm{Tr}\bar{\mathbf{K}}=\bar{K}_{klkl} \tag{8.11}$$

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{s}=\bar{\mathbf{K}}:\mathbf{s}=(\bar{K}_{ijkl}s_{kl})\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{8.12}$$

$$\mathbf{s}:\mathbf{t}=s_{kl}t_{kl} \tag{8.13}$$

单个四阶双重对称张量 $\bar{\mathbf{A}}$ 和单个二阶对称张量 $\mathbf{A}$ 的各向同性不可约不变量的集合由 Betten[16,20-22]，Betten 和 Helisch[26] 及 Helisch[71] 作了研究. 但在他们或其他人的工作中还未见到单个双重对称四阶张量 $\bar{\mathbf{A}}$ 的整基或函数基的明确结果.

最近，各向同性和正交异性标量值、矢量值、二阶和四阶张量值函数的完备和不可约表示由 Zheng[185] 及 Zheng 和 Betten[187] 进行了研究，其结果涉及四阶双重对称张量 $\bar{\mathbf{A}}_1,\dots,\bar{\mathbf{A}}_B$（记作 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha$）、反-正对称张量 $\overline{\mathbf{W}}_1,\dots,\overline{\mathbf{W}}_C$（记作 $\overline{\mathbf{W}}_\rho$）、正-反对称张量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_D$（记作 $\boldsymbol{\alpha}_\xi$）、双重反对称张量 $\boldsymbol{\omega}_1,\dots,\boldsymbol{\omega}_E$（记作 $\boldsymbol{\omega}_\delta$）、二阶对称张量 $\mathbf{A}_i$ 和二阶反对称张量 $\mathbf{W}_p$. 我们在本章的下面各节中概括了其主要结果.

8.2 二维空间 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_p,\mathbf{A}_i$ 的各向同性张量函数

考虑二维物理空间中 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho$ 和 $\mathbf{A}_i$ 的各向同性标量值、二阶对称、四阶双重对称和四阶反-正对称张量值函数. 由于 ***Sym*** 的维数为 3，Zheng 和 Betten[187] 表明这些各向同性函数可以看作是在三维空间 ***Sym*** 中的二阶'张量' $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho$ 和'矢量' $\mathbf{A}_i$ 的一个各向异

表 22　二维空间关于 $\bar{A}_\alpha,\overline{W}_\rho,A_i$ 的各向同性完备和不可约张量函数表示

变量	不变量	变量	不变量
$\bar{A}$	$\mathrm{Tr}\bar{A},\mathrm{Tr}\bar{A}^2,\mathrm{Tr}\bar{A}^3,I:\bar{A}I,I:\bar{A}^2I$	A	$\mathrm{tr}A,\mathrm{tr}A^2$
$\bar{A},\bar{B}$	$\mathrm{Tr}\bar{A}\bar{B},\mathrm{Tr}\bar{A}^2\bar{B},\mathrm{Tr}\bar{A}\bar{B}^2,I:\bar{A}\bar{B}I$	$\bar{A},A$	$I:\bar{A}A,I:\bar{A}^2A,A:\bar{A}A$
$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$	$\mathrm{Tr}\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A},\bar{B},A$	$I:(\bar{A}\bar{B}-\bar{B}\bar{A})A$
$\overline{W}$	$\mathrm{Tr}\overline{W}^2,I:\overline{W}I$	$\overline{W},A$	$I:\overline{W}A,I:\overline{W}^2A$
$\bar{A},\overline{W}$	$\mathrm{Tr}\bar{A}\overline{W}^2,\mathrm{Tr}\bar{A}^2\overline{W}^2,\mathrm{Tr}\bar{A}^2\overline{W}^2\bar{A}\overline{W}$, $I:\bar{A}\overline{W}I,I:\bar{A}^2\overline{W}I,I:\overline{W}\bar{A}\overline{W}^2I$	$\bar{A},\overline{W},A$ $\overline{W},\overline{V},A$	$I:(\bar{A}\overline{W}+\overline{W}\bar{A})A,A:\bar{A}\overline{W}A$ $I:(\overline{W}\overline{V}-\overline{V}\overline{W})A$
$\bar{A},\bar{B},\overline{W}$	$\mathrm{Tr}\bar{A}\bar{B}\overline{W},\mathrm{Tr}\bar{A}^2\bar{B}\overline{W},\mathrm{Tr}\bar{A}\bar{B}^2\overline{W}$, $\mathrm{Tr}\bar{A}\overline{W}^2\bar{B}\overline{W}$		
$\overline{W},\overline{V}$	$\mathrm{Tr}\overline{W}\overline{V}$, $I:\overline{W}\overline{V}I$, $I:\overline{W}^2\overline{V}I$, $I:\overline{W}\overline{V}^2I$	A,B	$\mathrm{tr}\,AB$
$\bar{A},\overline{W},\overline{V}$	$\mathrm{Tr}\bar{A}\overline{W}\overline{V},\mathrm{Tr}\bar{A}\overline{W}^2\overline{V},\mathrm{Tr}\bar{A}\overline{W}\overline{V}^2$	$\bar{A},A,B$	$A:\bar{A}B$
$\overline{W},\overline{V},\overline{U}$	$\mathrm{Tr}\overline{W}\overline{U}\overline{V}$	$\overline{W},A,B$	$A:\overline{W}B$

变量	二阶对称张量值	变量	二阶对称张量值
—	I	A	A
$\bar{A}$	$\bar{A}I$, $\bar{A}^2I$	$\bar{A},A$	$\bar{A},A$
$\bar{A},\bar{B}$	$(\bar{A}\bar{B}-\bar{B}\bar{A})I$	$\overline{W},A$	$\overline{W},A$
$\overline{W}$	$\overline{W}I,\overline{W}^2I$		
$\bar{A},\overline{W}$	$(\bar{A}\overline{W}+\overline{W}\bar{A})I$		
$\overline{W},\overline{V}$	$(\overline{W}\overline{V}-\overline{V}\overline{W})I$		

变量	四阶双重对称张量值	变量	四阶反-正对称张量值
—	$I,I\otimes I$	$\bar{A}$	$I\otimes\bar{A}I-\bar{A}I\otimes I,I\otimes\bar{A}^2I-\bar{A}^2I\otimes I$, $\bar{A}I\otimes\bar{A}^2I-\bar{A}^2I\otimes\bar{A}I$
$\bar{A}$	$\bar{A},\bar{A}^2,I\otimes\bar{A}I+\bar{A}I\otimes I$, $I\otimes\bar{A}^2I+\bar{A}^2I\otimes I$	$\bar{A},\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}-\bar{B}\bar{A},\bar{A}^2\bar{B}-\bar{B}\bar{A}^2,\bar{A}\bar{B}^2-\bar{B}^2\bar{A}$, $\bar{A}I\otimes\bar{B}I-\bar{B}I\otimes\bar{A}I+I\otimes(\bar{A}\bar{B}-\bar{B}\bar{A})I$ $-(\bar{A}\bar{B}-\bar{B}\bar{A})I\otimes I$
$\bar{A},\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{A}$		
$\overline{W}$	$I\otimes\overline{W}I+\overline{W}I\otimes I,\overline{W}I\otimes\overline{W}I$, $\overline{W}^2,\overline{W}I\otimes\overline{W}^2I+\overline{W}^2I\otimes\overline{W}I$	$\overline{W}$	$\overline{W},I\otimes\overline{W}I-\overline{W}I\otimes I$, $I\otimes\overline{W}^2I-\overline{W}^2I\otimes I$
$\bar{A},\overline{W}$	$\bar{A}\overline{W}-\overline{W}\bar{A},\overline{W}\bar{A}\overline{W}^2-\overline{W}^2\bar{A}\overline{W}$, $\bar{A}^2\overline{W}-\overline{W}\bar{A}^2$	$\bar{A},\overline{W}$	$\bar{A}\overline{W}+\overline{W}\bar{A},\bar{A}\overline{W}^2-\overline{W}^2\bar{A}$
$\overline{W},\overline{V}$	$\overline{W}\overline{V}+\overline{V}\overline{W},\overline{W}^2\overline{V}-\overline{V}\overline{W}^2,\overline{W}\overline{V}^2-\overline{V}^2\overline{W}$	$\overline{W},\overline{V}$	$\overline{W}\overline{V}-\overline{V}\overline{W}$
A	$A\otimes A,I\otimes A+A\otimes I$	A	$I\otimes A-A\otimes I$
$\bar{A},A$	$\bar{A}(I\otimes A-A\otimes I)-(I\otimes A-A\otimes I)\bar{A}$	$\bar{A},A$	$\bar{A}(I\otimes A-A\otimes I)+(I\otimes A-A\otimes I)\bar{A}$, $A\otimes\bar{A}A-\bar{A}A\otimes A$
$\overline{W},A$	$\overline{W}(I\otimes A-A\otimes I)+(I\otimes A-A\otimes I)\overline{W}$, $A\otimes\overline{W}+\overline{W}A\otimes A$	$\overline{W},A$	$\overline{W}(I\otimes A-A\otimes I)-(I\otimes A-A\otimes I)\overline{W}$
A,B	$A\otimes B+B\otimes A$	A,B	$A\otimes B-B\otimes A$

性函数，具有按二阶单位张量 $\mathbf{I}$ 表征的各向异性。由于 $\mathbf{I}$ 是 Sym 中的一个非零'矢量'，故这种各向异性在 Sym 中即为横观各向同性 $\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$。这样一来，Zheng 和 Betten[187] 利用在 $\mathscr{T}_2=\mathscr{C}_{\infty v}$ 下横观各向同性张量函数的完备和不可约表示（见表 12 和 13 中），立刻就导出了 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho,\mathbf{A}_i$ 的各向同性张量函数之完备和不可约表示。结果概括在表 22 中。

在得到上述一般性成果之前，关于二维空间单个四阶双重对称张量 $\bar{\mathbf{A}}$ 的各向同性不可约函数基的一个特殊的结果，首先由 Zheng[190] 得到。该函数基中包括 5 个不变量，即

$$I_1=\mathrm{Tr}\bar{\mathbf{A}},\ I_2=\mathrm{Tr}\bar{\mathbf{A}}^2,\ I_3=\mathrm{Tr}\bar{\mathbf{A}}^3,\ L_1=\mathbf{I}:\bar{\mathbf{A}}\mathbf{I},\ L_2=\mathbf{I}:\bar{\mathbf{A}}^2\mathbf{I} \tag{8.14}$$

或

$$\begin{aligned}&I_1=A_{ijij},\ I_2=A_{ijkl}A_{klij},\ I_3=A_{ijkl}A_{klmn}A_{mnij},\\&L_1=A_{iijj},\ L_2=A_{iikl}A_{kljj}\end{aligned} \tag{8.15}$$

Betten[21] 曾经提出实际上与（8.14）或（8.15）等价的关于 $\bar{\mathbf{A}}$ 的各向同性不变量 J_1,J_2,J_3,K_1 和 K_2 组成的集合，来自于所谓的扩展特征多项式，即

$$P(\lambda,\mu)=\mathrm{Det}(\lambda\bar{\mathbf{I}}+\mu\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})=\lambda^3-J_1\lambda^2+J_2\lambda-J_3+2\mu(\lambda^2-K_1\lambda+K_2) \tag{8.16}$$

这里前缀"Det"定义为当一个四阶张量考虑成为 Sym 中的一个二阶张量时的行列式。当 $\mu=0$ 时，$P(\lambda,0)$ 退化成通常的特征多项式。Betten 和 Helisch[26] 及 Helisch[71] 肯定了各向同性不变量 J_1,J_2,J_3,K_1 和 K_2 的不可约性，假设但没能证明这些各向同性不变量构成整基或函数基所必须具备的完备性，Zheng[195] 给出了以上 $\bar{\mathbf{A}}$ 的两组不变量之间的关系

$$J_1=I_1,\quad 2J_2=J_1I_1-I_2,\quad 3J_3=J_2I_1-J_1I_2+I_3 \tag{8.17}$$

$$2K_1=2J_1-L_1,\quad 2K_2=2J_2-J_1L_1+L_2 \tag{8.18}$$

作为一个例子，从表 12 中我们看到，二维空间单个二阶对称张量 $\mathbf{A}$ 的具有下标对称性 $F_{ijkl}=F_{jikl}=F_{ijlk}$ 的任意各向同性四阶张量值函数 $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ 可以表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{A})=\varphi_1\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+\varphi_2\bar{\mathbf{I}}+\varphi_3\mathbf{I}\mathbf{A}+\varphi_4\mathbf{A}\otimes\mathbf{I}+\varphi_5\mathbf{A}\otimes\mathbf{A} \tag{8.19}$$

其中系数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_5$ 为 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$ 的单值函数。上述表示定理（8.19）在连续介质损伤力学中是有用的[50,51,17,25,77,78]。当 $\mathbf{A}=\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$，$\mathbf{n}$ 为单位矢量以及 $F_{ijkl}=F_{klij}$ 时，Kunin[81,82] 得到过（8.19），但未见其考虑完备性和不可约性。

8.3 二维空间 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho,\mathbf{A}_i$ 的正交异性张量函数

由于二维空间正交异性可用

$$\mathbf{N}_1=\mathbf{i}\otimes\mathbf{i},\quad \mathbf{N}_2=\mathbf{j}\otimes\mathbf{j} \tag{8.20}$$

表征，根据第 3 章中的各向同性化定理，我们可用建立 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho,\mathbf{A}_i,\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2$ 的各向同性张量函数完备和不可约表示，来替代建立 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho,\mathbf{A}_i$ 的正交各向同性张量函数的表示。注意到在 Sym 中的结构'矢量' $\mathbf{I}$ 可以分解成 $\mathbf{I}=\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_2$，我们可以进一步将二维空间中关于 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho,\mathbf{A}_i$ 的正交各向同性标量值、二阶张量值和四阶双重对称、四阶反-正对称张量值函

数看作为由‘矢量’N_1和N_2表征的三维空间 Sym 斜交对称性 $\mathscr{M}_1=\mathscr{C}_{1h}$ 下二阶‘张量’$\bar{A}_\alpha$，$\overline{W}_\rho$和‘矢量’A_i的标量值、‘矢量’值、二阶对称和反对称‘张量’值函数。Zheng 和 Betten[187] 利用这一特性，随即导出了 $\bar{A}_\alpha$，$\overline{W}_\rho$，A_i的完备和不可约正交异性张量函数表示，概括在表 23 中（请与表 20 比较）。

表 23 二维空间关于 $\bar{A}_\alpha$，$\overline{W}_\rho$，A_i 的正交异性完备和不可约张量函数表示（$\bar{S}=N_1\otimes N_1+N_1\otimes N_1$，$\bar{Q}=N_1\otimes N_2-N_2\otimes N_1$）1)

变量	不变量	变量	不变量
$\bar{A}$	$\mathrm{Tr}\bar{A}, N_1:\bar{A}N_1, N_2:\bar{A}N_2, N_1:\bar{A}N_2,$ $N_1:\bar{A}^2N_1, N_2:\bar{A}^2N_2, N_1:\bar{A}^2N_2$	A	$\mathrm{tr}N_1A$，$\mathrm{tr}N_2A$，$\mathrm{tr}A^2$
		$\bar{A}, A$	$N_1:\bar{A}A$，$N_2:\bar{A}A$
$\bar{A}, \bar{B}$	$\mathrm{Tr}\bar{A}\bar{B}, N_1:(\bar{A}\bar{B}-\bar{B}\bar{A})N_2$	$\overline{W}, A$	$N_1:\overline{W}A, N_2:\overline{W}A$
$\overline{W}$	$N_1:\overline{W}N_2, N_1:\overline{W}^2N_1, N_2:\overline{W}^2N_2,$ $N_1:\overline{W}^2N_2$	A, B	$\mathrm{tr}AB$
$\bar{A}, \overline{W}$	$\mathrm{Tr}\bar{S}\bar{A}\overline{W}, N_1:(\bar{A}\overline{W}+\overline{W}\bar{A})N_2$		
$\overline{W}, \bar{V}$	$\mathrm{Tr}\overline{W}\bar{V}, N_1:(\overline{W}\bar{V}-\bar{V}\overline{W})N_2$		
	二阶对称张量值		二阶对称张量值
—	N_1，N_2	$\overline{W}$	$\overline{W}N_1$，$\overline{W}N_2$
$\bar{A}$	$\bar{A}N_1$，$\bar{A}N_2$	A	A
	四阶双重对称张量值		四阶反-正对称张量值
—	$N_1\otimes N_1, N_2\otimes N_2, N_1\otimes N_2+N_2\otimes N_1$	—	$\bar{Q}(=N_1\otimes N_2-N_2\otimes N_1)$
$\bar{A}$	$\bar{A}, \bar{A}\bar{Q}-\bar{Q}\bar{A}$	$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{S}-\bar{S}\bar{A}$，$\bar{A}\bar{Q}+\bar{Q}\bar{A}$
$\overline{W}$	$\overline{W}\bar{Q}+\bar{Q}\overline{W}, \overline{W}\bar{S}-\bar{S}\overline{W}$	$\overline{W}$	$\overline{W}, \overline{W}\bar{Q}-\bar{Q}\overline{W}$
A	$N_1\otimes A+A\otimes N_1, N_2\otimes A+A\otimes N_2$	A	$N_1\otimes A-A\otimes N_1, N_2\otimes A-A\otimes N_2$

1) 用 $\mathrm{Tr}\bar{S}\bar{A}\overline{W}$，$\overline{W}\bar{S}-\bar{S}\overline{W}$ 和 $\bar{A}\bar{S}-\bar{S}\bar{A}$ 分别代替文[187]中的$N_1:\bar{A}\overline{W}N_1, N_2:\bar{A}\overline{W}N_2$；$N_1\otimes\overline{W}N_1-\overline{W}N_1\otimes N_1, N_2\otimes\overline{W}N_2-\overline{W}N_2\otimes N_2$ 和 $N_1\otimes\bar{A}N_1-\bar{A}N_1\otimes N_1$，$N_2\otimes\bar{A}N_2-\bar{A}N_2\otimes N_2$

8.4 二维和三维空间 $\alpha_\xi, \omega_\delta, W_p$ 的各向同性张量函数

在二维物理空间中，四阶双重反对称张量只能是零张量，所以我们不需要考虑 ω_δ。记 ε 为二维空间的置换张量。Zheng 和 Betten[187] 证明了不变量和形式不变量

$$\mathrm{tr}W_p^2,\ \mathrm{tr}W_pW_q,\ \varepsilon:\alpha_\alpha^T\varepsilon,\ (p,q=1,\cdots,M,\ \text{其中}\ p<q;\alpha=1,\cdots,D) \tag{8.21}$$

$$W_p,\quad (p=1,\cdots,M) \tag{8.22}$$

$$\varepsilon\otimes\varepsilon \tag{8.23}$$

表 24　三维空间关于 $\alpha_\xi,\omega_\delta,W_P$ 的各向同性完备和不可约张量函数表示

变量	不变量	变量	不变量
α	$Tr\alpha, Tr\alpha^2, Tr\alpha^3$	W	trW^2
α,β	$Tr\alpha\beta, Tr\alpha^2\beta, Tr\alpha\beta^2$,	α, W	$W:\alpha W, W:\alpha^2 W, [W, \alpha W, \alpha^2 W]$
	$Tr\alpha^2\beta^2$	α,β,W	$W:\underline{\varepsilon}[\alpha\beta], W:\underline{\varepsilon}[\alpha^2\beta], W:\underline{\varepsilon}[\alpha\beta^2]$,
α,β,χ	$Tr\alpha\beta\chi$		$[W, \alpha W, \beta W]$
ω	$Tr\omega^2$	ω, W	$W:\underline{\varepsilon}[\omega]$
α,ω	$Tr\alpha\omega^2, Tr\alpha^2\omega^2, Tr\alpha^2\omega^2\alpha\omega$	α,ω,W	$W:\alpha\omega W, W:\underline{\varepsilon}[\alpha\omega], W:\underline{\varepsilon}[\alpha\omega^2]$
α,β,ω	$Tr\alpha\beta\omega, Tr\alpha^2\beta\omega, Tr\alpha\beta^2\omega$,	ω,θ,W	$W:\underline{\varepsilon}[\omega\theta]$
	$Tr\alpha\omega^2\beta\omega$	W, V	$trWV$
ω,θ	$Tr\omega\theta$	α, W, V	$W:\alpha V, [W, V, \alpha W], [W, V, \alpha V]$
α,ω,θ	$Tr\alpha\omega\theta, Tr\alpha\omega^2\theta, Tr\alpha\omega\theta^2$	ω, W, V	$W:\omega V$
ω,θ,φ	$Tr\omega\theta\varphi$	W, V, U	$[W, V, U]$
	四阶正-反对称张量值		四阶正-反对称张量值
—	δ	W	$W\otimes W$
α	α, α^2	α, W	$W\otimes\alpha W+\alpha W\otimes W, \alpha(\underline{\varepsilon}W)-(\underline{\varepsilon}W)\alpha$,
α,β	$\alpha\beta+\beta\alpha, \alpha^2\beta+\beta\alpha^2$,		$\alpha^2(\underline{\varepsilon}W)-(\underline{\varepsilon}W)\alpha^2$,
	$\alpha\beta^2+\beta^2\alpha$		$W\otimes(W\times\alpha W)+(W\times\alpha W)\otimes W$
ω	ω^2	ω, W	$W\otimes\omega W+\omega W\otimes W, \omega(\underline{\varepsilon}W)+(\underline{\varepsilon}W)\omega$,
α,ω	$\alpha\omega-\omega\alpha, \alpha^2\omega-\omega\alpha^2$,		$\omega^2(\underline{\varepsilon}W)-(\underline{\varepsilon}W)\omega^2$
	$\alpha\omega^2+\omega^2\alpha, \omega\alpha\omega^2-\omega\alpha\omega^2$	W, V	$W\otimes V+V\otimes W$,
ω,θ	$\omega\theta+\theta\omega, \omega^2\theta-\theta\omega^2$,		$W\otimes(W\times V)+(W\times V)\otimes W$,
	$\omega\theta^2-\theta^2\omega$		$V\otimes(W\times V)+(W\times V)\otimes V$
	二阶反对称张量值		四阶双重反对称张量值
α,β	$\underline{\varepsilon}[\alpha\beta], \underline{\varepsilon}[\alpha^2\beta], \underline{\varepsilon}[\alpha\beta^2]$,		$\alpha\beta-\beta\alpha, \alpha^2\beta-\beta\alpha^2, \alpha\beta^2-\beta^2\alpha$,
	$\underline{\varepsilon}[\alpha\beta\alpha^2], \underline{\varepsilon}[\beta\alpha\beta^2]$		$\alpha\beta\alpha^2-\alpha^2\beta\alpha, \beta\alpha\beta^2-\beta^2\alpha\beta$
α,β,χ	$\underline{\varepsilon}[\alpha\beta\chi+\beta\chi\alpha+\chi\alpha\beta]$		$\alpha\beta\chi-\chi\beta\alpha+\beta\chi\alpha-\alpha\chi\beta+\chi\alpha\beta-\beta\alpha\chi$
ω	$\underline{\varepsilon}[\omega]$		ω
α,ω	$\underline{\varepsilon}[\alpha\omega], \underline{\varepsilon}[\alpha\omega^2]$		$\alpha\omega+\omega\alpha,\ \alpha\omega^2-\omega^2\alpha$
ω,θ	$\underline{\varepsilon}[\omega\theta]$		$\omega\theta-\theta\omega$
W	W		εW
α, W	$\alpha W,\ W\times\alpha W$		$W\otimes\alpha W-\alpha W\otimes W,\ \alpha(\underline{\varepsilon}W)+(\underline{\varepsilon}W)\alpha$
ω, W	ωW		$\omega(\underline{\varepsilon}W)-(\underline{\varepsilon}W)\omega$
W, V	$W\times V$		$W\otimes V-V\otimes W$

构成了任意有限数目四阶正-反对称张量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_D$ 和二阶反对称张量 $\mathbf{W}_1,\cdots,\mathbf{W}_M$ 的各向同性标量值、二阶反对称和四阶正-反对称张量值函数的完备和不可约表示。

在三维物理空间中，二阶反对称张量空间 $\boldsymbol{Anti}$ 是三维的。记 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为在三维空间 $\boldsymbol{Anti}$ 中的置换张量，它可以表示成

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}=\underset{\sim}{\varepsilon}_{ijk}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}_i)\otimes(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}_j)\otimes(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}_k)/\sqrt{8}, \quad \underset{\sim}{\varepsilon}_{ijk}=\sigma\varepsilon_{ijk} \tag{8.24}$$

这里，$\{\mathbf{e}_i\}$ 是三维物理空间中的一个正交标架，$\{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}_i/\sqrt{2}\}$ 构成了 $\boldsymbol{Anti}$ 的一个正交标架，$\underset{\sim}{\varepsilon}_{ijk}$ 表示 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的分量，且 $\sigma=1$ 或 -1 依照我们假定在 $\boldsymbol{Anti}$ 和三维物理空间中 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}_i/\sqrt{2}\}$ 和 $\{\mathbf{e}_i\}$ 分别具有相同或相反的定向。进而，我们用 $\mathbf{W}\times\mathbf{V}$ 和 $[\mathbf{W},\mathbf{V},\mathbf{U}]$ 分别表示任意二阶反对称张量（即在 $\boldsymbol{Anti}$ 中的'矢量'）$\mathbf{W}$、$\mathbf{V}$、$\mathbf{U}$ 的"矢积"和"混合积"。用 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}[\mathbf{T}]$ 表示 $\boldsymbol{Anti}$ 中的二阶'张量' $\mathbf{T}$ 在 $\boldsymbol{Anti}$ 中的轴向'矢量'，见(2.23)。

Zheng 和 Betten [187] 证明了可以把 $\boldsymbol{\alpha}_\xi,\boldsymbol{\omega}_\delta,\mathbf{W}_p$ 的任意标量值、二阶反对称、四阶正-反对称和四阶双重反对称张量值各向同性函数看成是 $\boldsymbol{Anti}$ 中'矢量' $\mathbf{W}_p$ 和二阶'张量' $\boldsymbol{\alpha}_\xi$ 和 $\boldsymbol{\omega}_\delta$ 的标量值、'矢量'值、二阶对称'张量值'和反对称'张量值'的半向同性函数，后者可用 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 表征。他们进而利用三维半向同性张量函数表示的已有结论（见表1和2），直接得出关于 $\boldsymbol{\alpha}_\xi,\boldsymbol{\omega}_\delta,\mathbf{W}_p$ 的各向同性张量函数完备和不可约表示。现综合在表24中。

8.5 三维空间张量函数的进一步结论

在三维物理空间中，即使只考虑单个双重对称张量 $\bar{\mathbf{A}}$ 的各向同性标量值函数，我们也未能从文献中找到一个函数基或整基，尽管在此方面已作了很长时间的努力，如见 Betten [15,20-22]，Betten 和 Helisch [26]，Helisch [71]，及 Zheng 和 Betten [187]。

Zheng 和 Betten [187] 证明了关于 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho,\mathbf{A}_i$ 的任意标量值、二阶对称、四阶双重对称和四阶反-正对称张量值各向同性函数可以看作是在六维空间 $\boldsymbol{Sym}$ 中，在'矢量' $\mathbf{I}$（即二阶单位张量）和下面将定义的三阶'张量' $\mathbf{J}$ 表征的对称性下的二阶'张量' $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho$ 和'矢量' $\mathbf{A}_i$ 的各向异性标值量'矢量'值、二阶对称'张量'值和二阶反对称'张量'值函数，其中 $\mathbf{J}$ 作为六阶张量乃为

$$\mathbf{J}=(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i)\otimes(\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_j)\otimes(\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_k)/8 \tag{8.25}$$

换言之，以上所考虑的在三维物理空间中关于 $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho,\mathbf{A}_i$ 的各向同性张量函数可以看作为在六维空间 $\boldsymbol{Sym}$ 中关于'矢量' $\mathbf{A}_i,\mathbf{I}$、二阶'张量' $\bar{\mathbf{A}}_\alpha,\overline{\mathbf{W}}_\rho$ 和三阶"张量" $\mathbf{J}$ 的各向同性张量函数。如何确定在 $\boldsymbol{Sym}$ 中的这些各向同性张量函数的完备和不可约表示是一个重要的但仍有待于解决的问题。顺便指出，$\bar{\mathbf{I}}$ 和 $\mathbf{J}$ 是基本的四阶和六阶各向同性张量，因为任何可作为 $\boldsymbol{Sym}$ 中二阶'张量'的四阶张量，若它具有各向同性，则它可以表示为 $\bar{\mathbf{I}}$ 和 $\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ 的一个线性组合；而任何可作为 $\boldsymbol{Sym}$ 中三阶'张量'的六阶张量在各向同性时都可以表示为 $\mathbf{J},\mathbf{I}\otimes\bar{\mathbf{I}},\bar{\mathbf{I}}\otimes\mathbf{I}$, $\bar{I}_{ijkl}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{I}\otimes\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$ 的一个线性组合。

Zheng 和 Betten [187] 还将公式(8.16)—(8.18)推广至 n 维物理空间中具有下述下标对称性

$$\bar{H}_{ijkl}=\bar{H}_{jikl}=\bar{H}_{ijlk} \quad (\text{不必使 } \bar{H}_{ijkl}=\bar{H}_{klij}) \tag{8.26}$$

的任意四阶张量 $\bar{\mathbf{H}}$。注意到这时的二阶对称张量 $\boldsymbol{Sym}$ 空间具有 $m=n(n-1)/2$ 维，我们得到了 $\bar{\mathbf{H}}$ 的扩展特征多项式为

$$P_n(\lambda,\mu)=\mathrm{Det}(\lambda\bar{\mathbf{I}}+\mu\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}-\bar{\mathbf{H}})=[\lambda^m-J_1\lambda^{m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}J_{m-1}\lambda+(-1)^mJ_m]$$
$$+n\mu[\lambda^{m-1}-K_1\lambda^{m-2}+\cdots+(-1)^{m-2}K_{m-2}\lambda+(-1)^{m-1}K_{m-1}] \tag{8.27}$$

式（8.27）中的系数均为各向同性不变量，可以表示成

$$\begin{array}{ll} I_1=\mathrm{Tr}\bar{\mathbf{H}} & J_1=I_1 \\ I_2=\mathrm{Tr}\bar{\mathbf{H}}^2 & 2J_2=J_1I_1-I_2 \\ I_3=\mathrm{Tr}\bar{\mathbf{H}}^3 & 3J_3=J_2I_1-J_1I_2+I_3 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ I_m=\mathrm{Tr}\bar{\mathbf{H}}^m & mJ_m=J_{m-1}I_1-J_{m-2}I_2+\cdots+(-1)^{m-2}J_1I_{m-1}+(-1)^{m-1}I_m \end{array} \tag{8.28}$$

和

$$\begin{array}{ll} L_1=\mathbf{I}:\bar{\mathbf{H}}\mathbf{I} & 2K_1=nJ_1-L_1 \\ L_2=\mathbf{I}:\bar{\mathbf{H}}^2\mathbf{I} & 3K_2=nJ_2-J_1L_1+L_2 \\ L_3=\mathbf{I}:\bar{\mathbf{H}}^3\mathbf{I} & 4K_3=nJ_3-J_2L_1+J_1L_2-L_3 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ L_{m-1}=\mathbf{I}:\bar{\mathbf{H}}^{m-1}\mathbf{I} & mK_{m-1}=nJ_{m-1}-J_{m-2}L_1+\cdots+(-1)^{m-2}J_1L_{m-2}+(-1)^{m-1}L_{m-1} \end{array} \tag{8.29}$$

各向同性不变量的集合 $I_1,\cdots,I_m,L_1,\cdots,L_{m-1}$ 和集合 $J_1,\cdots,J_m,K_1,\cdots,K_{m-1}$ 显然是等价的。

特别地，令 $\bar{\mathbf{H}}=\bar{\mathbf{A}}$ 为三维空间中一个四阶双重对称张量，从而 $m=6$。我们注意到(8.27)—(8.29)中全部不变量都只是 $\bar{\mathbf{A}}$ 和 $\mathbf{I}$ 的，但不包括 $\mathbf{J}$ 的，因此，仅这些不变量不可能构成关于 $\bar{\mathbf{A}},\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{J}$ 的各向同性函数基，也即不可能是三维物理空间中 $\bar{\mathbf{A}}$ 的各向同性函数基。

关于三维空间单个二阶对称张量 $\mathbf{A}$ 的各向同性四阶张量值函数 $\mathbf{F}(\mathbf{A})$（具有下标对称性（8.26））的完备和不可约表示，作者和 Betten 教授得到表示定理为

$$\mathbf{F}(\mathbf{A})=\varphi_1\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+\varphi_2\bar{\mathbf{I}}+\varphi_3\mathbf{I}\otimes\mathbf{A}+\varphi_4\mathbf{A}\otimes\mathbf{I}+\varphi_5\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}+\varphi_6\mathbf{I}\otimes\mathbf{A}^2+\varphi_7\mathbf{A}^2\otimes\mathbf{I}$$
$$+\varphi_8\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}^2+\varphi_9\mathbf{A}^2\otimes\mathbf{A}+\varphi_{10}\mathbf{A}^2\otimes\mathbf{A}^2+\varphi_{11}(\mathbf{I}\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\mathbf{I})+\varphi_{12}(\mathbf{I}\times\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\times\mathbf{I}) \tag{8.30}$$

其中 φ 系数是 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A},\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3$ 的单值函数。任意二阶对称张量 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 的直积 $\mathbf{D}\times\mathbf{E}$ 作为一个 Sym 中的二阶对称'张量'，可以定义为

$$(\mathbf{D}\times\mathbf{E})\mathbf{A}=(\mathbf{D}\times\mathbf{E}):\mathbf{A}=\mathbf{DAE}\quad 或\quad (\mathbf{D}\times\mathbf{E})_{ijkl}=D_{ik}E_{jl} \tag{8.31}$$

显然 $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ 正是 Sym 中的二阶单位'张量' $\mathbf{I}$。

特别是，如果 $\mathbf{A}=A\mathbf{N}$，其中 $\mathbf{N}=\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$，$\mathbf{n}$ 为一个单位矢量，则 $\mathbf{F}$ 可视为依赖于单个标量参数 A 的一个对称群为 $\mathscr{D}_{\infty h}$ 的张量。（8.30）中的表示从而化成[194]

$$\mathbf{F}(A\mathbf{N})=\Psi_1\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+\Psi_2\bar{\mathbf{I}}+\Psi_3\mathbf{I}\otimes\mathbf{N}+\Psi_4\mathbf{N}\otimes\mathbf{I}+\Psi_5\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}+\Psi_6(\mathbf{I}\times\mathbf{N}+\mathbf{N}\times\mathbf{I}) \tag{8.32}$$

其中，Ψ 系数均为 A 的单值函数。当进一步具有下标对称性 $F_{ijkl}=F_{klij}$ 时，Kunin[81,82] 以及 Podio-Gudugli 和 Virga[106] 分别得到了（8.32），但他们并未考虑其完备和不可约性。表达式（8.30）和（8.32）在连续介质损伤力学中的应用可参见有关文献，如 Krajcinovic 等的论著[77,79,80]。

9 确定完备和不可约表示的方法论

在本章中，我们对推导张量函数完备和不可约表示的方法论作一个系统化整理．

9.1 各向同性张量函数的完备和不可约表示的确定

这里我们给出用 Rivlin 和 Ericksen [117] 及 Smith [133] 发展的关于标量值函数，以及用 Zheng [178] 发展的关于矢量和张量值函数确定各向同性张量函数完备和不可约表示的一个一般化的方法．实践证明这种方法比 Wang 的方法 [163-165] 更为简单、有效．如何独立地证明已知各向同性张量函数表示的不可约性的技术则归功于 Pennisi 和 Trovato [100]．

在实行将推导方法作一般化之前，为得到有关推导方法论的直感认识，最好先分析一下由 Zheng [178] 给出的一个简单例子．令 $\varphi(\mathbf{A}),\mathbf{f}(\mathbf{A}),\mathbf{H}(\mathbf{A})$ 和 $\mathbf{Z}(\mathbf{A})$ 为三维空间中单个二阶对称张量变量 $\mathbf{A}$ 的任意各向同性标量值、矢量值和二阶对称、反对称张量值函数．对于任意正交张量 $\mathbf{Q}$，各向同性要求有如下的限制[见（1.3）和（1.4）]：

$$\varphi(\mathbf{QAQ}^{\mathrm{T}})=\varphi(\mathbf{A}) \tag{9.1}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{QAQ}^{\mathrm{T}})=\mathbf{Qf}(\mathbf{A}) \tag{9.2}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{QAQ}^{\mathrm{T}})=\mathbf{QH}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \tag{9.3}$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{QAQ}^{\mathrm{T}})=\mathbf{QZ}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \tag{9.4}$$

令 $\{\mathbf{e}_i\}$ 为一个正交标架，引入

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1,\qquad \mathbf{E}_2=\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2,\qquad \mathbf{E}_3=\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{E}_4=\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2,\qquad \mathbf{E}_5=\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3,\qquad \mathbf{E}_6=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 \tag{9.5}$$

和

$$\boldsymbol{\Omega}_1=\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2,\qquad \boldsymbol{\Omega}_2=\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3,\qquad \boldsymbol{\Omega}_3=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 \tag{9.6}$$

显然，$\mathbf{E}_\alpha,\alpha=1,\cdots,6$，和 $\boldsymbol{\Omega}_i,i=1,2,3$，作为矢量 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 的张量函数是各向同性的，而集合 $\{\mathbf{E}_\alpha\}$ 和 $\{\boldsymbol{\Omega}_i\}$ 分别构成了二阶对称和反对称张量空间 ***Sym*** 和 ***Anti*** 的正交基．因而，所考虑的张量变量和张量函数可以表示成分量形式

$$\mathbf{A}=A_\alpha\mathbf{E}_\alpha \tag{9.7}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{A})=f_i(A_\alpha)\mathbf{e}_i,\qquad \mathbf{H}(\mathbf{A})=H_\beta(A_\alpha)\mathbf{E}_\beta,\qquad \mathbf{Z}(\mathbf{A})=Z_i(A_\alpha)\boldsymbol{\Omega}_i \tag{9.8}$$

我们再次强调一下重复下标求和约定的有效性．

我们这样来构造 $\mathbf{A}$ 的各向同性不变量集合和形式不变量集合：对于 $\mathbf{A}$ 的任意给定值，选择一个特殊的标架 $\{\mathbf{e}_i\}$，使得 $\mathbf{A}$ 的独立分量 A_α 能够表示成这些各向同性不变量的单值函数；而 $\mathbf{e}_i,\mathbf{E}_\alpha,\boldsymbol{\Omega}_i$ 若有必要，则能够表示成这些各向同性形式不变量的线性组合，其系数是 A_α 的单值函数．于是，根据定义（见第 1.2 节），这些各向同性不变量和形式不变量就形成了完备的表示．下面我们将具体进行上述提到的构造过程：

在（9.2）中取 $\mathbf{Q}=-\mathbf{I}$，立即得知 $f_1,f_2,f_3=0$ 这一平凡事实．换言之，单个二阶对称张量 $\mathbf{A}$ 的各向同性矢量值函数 $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ 只可能是零矢量．故此我们完全不必具体表示 $\mathbf{e}_i$；或说不必确定 $\mathbf{e}_i$．

对于任意给定的 $\mathbf{A}$，取它的三个正交主方向为 $\mathbf{e}_i$，从而有 $\mathbf{A}=A_1\mathbf{E}_1+A_2\mathbf{E}_2+A_3\mathbf{E}_3$。由于 $\mathbf{A}$ 的主值 A_i 可以表示为三个各向同性不变量 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A},\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3$ 的单值函数，因此 $\mathrm{tr}\mathbf{A}$，$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3$（或三个主不变量 I_A，II_A 和 III_A）就构成了 $\mathbf{A}$ 的一个各向同性函数基。

记 $\mathscr{G}_A$ 为 $\mathbf{A}$ 特征的对称群。由于 $\mathscr{G}_A$ 显然包括三个法线为 $\mathbf{e}_i$（$i=1,2,3$）的平面内的反射变换 $\mathbf{R}_i$，从各向同性条件（9.3）和（9.4）得知

$$\mathbf{R}_i\mathbf{H}(\mathbf{A})\mathbf{R}_i^T=\mathbf{H}(\mathbf{R}_i\mathbf{A}\mathbf{R}_i^T)=\mathbf{H}(\mathbf{A})\quad(i=1,2,3,\text{不求和})\tag{9.9}$$

$$\mathbf{R}_i\mathbf{Z}(\mathbf{A})\mathbf{R}_i^T=\mathbf{Z}(\mathbf{R}_i\mathbf{A}\mathbf{R}_i^T)=\mathbf{Z}(\mathbf{A})\quad(i=1,2,3,\text{不求和})\tag{9.10}$$

由此可推得 $H_4=H_5=H_6=Z_1=Z_2=Z_3=0$，即 $\mathbf{H}(\mathbf{A})=H_i\mathbf{E}_i$，而 $\mathbf{E}_4,\mathbf{E}_5,\mathbf{E}_6,\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{\Omega}_2,\mathbf{\Omega}_3$ 则不必确定。进一步，考虑三个可能性：(i) $A_1\neq A_2\neq A_3\neq A_1$。这时 H_i（作为 A_i 的函数）可以表达为 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$，$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$，$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3$ 的单值函数，而 $\mathbf{E}_i$ 则可依照关系 $\mathbf{I}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3$，$\mathbf{A}=A_1\mathbf{E}_1+A_2\mathbf{E}_2+A_3\mathbf{E}_3$ 和 $\mathbf{A}^2=A_1^2\mathbf{E}_1+A_2^2\mathbf{E}_2+A_3^2\mathbf{E}_3$，由 $\mathbf{I},\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^2$ 唯一确定。(ii) A_1，A_2 和 A_3 中仅有两个不等。假定 $A_1=A_2\neq A_3$，这时 $\mathscr{G}_A$ 为横观各向同性，并进一步加诸约束 $H_1=H_2$，即 $\mathbf{H}(\mathbf{A})=\hat{H}_1\hat{\mathbf{E}}_1+H_3\mathbf{E}_3$，其中 $\hat{H}_1=H_1=H_2$ 和 $\hat{\mathbf{E}}_1=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2$，显然关系 $\mathbf{I}=\hat{\mathbf{E}}_1+\mathbf{E}_3$ 和 $\mathbf{A}=A_1\hat{\mathbf{E}}_1+A_3\mathbf{E}_3$ 唯一确定 $\hat{\mathbf{E}}_1$ 和 $\mathbf{E}_3$。最后，(iii) $A_1=A_2=A_3=A_0$。则 $\mathscr{G}_A$ 是各向同性的，并加约束 $H_1=H_2=H_3$，即 $\mathbf{H}(\mathbf{A})=H(A)\mathbf{I}$。

从以上的分析中，我们得到完备表示 $\mathbf{f}(\mathbf{A})=\mathbf{0}$，$\mathbf{Z}(\mathbf{A})=\mathbf{0}$，

$$\varphi(\mathbf{A})=\varphi(\mathrm{tr}\,\mathbf{A},\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3)\tag{9.11}$$

和

$$\mathbf{H}(\mathbf{A})=\varphi_0\mathbf{I}+\varphi_1\mathbf{A}+\varphi_2\mathbf{A}^2\tag{9.12}$$

其中 φ_0,φ_1 和 φ_2 为 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A},\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3$ 的单值函数。

最后我们转而证明以上导出的表示的不可约性。对于 $\mathbf{A}=\mathrm{diag}(1,1,-\sqrt[3]{2})$ 和 $\mathbf{A}'=-\mathbf{A}$，可得 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}\neq\mathrm{tr}\,\mathbf{A}'$ 以及 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2=\mathrm{tr}\,\mathbf{A}'^2,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3=\mathrm{tr}\,\mathbf{A}'^3$；对于 $\mathbf{A}=\mathrm{diag}\,(1,-1,0)$ 和 $\mathbf{A}'=2\mathbf{A}$，有 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\neq\mathrm{tr}\,\mathbf{A}'^2$ 以及 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}=\mathrm{tr}\,\mathbf{A}',\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3=\mathrm{tr}\,\mathbf{A}'^3$；对于 $\mathbf{A}=\mathrm{diag}\,(1,1,-2)$ 和 $\mathbf{A}'=-\mathbf{A}$，则有 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3\neq\mathrm{tr}\,\mathbf{A}'^3$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}=\mathrm{tr}\,\mathbf{A}',\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2=\mathrm{tr}\,\mathbf{A}'^2$。这说明 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A},\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3$ 中没有一个可以表示为其余两个的单值函数，换言之，完备表示（9.11）的确是不可约的。取 $\mathbf{A}=\mathrm{diag}(1,-1,0)$，很容易表明 $\mathbf{I},\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^2$ 中任何一个均无法表示为其它两个的线性组合，从而肯定了完备表示（9.12）的不可约性。

现在我们已作好准备可以对确定各向同性张量函数完备和不可约表示的一般性方法[186] 作出完整的阐述。令 $\phi(\mathbf{S}_\alpha)$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{S}_\alpha)$ 为张量 $\mathbf{S}_1,\cdots,\mathbf{S}_A$ 的任意各向同性标量值和张量值函数。$\phi(\mathbf{S}_\alpha)$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{S}_\alpha)$ 的定义域均记作 V^d，而 $\mathbf{F}(\mathbf{S}_\alpha)$ 的值域则记作 V^r

$$V^d=V_1\times\cdots\times V_1\times\cdots\times V_D\times\cdots\times V_D\tag{9.13}$$

其中 $V_1,\cdots,V_D$ 为若干张量空间的不同子空间。例如，它们可以是二阶对称张量空间 Sym 和反对称张量空间 $Anti$。相应于一正交标架 $\{\mathbf{e}_i\}$，我们依次引入 $V_1,\ldots,V_D$ 的基 $\{\mathbf{b}_\alpha\},\ldots,\{\mathbf{h}_\gamma\}$ 和 V^r 的基 $\{\mathbf{G}_\delta\}$ 使得每个基元均为 $\mathbf{e}_i$ 的已知各向同性形式不变量。用数学形式表示，就有

$$\mathbf{b}_\alpha=\mathbf{b}_\alpha(\mathbf{e}_i),\cdots,\mathbf{h}_\gamma=\mathbf{h}_\gamma(\mathbf{e}_i),\quad\mathbf{G}_\delta=\mathbf{G}_\delta(\mathbf{e}_i)\tag{9.14}$$

对任何正交张量 $\mathbf{Q}$ 满足

$$\langle\mathbf{Q}\rangle\mathbf{G}_\delta(\mathbf{e}_i)=\mathbf{G}_\delta(\mathbf{Q}\mathbf{e}_i)\tag{9.15}$$

把 S_a 相对于 $\{\mathsf{b}_2\},\cdots,\{\mathsf{h}_\gamma\}$ 的分量记为 S_Γ，F相对 $\{\mathsf{G}_\delta\}$ 的分量记作 F_δ，即

$$\phi(\mathsf{S}_a)=\phi(S_\Gamma) \tag{9.16}$$

$$\mathsf{F}(\mathsf{S}_a)=F_\delta(S_\Gamma)\mathsf{G}_\delta \tag{9.17}$$

请注意重复下标求和约定乃为有效。

构造 S_a 的一组各向同性不变量 $I_1,\cdots,I_B$ 和值域 V^r 上一组 S_a 的形式不变量$\mathsf{J}_1,\cdots,\mathsf{J}_C$，使得对于任意在定义域 V^d 中给定的 S_a，可以选择一正交基 $\{\mathsf{e}_i\}$ 来完成下面三个步骤：

- 可将 S_a 的全部分量S_Γ表示为 $I_1,\cdots I_B$ 的单值函数，即

$$S_\Gamma=S_\Gamma(I_1,\cdots,I_B) \tag{9.18}$$

这意味着 $I_1,\ldots,I_B$ 构成了 S_a 的一个各向同性函数基。

- 对于由 S_a 表征的对称群 $\mathscr{G}_S$ 中任意成员 R，即 $\langle\mathsf{R}\rangle\mathsf{S}_a=\mathsf{S}_a$，约束条件

$$\langle\mathsf{R}\rangle\mathsf{F}(\mathsf{S}_a)=\mathsf{F}(\langle\mathsf{R}\rangle\mathsf{S}_a)=\mathsf{F}(\mathsf{S}_a) \tag{9.19}$$

加诸线性相关条件

$$F_\delta(S_\Gamma)[\mathsf{G}_\delta(\mathsf{Re}_i)-\mathsf{G}_\delta(\mathsf{e}_i)]=0 \tag{9.20}$$

特别是在（9.20）的约束下，F_δ 的一些分量可能为零，这时相应的 $\mathsf{G}_\delta(\mathsf{e}_i)$就不必确定了。一般来说，$F_\delta(S_\Gamma)$ 中独立分量的数目将由于（9.20）而减少，而（9.17）可重组成形式

$$\mathsf{F}(\mathsf{S}_a)=\hat{F}_\lambda(S_\Gamma)\hat{\mathsf{G}}_\lambda(\mathsf{e}_i) \tag{9.21}$$

其中分量$\hat{F}_\lambda(S_\Gamma)=\hat{F}_\lambda(I_1,\cdots,I_B)$［见（9.18）］是独立的，$\hat{\mathsf{G}}_\lambda(\mathsf{e}_i)$ 则是 $\mathsf{G}_\delta(\mathsf{e}_i)$ 的带有已知常系数的线性组合。

- 最后，所有的$\hat{\mathsf{G}}_\lambda(\mathsf{e}_i)$ 均可以表示为 $\mathsf{J}_1,\cdots,\mathsf{J}_C$ 的线性组合，其中系数为 S_Γ 或$I_1,\cdots,I_B$ 的单值函数，即

$$\hat{\mathsf{G}}_\lambda(\mathsf{e}_i)=\beta_{\lambda l}(I_1,\cdots,I_B)\mathsf{J}_l \tag{9.22}$$

这样，从以上构造可以看到

$$\phi(\mathsf{S}_a)=\phi(S_\Gamma)=\phi(S_\Gamma(I_1,\ldots,I_B))=\phi(I_1,\ldots,I_B) \tag{9.23}$$

和

$$\mathsf{F}(\mathsf{S}_a)=\hat{F}_\lambda(S_\Gamma)\hat{\mathsf{G}}_\lambda(\mathsf{e}_i)=[\hat{F}_\lambda(I_1,\ldots,I_B)\beta_{\lambda l}(I_1,\ldots,I_B)]\mathsf{J}_l \tag{9.24}$$

分别是 S_a 的任意各向同性标量值函数 ϕ 和张量值函数 F 的完备表示。

为了从集合 $\{I_1,\ldots I_B\}$ 和 $\{\mathsf{J}_1,\ldots,\mathsf{J}_C\}$ 中查找出可能的多余不变量和形式不变量，并最终得到完备和不可约表示，我们可以依循 Pennisi 和 Trovato[100] 的作法完成下列步骤：

◇ 对于一个不变量 I_k，如果存在 S_a 的两组不同取值 D 和 D'，使得除 I_k 之外所有的不变量 $I_1,\cdots,I_B$ 对于 D和 D' 都取相同值，则 I_k 是不可约的；否则，即是多余的。如果函数基中的所有不变量都是不可约的，则张量表示（9.23）就是不可约的。

◇ 如果存在 S_a 的一组取值使 J_l 作为 S_a 的一个各向同性形式不变量，不可能表示为形式不变量 $\mathsf{J}_1,\cdots,\mathsf{J}_C$ 中除 J_l 之外其它各量的线性组合，则 J_l 是不可约的；否则，即为多

余的．如果所有形式不变量 $J_1,\cdots,J_C$ 均是不可约的，则张量表示（9.24）为不可约的；否则为可约的．

对于确定各向同性张量函数表示的详细过程，建议读者参考 Zheng 文[178]．

9.2 各向异性张量函数的完备和不可约表示的确定

在第1.1节中已经指出，Boehler[30,31] 的通过结构张量确定各向异性张量函数表示的方法是有一定局限性的，因为它依赖于已知的各向同性张量函数表示，而且对于产生的多余不变量和形式不变量很难从表示中删除．作者[179-184] 发展了通过结构张量而确定各向异性张量函数完备和不可约表示的一种直接方法，从而求得了从第4到第8章总结过的一般各向异性张量函数表示结果．下面给出了这一直接方法的简要但一般性的描述．

首先，考虑一个简单的例子，即确定单个二阶对称张量变量 $\mathbf{A}$ 的正交异性标量和二阶对称张量值函数的完备和不可约表示．根据各向同性化定理（见第3.4节），这些表示与关于 $\mathbf{A},\mathbf{N}_1=\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}$，$\mathbf{N}_2=\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{N}_3=\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}$ 的完备和不可约各向同性表示是等价的，其中 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j},\mathbf{k}$ 表示正交异性的三个正交主导方向．令 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 分别平行于 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$，这样，我们可以将 $\mathbf{A}$ 表示成（9.7）的形式，并有

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{N}_1,\quad \mathbf{E}_2=\mathbf{N}_2,\quad \mathbf{E}_3=\mathbf{N}_3 \tag{9.25}$$

$$A_1=\operatorname{tr}\mathbf{N}_1\mathbf{A},\quad A_2=\operatorname{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A},\quad A_3=\operatorname{tr}\mathbf{N}_3\mathbf{A} \tag{9.26}$$

对于尚未确定的 A_4,A_5,A_6 和 $\mathbf{E}_4,\mathbf{E}_5,\mathbf{E}_6$，可以给出关系

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}\mathbf{N}_1\mathbf{A}^2,\operatorname{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^2,\operatorname{tr}\mathbf{N}_3\mathbf{A}^2\Rightarrow A_4^2,A_5^2,A_6^2\\ \operatorname{tr}\mathbf{A}^3\Rightarrow A_1A_2A_3\end{gathered} \tag{9.27}$$

和

$$\begin{gathered}\mathbf{N}_2\mathbf{A}\mathbf{N}_3+\mathbf{N}_3\mathbf{A}\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3\mathbf{A}\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{N}_3,\mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{N}_2+\mathbf{N}_2\mathbf{A}\mathbf{N}_1\Rightarrow A_4\mathbf{E}_4,A_5\mathbf{E}_5,A_6\mathbf{E}_6\\ \mathbf{A}^2\Rightarrow A_5A_6\mathbf{E}_4+A_5A_6\mathbf{E}_4+A_5A_6\mathbf{E}_4\end{gathered} \tag{9.28}$$

其中符号⇒意指“唯一确定”．考虑下面三种可能性：(a) A_4,A_5 和 A_6 中至少有两个是非零的．假设 $A_4,A_5\neq0$，这时可以在 $\pm\mathbf{i}$ 间选择 $\mathbf{e}_1$ 和在 $\pm\mathbf{j}$ 间选择 $\mathbf{e}_2$ 使得 A_2 和 A_1 为正值．这样，我们从（9.27）和（9.28）看到 A_4,A_5,A_6 和 $\mathbf{E}_4,\mathbf{E}_5,\mathbf{E}_6$ 是唯一确定的．(b) A_4，A_5 和 A_6 中只有一个是非零的．假设 $A_4\neq0$，且在 $\pm\mathbf{j}$ 之间选择 $\mathbf{e}_2$ 使 $A_4>0$，可见 $\operatorname{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^2$ 和 $\mathbf{N}_2\mathbf{A}\mathbf{N}_3+\mathbf{N}_3\mathbf{A}\mathbf{N}_2$ 唯一确定 A_4 和 $\mathbf{E}_4$．由于对法向 $\mathbf{l}$（或 $\mathbf{e}_1$）平面上的反射张量 $\mathbf{R}_i$ 使 $\mathbf{A}$ 保持不变，由此可推知 $\mathbf{E}_5$ 和 $\mathbf{E}_6$ 不必确定．最后，(c) $A_4,A_5,A_6=0$．此时 $\mathbf{E}_4,\mathbf{E}_5$ 和 $\mathbf{E}_6$ 全部无须确定．

以上分析表明不变量和形式不变量

$$\operatorname{tr}\mathbf{N}_1\mathbf{A},\operatorname{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A},\operatorname{tr}\mathbf{N}_3\mathbf{A},\operatorname{tr}\mathbf{N}_1\mathbf{A}^2,\operatorname{tr}\mathbf{N}_2\mathbf{A}^2,\operatorname{tr}\mathbf{N}_3\mathbf{A}^2,\operatorname{tr}\mathbf{A}^3 \tag{9.29}$$

$$\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3,\mathbf{N}_2\mathbf{A}\mathbf{N}_3+\mathbf{N}_3\mathbf{A}\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_3\mathbf{A}\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{N}_3,\mathbf{N}_1\mathbf{A}\mathbf{N}_2+\mathbf{N}_2\mathbf{A}\mathbf{N}_1,\mathbf{A}^2 \tag{9.30}$$

分别构成了 $\mathbf{A}$ 的正交异性标量值和二阶对称张量值函数的完备表示．然后这些表示的不可约性可利用 Pennisi-Trovato[100] 方法加以证实．

现在，我们来大致描绘出如何推广至一般性方法．令 $\phi(\mathbf{S}_\alpha)$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{S}_\alpha)$ 为由结构张量 $\boldsymbol{\xi}_\gamma$ 表征的各向异性下关于 $\mathbf{S}_\alpha$ 的任意标量值和矢量值函数．根据各向同性化定理（见第3.4节），ϕ 和 $\mathbf{F}$ 可以表示成初始张量变量 $\mathbf{S}_\alpha$ 和附加张量变量 $\boldsymbol{\xi}_\gamma$ 的各向同性张量函数，有

$$\phi=\phi^*(\mathbf{S}_\alpha,\boldsymbol{\xi}_\gamma),\quad \mathbf{F}=\mathbf{F}^*(\mathbf{S}_\alpha,\boldsymbol{\xi}_\gamma) \tag{9.31}$$

为确定 $\phi(\mathbf{S}_a,\xi_\gamma)$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{S}_a,\xi_\gamma)$ 的完备表示并判定其不可约性，前面阐述过的用于求证初始各向同性张量函数表示的不可约性的方法仍然适用。仅有的差别是要注意张量 $\mathbf{S}_a$ 是定义域 V^d 中的自由变量，而张量 ξ_γ 则是常数张量。按照这一方法，如第 4 至第 8 章所述的大量各向异性张量函数的完备和不可约表示便建立起来了。

10 应用于连续介质力学的若干一般性命题

这里我们给出在张量函数表示理论应用于连续介质力学的若干一般命题的研究中所得到的一些有意义的结论。特定应用已得到了广泛的研究，可参见 Boehler[35] 和 Betten[25] 的综述论著。

10.1 本构方程的统一不变量形式

在连续介质力学的理论框架中包含了一些经典的平衡律（如质量、动量、动量矩、能量平衡律）、熵不等式和本构定律。我们强调，平衡律和熵不等式全部是普适性的，即它们不受任何具体材料类型的限制，而且它们的形式为各向同性和均匀性，这反映了物理空间的各向同性和均匀性。与之相反，本构定律则描述了各具特质的一类类材料，它们既可能是各向异性，又可能是非均匀性的。

第 3,5 节所述的空间各向同性原理，使我们可以通过将张量变量扩大至包括结构张量，从而用统一的各向同性形式描述本构定律，而不在乎材料的实际对称性，在这样一个表示中，不但消除了平衡律的各向同性和本构定律的各向异性之间的不协调，而且各向异性的影响通过结构张量而表现得更为清晰。

在 Noll 关于简单材料的新理论[85] 中，简单材料的等温力学行为由如下的一个三重关系 $\{\hat{\boldsymbol{\tau}},\hat{\mathbf{E}},\hat{r}\}$ 加以表示：

$$\boldsymbol{\tau}=\hat{\boldsymbol{\tau}}(\Sigma),\quad \mathbf{E}=\hat{\mathbf{E}}(\Sigma) \tag{10.1}$$

$$\Sigma=\hat{r}(\Sigma_0,P) \tag{10.2}$$

这里，关系（10.2）指的是材料元的现时状态 Σ 由它以前的状态 Σ_0 和从以前到目前的等温力学过程 P 决定；而关系（10.1）指明现时状态 Σ 确定现时应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 和应变张量 $\mathbf{E}$。

近年来（例见 Adams 等[1]，Zheng 和 Boehler[190]）变得更为明显的是对于一种简单固体，其状态 Σ 可以用一组不可约（即完全对称和迹数为零的）张量 $\mathbf{S}_1,\cdots,\mathbf{S}_A$ 来表示，即

$$\Sigma=(\mathbf{S}_1,\cdots,\mathbf{S}_A) \tag{10.3}$$

代替（10.2），状态 Σ 的演化受如下形式的微分方程的控制：

$$\mathring{\Sigma}=g(\Sigma,\mathbf{D}) \tag{10.4}$$

其中 $\mathring{\Sigma}$ 表示 Σ 的一个共旋率（如 Jaumann 率），或更一般地，为 Σ 的客观材料时间导数。$\mathbf{D}$ 表示变形率张量。

材料对称性对（10.1）和（10.4）的形式要加以约束。回想一下第 3 章介绍的结构张量定理和各向同性化定理，我们可以用如下的各向同性化形式表示式（10.1）和（10.4）：

$$\boldsymbol{\tau}=\hat{\boldsymbol{\tau}}(\Sigma,\Xi),\quad \mathbf{E}=\hat{\mathbf{E}}(\Sigma,\Xi) \tag{10.5}$$

$$\mathring{\Sigma}=g(\Sigma,\Xi,\mathbf{D}) \tag{10.6}$$

其中 Ξ 代表结构张量 $\xi_1,\cdots,\xi_S$，由它们表征了材料的对称性（如果材料是各向异性的话）。

在内变量热力学理论中[53,64]，材料不可逆现象（塑性、损伤等）的耗散机制可以假定为由所谓的内状态变量来表征。本构和演化方程可以写成如下形式的张量函数：

$$\mathbf{T}=\hat{\mathbf{F}}(\Sigma^e,\Sigma^i) \tag{10.7}$$

其中 Σ^e 和 Σ^i 分别代表一组外状态变量（如应力张量，应变张量，变形率张量，材料旋率张量等）和一组内状态变量（如塑性应变张量，背应力张量，损伤张量等），而符号 $\mathbf{T}$ 表示一个外或内状态变量或其共旋率（或客观的材料时间导数）。进而，对于一个各向异性材料，我们可以通过利用表征材料各向异性的结构张量 Ξ，用下面的各向同性形式替换式（10.7）：

$$\mathbf{T}=\hat{\mathbf{F}}(\Sigma^e,\Sigma^i,\Xi) \tag{10.8}$$

应该说明，如果以材料的初始构形作为参考构形，则 Ξ 表征的各向异性即为材料的初始对称性。例如，一个正交层合板是初始正交异性的，可由 $\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}$，$\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}$ 表征。如果我们以未变形层板作为参考构形，则（10.8）中的结构张量永远是 $\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}$，$\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}$，而与层板随后变形无关。不可逆过程中各向异性的演化从而由结构张量 Ξ 和内变量 Σ^i 共同描述。特别当材料是初始各向同性时，不可逆过程中的诱导各向异性是由内变量透露出的。最后我们需要指出，由 Ξ 和 Σ^i 表征的发展中的各向异性同样是由某个材料点群，即一个紧点群描述的，这是因为表 6 和表 7 中关于紧点群的分类包含了材料的所有物理可能的材料对称群。

10.2 率型本构方程和链法则

考虑各向同性张量函数共旋率的一个一般特性，如关于（10.8）中的 $\mathbf{T}=\hat{\mathbf{F}}(\Sigma,\Xi)$，其中 Σ 表示 (Σ^e,Σ^i)。令 $\mathbf{w}$ 为一个任意二阶反对称张量。我们可以通过关系 $\mathbf{w}=\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ 将 $\mathbf{w}$ 和某个与时间有关的转动张量 $\mathbf{Q}$ 联系起来，其中上方点代表材料时间导数。张量 $\mathbf{S}$ 相应 $\mathbf{w}$ 的共旋率 $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ 定义为

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}=\langle\mathbf{Q}^T\rangle\overline{\langle\dot{\mathbf{Q}}\rangle\mathbf{S}}=\dot{\mathbf{S}}+\langle\mathbf{Q}^T\rangle\overline{\langle\mathbf{Q}\rangle}\mathbf{S}=\dot{\mathbf{S}}-\mathbf{W}\mathbf{S},\quad(\mathbf{W}=\overline{\langle\dot{\mathbf{Q}}\rangle}\langle\mathbf{Q}^T\rangle) \tag{10.9}$$

或

$$\overset{\circ}{S}_{ij\cdots k}=\dot{S}_{ij\cdots kij\cdots k}-w_{ia}S_{aj\cdots k}-w_{ja}S_{ia\cdots k}-\cdots-w_{ka}S_{ij\cdots a} \tag{10.10}$$

业已证明（见 Zheng[186]），张量函数 $\hat{\mathbf{F}}$ 的各向同性条件使得成立链法则

$$\overset{\circ}{\hat{\mathbf{F}}}(\Sigma,\Xi)=\frac{\partial\hat{\mathbf{F}}}{\partial\Sigma}[\overset{\circ}{\Sigma}]+\frac{\partial\hat{\mathbf{F}}}{\partial\Xi}[\overset{\circ}{\Xi}] \tag{10.11}$$

或

$$\overset{\circ}{\hat{F}}_{r\cdots s}(\Sigma,\Xi)=\sum_{a=1}^{A}\frac{\partial\hat{F}_{r\cdots s}}{\partial S^{(a)}_{i\cdots j}}\overset{\circ}{S}{}^{(a)}_{i\cdots j}+\sum_{b=1}^{B}\frac{\partial\hat{F}_{r\cdots s}}{\partial\xi^{(b)}_{l\cdots m}}\overset{\circ}{\xi}{}^{(b)}_{l\cdots m} \tag{10.12}$$

和恒等式

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{F}}(\Sigma,\Xi)}{\partial\Sigma}[\mathbf{W}\Sigma]+\frac{\partial\hat{\mathbf{F}}(\Sigma,\Xi)}{\partial\Sigma}[\mathbf{W}\Xi]=\mathbf{W}\hat{\mathbf{F}}(\Sigma,\Xi) \tag{10.13}$$

在一个特殊情况下，Dafalias[55] 曾证明过链法则（10.11）或（10.12），并应用于列出本构方程[56,57]。

率型本构方程具有特殊的意义．令 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{W}$ 分别表示变形率张量和材料旋率张量，$\mathbf{R}$ 表示变形梯度极分解中有限转动张量，$\dot{\mathbf{R}}$ 代表 $\mathbf{R}$ 的材料时间导数，$\mathbf{\Omega}_R=\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ 则为相对旋率或 Dienes 旋率．而 $\mathbf{\sigma}$ 表示 Cauchy 应力张量．如果在变形过程中 $\mathbf{R}\equiv\mathbf{I}$，该变形过程称为无旋转的；相对照，一个非涡旋变形过程是指 $\mathbf{\Omega}\equiv 0$．如果率型本构方程

$$\dot{\mathbf{\sigma}}=\hat{\mathbf{F}}(\Sigma^e,\Sigma^i,\Xi) \tag{10.14}$$

业已由无旋转变形实验所确定，则当材料实际经历有旋的变形时，Zheng[176,177] 证明了相应（10.14）的一般本构方程形式为

$$\dot{\overline{\mathbf{\sigma}}}=\hat{\mathbf{F}}(\overline{\Sigma}^e,\overline{\Xi}^i,\Xi) \tag{10.15}$$

称作本构等价性原理，其为客观性公理（参见，如 Truesdell 和 Noll[159]）的一个直接推论．换言之，一般形式（10.15）是在不改变实验确定的本构泛函 $\hat{\mathbf{F}}$ 的条件下，以形式无旋转张量 $\overline{\mathbf{\sigma}},\overline{\Sigma}^e$ 和 $\overline{\Sigma}^i$ 替代（10.14）中的外状态变量 $\mathbf{\sigma}$ 和 Σ^e 和内状态变量 Σ^i．关于本构等价性原理的详细描述可参考 Zheng[176,177]，它是作为广义 Dienes 问题[58,59] 的精确回答．

我们下面列举一些常用的形式无旋转张量来代替 Zheng[177] 的有关一般性描述．关于 $\mathbf{\sigma},\mathbf{D},\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}_R$ 右和左伸长张量 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 及变形梯度 $\mathbf{F}$ 的形式无旋转张量为

$$\overline{\mathbf{\sigma}}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{\sigma}\mathbf{R} \tag{10.16}$$

$$\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{R},\quad \overline{\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}_R}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}_R)\mathbf{R} \tag{10.17}$$

$$\overline{\mathbf{U}}=\mathbf{U},\quad \overline{\mathbf{F}}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}=\mathbf{U},\quad \overline{\mathbf{V}}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{R}=\mathbf{U} \tag{11.18}$$

考虑到张量函数 $\hat{\mathbf{F}}$ 的各向同性，从（10.15）我们得到率型本构方程的一般形式

$$^{D}\mathbf{\sigma}=\hat{\mathbf{F}}(\langle\mathbf{R}\rangle\overline{\Sigma}^e,\ \langle\mathbf{R}\rangle\overline{\Sigma}^i,\langle\mathbf{R}\rangle\Xi) \tag{10.19}$$

其中 $^{D}\mathbf{\sigma}$ 为 $\mathbf{\sigma}$ 的 Dienes 导数．

$$^{D}\mathbf{\sigma}=\mathbf{R}\dot{\overline{\mathbf{\sigma}}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}=\dot{\mathbf{\sigma}}+\mathbf{\sigma}\mathbf{\Omega}_R-\mathbf{\Omega}_R\mathbf{\sigma} \tag{10.20}$$

将（10.20）中的 $\mathbf{\Omega}_R$ 用 $\mathbf{\Omega}$ 替换，就得到 Jaumann 导数 $^{J}\mathbf{\sigma}=\dot{\mathbf{\sigma}}+\mathbf{\sigma}\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}\mathbf{\sigma}$．我们称式（10.19）中的 $\langle\mathbf{R}\rangle\Xi$ 为旋转结构张量．

最后，如果 Σ^e 和 Σ^i 均为 Euler 型，则一般有

$$\overline{\Sigma}^e=\langle\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\rangle\Sigma^e \tag{10.21}$$

$$\overline{\Sigma}^i=\langle\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\rangle\Sigma^i \tag{10.22}$$

再从（10.19），就有

$$^{D}\mathbf{\sigma}=\hat{\mathbf{F}}(\Sigma^e,\Sigma^i,\langle\mathbf{R}\rangle\Xi) \tag{10.23}$$

Zheng[177] 研究了（10.23）对横观各向同性材料经历简单剪切时的一个应用，其中（10.15）中的 $\hat{\mathbf{F}}$ 假定已由无旋转实验所决定，它是变形率张量 $\mathbf{D}$ 的线性变换：

$$\dot{\mathbf{\sigma}}=(\lambda I_D+\alpha I_D^{\mathrm{k}})\mathbf{I}+2\mu_T\mathbf{D}+(\alpha I_D+\beta I_D^{\mathrm{k}})\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}+2(\mu_L+\mu_T)(\mathbf{k}\otimes\mathbf{D}\mathbf{k}+\mathbf{D}\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}) \tag{10.24}$$

其中 $I_D=\mathrm{tr}\,\mathbf{D}$ 和 $I_D^{\mathbf{k}}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{D}\mathbf{k}$. 材料常数 μ_T 和 μ_L 表示沿垂直或平行于主导方向 k 进行平面剪切的剪切模量，而其他常数 λ,α,β 也都可以与弹性常数（杨氏模量和泊淞比）联系起来．根据（10.23），一般的本构方程为

$$^D\boldsymbol{\sigma}=(\lambda I_D+\alpha I_D^{\bar{\mathbf{k}}})\mathbf{I}+2\mu_T\mathbf{D}+(\alpha I_D+\beta I_D^{\bar{\mathbf{k}}})\bar{\mathbf{k}}\otimes\bar{\mathbf{k}}+2(\mu_L-\mu_T)(\bar{\mathbf{k}}\otimes\mathbf{D}\bar{\mathbf{k}}+\mathbf{D}\bar{\mathbf{k}}\otimes\bar{\mathbf{k}}) \qquad (10.25)$$

其中 $\bar{\mathbf{k}}=\mathbf{R}\mathbf{k}$ 代表旋转主导方向．Zheng [177] 表明了，如果无量纲材料常数 $\beta/(4\mu_L)$ 在区间（-0.4223，9.939）范围内，则剪应力简单剪切变化一定单调增加．关系（10.23）揭示了表征初始各向异性的结构张量和描述诱导各向异性的内状态变量之间的明显区别．

10.3 应变张量和旋率张量

最后指出，各向同性张量函数的完备和不可约表示也可用于以不变量形式表示各种应变张量，并求解各向同性本构方程．

例如，近年来各种旋率张量得到了广泛的研究，如见熊祝华和郑泉水 [173] 关于率型本构方程的共旋率或客观材料时间导数这一课题所作的综述．一般来说，一个旋率张量 X 乃是下述类型的张量方程的一个解 [67]：

$$\mathbf{A}\mathbf{X}-\mathbf{X}\mathbf{A}=\mathbf{B} \qquad (10.26)$$

其中 A 和 B 为两个已知的二阶对称张量（比如变形率张量 D，应变张量的材料时间导数）．由于 X 为 A 和 B 的一个各向同性二阶反对称张量值函数，并线性地依赖于 B，从表 1 和 2，得到 X 的一般解为

$$\mathbf{X}=\Psi_0(\mathbf{A}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A})-\Psi_1(\mathbf{A}^2\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A}^2)+\Psi_2(\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^2) \qquad (10.27)$$

其中 Ψ 系数为主迹数 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$，$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3$（或等价地，主不变量 $I_{\mathrm{A}},II_{\mathrm{A}}$ 和 III_{A}）的标量值函数．令 A_i 为 A 的主值且 $\Delta(\mathbf{A})$ 为 A 的各向同性标量值函数

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{A})&=(A_2-A_3)^2(A_3-A_1)^2(A_1-A_2)^2\\&=18I_{\mathrm{A}}II_{\mathrm{A}}III_{\mathrm{A}}+I_A^2II_A^2-4I_A^3III_{\mathrm{A}}-4II_A^3-27III_A^2\end{aligned} \qquad (10.28)$$

从（10.26）和（10.27），可以进一步得到 [67]

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_0&=(A_1-A_2)(A_1-A_3)A_1^2+(A_2-A_3)(A_2-A_1)A_2^2+(A_3-A_1)(A_3-A_2)A_3^2\\&=6I_{\mathrm{A}}III_{\mathrm{A}}-5I_A^2II_{\mathrm{A}}+I_A^4+4II_A^2\end{aligned} \qquad (10.29)$$

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_1&=(A_1-A_2)(A_1-A_3)A_1+(A_2-A_3)(A_2-A_1)A_2+(A_3-A_1)(A_3-A_2)A_3\\&=I_A^3-4I_{\mathrm{A}}II_{\mathrm{A}}+9III_{\mathrm{A}}\end{aligned} \qquad (10.30)$$

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_2&=(A_1-A_2)(A_1-A_3)+(A_2-A_3)(A_2-A_1)+(A_3-A_1)(A_3-A_2)\\&=I_A^2-3II_{\mathrm{A}}\end{aligned} \qquad (10.31)$$

考虑由满足条件 $f(\mathbf{I})=0$ 和 $f(\mathbf{I})=1/2$ 的一个标量值函数 $f(x)$ 生成的 Hill 型应变张量 [72]

$$\mathbf{E}_f=\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{C})=f(C_1)\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1+f(C_2)\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2+f(C_3)\mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3 \qquad (10.32)$$

这里 C_i 和 $\mathbf{n}_i$ 分别表示右 Cauchy-Green 变形张量 C 的主值和主方向．因为 $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{C})$ 为 C 的一个各向同性二阶张量值函数，从表示定理

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{C})=\varphi_0\mathbf{I}-\varphi_1\mathbf{C}+\varphi_2\mathbf{C}^2 \qquad (10.33)$$

和式（10.32），可以得到关系

$$\varphi_0 = \frac{C_2C_3f(C_1)}{(C_1-C_2)(C_1-C_3)} + \frac{C_3C_1f(C_2)}{(C_2-C_3)(C_2-C_1)} + \frac{C_1C_2f(C_3)}{(C_3-C_1)(C_3-C_2)} \tag{10.34}$$

$$\varphi_1 = \frac{(C_2+C_3)f(C_1)}{(C_1-C_2)(C_1-C_3)} + \frac{(C_3+C_1)f(C_2)}{(C_2-C_3)(C_2-C_1)} + \frac{(C_1+C_2)f(C_3)}{(C_3-C_1)(C_3-C_2)} \tag{10.35}$$

$$\varphi_2 = \frac{f(C_1)}{(C_1-C_2)(C_1-C_3)} + \frac{f(C_2)}{(C_2-C_3)(C_2-C_1)} + \frac{f(C_3)}{(C_3-C_1)(C_3-C_2)} \tag{10.36}$$

如果 $\mathbf{C}$ 没有三个相异的主值，我们可以将 I′Hopital 法则用于（10.34）—（10.36）．因为很容易将 C_i 表示成主不变量 $I_{\mathrm{C}}, II_{\mathrm{C}}$ 和 III_{C}（或主迹数 $\mathrm{tr}\,\mathbf{C}, \mathrm{tr}\,\mathbf{C}^2$ 和 $\mathrm{tr}\,\mathbf{C}^3$）的函数，故可给出关于 φ_0、φ_1 和 φ_2 作为 $I_{\mathrm{C}}, II_{\mathrm{C}}, III_{\mathrm{C}}$（或 $\mathrm{tr}\,\mathbf{C}, \mathrm{tr}\,\mathbf{C}^2, \mathrm{tr}\,\mathbf{C}^3$）函数的详细形式（如见熊祝华和郑泉水[171]）．熊祝华和郑泉水[173] 综述了各种应变张量不变量表示的有关问题．

Zheng 和 Tai[195] 证明了如果 $f(x)$ 是解析的，则表示公式（10.33）—（10.36）同样适用于任意二阶张量 $\mathbf{G}$ 而不仅仅是二阶对称张量．这时代替（10.32），定义 $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{G})$ 为

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{G}) = \sum a_n \mathbf{G}^n, \qquad （其中\ f(x) = \sum a_n x^n） \tag{10.37}$$

一般来说，如果 $\mathbf{G}$ 并非对称，则 $\mathbf{G}$ 的特征值 G_i 可能是复数．例如，一个二阶对称张量可以表示成形式 $\omega\mathbf{L}$，其中 $\omega>0$ 且 $\mathrm{tr}\,\mathbf{L}^2=-1$．这时 $\omega\mathbf{L}$ 的特征值为 0 和 $\pm i\omega$，从（10.34）—（10.36）我们得到由指数函数 $\exp(x)$ 引入的各向同性张量函数的表示 $\exp(\omega\mathbf{L})$ 为

$$\exp(\omega\mathbf{L}) = \mathbf{I} + \sin\omega\,\mathbf{L} + (1-\omega)\mathbf{L}^2 \tag{10.38}$$

它与绕向沿 $-\mathrm{s}[\mathbf{L}]$ 方向的转动角为 ω 的一个旋转张量相对应．

11 结 论

有几点我们要特别强调指出．第 1，比较张量函数和张量多项式的完备和不可约表示，可以看出，后者局限于多项式形式的限制，而前者不仅仅容许各向同性和各向异性材料本构定律的一般不变量形式，而且它比后者包含更少数量的不变量和形式不变量．这令人印象非常深刻，因为本构方程取多项式形式，仅仅是一个假设或近似，而当本构方程并非解析的时，则极有可能产生误导．对于各向异性情况，前者是与坐标无关的，但已有的后者的形式则是与坐标有关的．

第 2，张量值多项式完备表示可以利用 Pipkin-Rivlin 方法[102] 从已知整基中直接获得，但一般来说即使整基是不可约的，它也并非是不可约的．相反，张量值函数的不可约表示可以利用 Pipkin-Rivlin 方法立即从已知的标量值函数不可约表示中得出，但即使这些表示来自不可约函数基，一般也是不完备的．以上问题说明了对于张量值函数和张量值多项式，独立确定其完备和不可约表示都是必要的．

第 3，关于在三维空间四方、三方、六方和立方晶系以及非晶 n 方系和二十面系中对称群下推导张量函数的一般完备和不可约表示的问题依然有待于解决．由于基本结构张量的简洁性，这项工作理当没有太大的难度，但工作量却很大．然而，寻求包含四阶或更高阶张量在内的三维空间张量函数完备和不可约表示的工作似乎相当困难．即使只关于三维空间中单

个四阶双重对称张量变量，我们仍没有得到一个各向同性整基或函数基．将张量简化成不可约张量之和是有所助益的．

第 4，材料对称性对张量泛函加以约束是一个重要的课题，但在本文中没有提及，因作者忧虑本文是作为面向应用力学的一个综述，其篇幅业已有点过长且多少过于专业化．另一个重要原因在于在内变量热力框架中，只有张量函数而没有泛函出现在本构方程中［见（10.7）和（10.8）］．进一步的原因在于导出的张量函数表示可直接应用于导出泛函表示，见 Wineman 和 Pipkin [168] 的有关论述．

第 5，举一个能更详尽解释上述最后一点的例子．考虑一个各向同性简单材料 [92,159]，在现时 t 的 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}(t)$ 可以表示为左 Cauchy-Green 变形张量 $\mathbf{B}$ 的历史的一个各向同性二阶对称张量值泛函，即

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\mathscr{F}\{\mathbf{B}(\tau),\ -\infty<\tau\leqslant t\} \tag{11.1}$$

根据 Wineman 和 Pipkin [168]，我们可以形式地将 $\mathscr{F}\{\mathbf{B}(\tau),-\infty<\tau\leqslant t\}$ 看作是无穷多个二阶对称张量 $\mathbf{B}(\tau_1),\mathbf{B}(\tau_2),\mathbf{B}(\tau_3),\cdots$，的各向同性张量值函数．这样，从表 1 和 2 中可以直接读出相应的完备和不可约表示，即 $\boldsymbol{\sigma}(t)$ 是下面各形式不变量的一个线性泛函：

$$\mathbf{I},\mathbf{B}(\tau),\ \mathbf{B}^2(\tau),\ \langle\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}(\mu)\rangle_s,\ \langle\mathbf{B}^2(\tau)\mathbf{B}(\mu)\rangle_s,\ \langle\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^2(\mu)\rangle_s \tag{11.2}$$

且作为下面各不变量的一般泛函：

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}\mathbf{B}(\tau),\ \operatorname{tr}\mathbf{B}^2(\tau),\ \operatorname{tr}\mathbf{B}^3(\tau),\ \operatorname{tr}\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}(\mu),\ \operatorname{tr}\mathbf{B}^2(\tau)\mathbf{B}(\mu),\\&\operatorname{tr}\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^2(\mu),\ \operatorname{tr}\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}(\mu)\mathbf{B}(\nu)\end{aligned} \tag{11.3}$$

最后，我们要评论性地指出，张量函数表示即使是完备和不可约形式，它们对于最终告知具体材料的实际本构方程仍显得过于一般化．故对在张量函数表示的基础上列出本构方程来讲，材料内部限制的研究是必要和重要的．例如，根据张量函数表示定理，一个各向同性超弹性材料的应变能函数 W 可以表示为左 Cauchy-Creen 变形张量 $\mathbf{B}$ 的主应变 I_{B}，II_{B} 和 III_{B} 的一个标量值函数．如果材料是不可压缩的，W 简化成形式 $W=W(I_{\mathrm{B}},II_{\mathrm{B}})$，因为不可压缩性使 $III_{\mathrm{B}}=1$．进一步，橡胶材料单轴和双轴应变时的应力-应变曲线的独特形式将橡胶的函数 $W(I_{\mathrm{B}},\ II_{\mathrm{B}})$ 约束成更加特定的形式．

致谢 作者特别感谢中科院院士、清华大学黄克智教授，他建议作者撰写了此文，并通过美国 Marquette 大学的 G．E．O．Widera 教授将本文推荐给 Applied Mechanics Reviews．作者同时十分感谢 J.P.Boehler 教授、A.J.M.Spencer 教授以及论文审稿者所提出的非常有用的建议和意见．作者在本课题方面所做的工作主要完成于对英国 Nottingham 大学、德国 Aachen 理工大学和法国 Joseph Fourier 大学 Grenoble 分校的访问工作期间．对 A.J.M.Spencer、J. Betten、和 J. P. Boehler 三位教授的热情友好接待表示深深的谢意．一并感谢英国皇家学会、德国洪堡基金会、法国外交部、中国国家自然科学基金会和国家教委基金会的资助．

参 考 文 献

1 Adams B L, Boehler J P, Guidi M, Onat E T. Group theory and representation of microstructure and mechanical behavior of polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids,* **40** (1992): 723-737

2 Adkins J E. Symmetry relations for orthotropic and transversely isotropic materials. *Arch. Ratl. Mech. Anal.,* **4** (1960): 193-213

3 Adkins J E. Further symmetry relations for transversely isotropic materials. *Arch. Ratl. Mech. Anal.,* **5** (1960): 263-274

4 Adkins J E. Non-linear diffusion. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.,* A**255** (1963): 607

5 Allirot D, Boehler J P. Evolution des propriés mécaniques d'une roche stratifiée sous pression de confinement. In: Balkema A A, Rotterdam. Proc. of the 4th Int. Congress on Rock Mech., Vol 1. (1979): 15-22

6 Allirot D, Boehler J P, Sawczuk A. Irreversible deformations of an anisotropic rock under hydrostatic pressure. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.,***14** (1977): 77-83

7 Allirot D, Boehler J P, Sawczuk A. Yielding and failure of transversely isotropic solids; Part 1: experiments. *Res. Mechanica,* **4** (1982): 97-113

8 Baltov A, Sawczuk A. A rule of anisotropic hardening. *Acta Mech.,***1** (1965): 81-92

9 Bao G, Smith G F. Syzygies, orbits, and constitutive equations. In: Boehler J P (ed). Yielding, Damage, and Failure of Anisotropic Solids. Mechanical Engineering Publications, London (1990): 147-154

10 Bao G. Application of group and invariant-theoretic methods to the generation of constitutive equations. Ph.D. Dissertation, Lehigh University (1987)

11 Basista M. Tensor function representations as applied to deriving constitutive relations for skewed anisotropy. *ZAMM,***65** (1985): 151-168

12 Betten J. Ein Beitrag zur Invariantentheorie in der Plastomechanik anisotroper Stoffe. *ZAMM,* **56** (1976): 557-559

13 Betten J. Representation of constitutive equations in creep mechanics of isotropic and anisotropic materials. In: Ponter A R S, Hayhurst D R, (eds). Creep in Structures. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York (1981): 179-201

14 Betten J. Creep theory of anisotropic solids.*J. Rheology,***25** (1981): 565-581

15 Betten J. Integrity basis for a second-order and a fourth-order tensor. *Int. J. Math. & Math. Sci.,***5** (1982): 87-96

16 Betten J. Theory of invariants in creep mechanics of anisotropic solids. In: Boehler J P (ed). Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague/Boston/London (1982): 65-80

17 Betten J. Damage tensors in continuum mechanics. *J. Méc Théor Appl.,***2** (1983): 12-32

18 Betten J. Interpolartion methods of tensor functions. In: Avula X J R, Kalman R E, Liapis A I, Rodin E Y (eds). Mathematical Modelling in Science and Technology. Pergamon Press, New York/.../Frankfurt (1984): 52-57

19 Betten J. On the representation of the plastic potential of anisotropic solids. In: Boehler J P (ed). Plastic Behavior of Anisotropic Solids. CNRS, Paris (1985): 213-228

20 Betten J. Irreducible invariants of fourth-order tensors. In: Avula X J R, Leitmann G, Mote C D, Rodin E Y (eds). Mathematical Modelling in Science and Technology. Pergamon Press, New York (1986)

21 Betten J. Elastizitäts- und Plastizitätslehre. 2nd ed, Vieweg (1986): 311-316

22 Betten J. Tensorrechnung für Ingenieure. Vieweg-Verlag. Stuttgart (1987)

23 Betten J. Applications of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity,***4** (1988): 29-46

24 Betten J. Recent advances in mathematical modelling of materials behaviour.*Mathematical and Computer Modeling,***14** (1990): 37-51

25 Betten J. Recent advances in applications of tensor functions in solid mechanics.*Advances in Mechanics,***14** (1991): 79-109

26 Betten J, Helisch W. Irreduzible Invarianten eines Tensors vierter Stufe.*ZAMM,***72** (1992): 45-57

27 Boehler J P. Sur les formes invariantes dans le sous-groupe orthotrope de révolution des transformations orthogonales de la relation entre deux tenseurs symétriques du second ordre. *ZAMM*, **55** (1975): 09-611

28 Boehler J P. Sur la loi de comportement d'un milieu orthotrope de révolution en at de déformation plane. *ZAMM*,**56** (1976): 502-503

29 Boehler J P. On irreducible representations for isotropic scalar functions. *ZAMM*,**57** (1977): 323-327

30 Boehler J P. Lois de comportement anisotrope des milieux continus. *J. M.C.*,**17** (1978): 153-190

31 Boehler J P. A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy. *ZAMM*,**59** (1979): 157-167

32 Boehler J P (ed). Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids. Editions du CNRS. Paris and M. Nijhoff, The Hague (1982)

33 Boehler J P (ed). Plastic Behavior of Anisotropic Solids. CNRS. Paris (1985): 213-228

34 Boehler J P. On a general concept of isotropic and anisotropic hardening. In: Sawczuk A and Bianchi G (eds). Plasticity Today, Elsevier Publishing Company (1985): 483-502

35 Boehler J P (ed). Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics. CISM Courses and Lectures No. 292, Springer-Verlag, Berlin (1987)

36 Boehler J P. Chapters 1 to 7. In: Boehler J P (ed). Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics, CISM Courses and Lectures No. 292. Springer-Verlag, Berlin (1987)

37 Boehler J P (ed). Yielding, Damage, and Failure of Anisotropic Solids. Mechanical Engineering Publications, London (1990)

38 Boehler J P (ed). Failure Criteria of Structured Media. Balkema A A (1993)

39 Boehler J P, Delafin M. Failure criteria for unidirectional fiber reinforced composites under confining pressure. In: Boehler J P (ed). Mechanical Behavior of Anisotropic Solids. Editions du CNRS (1982): 449-470

40 Boehler J P, El Aoufi L, Raclin J. On experimental testing methods for anisotropic materials. *Res Mechanica*,**21** (1987): 73-95

41 Boehler J P, Kirillov Jr A A, Onat E T. On the polynomial invariants of elasticity tensor. *J. Elasticity*,**34** (1994): 97-110

42 Boehler J P, Koss S. Evolution of anisotropy in sheet-steels submitted to off-axes large deformations. In: Brüller O et al. (eds). Advances in Continuum Mechanics. Springer-Verlag, Heidelberg, New York (1991): 143-158

43 Boehler J P, Raclin J. Representations irréductibles des fonctions tensorielles anisotropes non-polynomiales de deux tenseurs symétriques. *Arch. Mech. Stos.*,**29** (1977): 431-444

44 Boehler J P, Raclin J. Anisotropic hardening of prestrained rolled sheet-steel. In: Current Advances in Mechanical Design and Production, Second Cairo University MDP Conference (1982): 483-492

45 Boehler J P, Raclin J. Failure criteria for glass-fiber reinforced composites under confining pressure. *J. Struct. Mech.*,**13** (1985): 371-393

46 Boehler J P, Sawczuk A. Application of representation theorems to describe yielding of transversely isotropic solids. *Mech. Res.Comm.*,**3** (1976): 277-283

47 Boehler J P, Sawczuk A. On yielding of oriented solids. *Acta. Mech.*,**27** (1977): 185-206

48 Brauer R. On the relation between the orthogonal group and the unimodular group. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**18** (1965): 97-99

49 Cauchy A-L. Mémoire sur les systémes isotropes de points matériels. *Mém. Acad. Sci. Paris*,**22**, 615-654; Oeuvres (1) 2 (1850): 351-386

50 Chaboche J-L. Continuous damage mechanics. A tool to describe phenomena before crack initiation,*Nuclear Engng Design*,**64** (1981): 233-247

51 Chaboche J-L. Damage induced anisotropy: On the difficulties associated with the active / passive unilateral condition. *Int. J. Damage Mech.*, **1** (1992): 148-171

52 Cohen H, Wang C-C. On the response and symmetry of elastic materials with internal constraints. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**99** (1987): 1

53 Coleman B D, Gurtin M E. Thermodynamics with internal state variables. *J. Chem. Phys.*, **47** (1967): 597-613

54 Coleman B D, Noll W. Material symmetry and thermostatic inequalities in finite elastic deformations. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **15** (1964): 87-111

55 Dafalias Y F. The plastic spin. *J. Appl. Mech.*, **52** (1985): 865-871

56 Dafalias Y F. Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations, Part I: Kinematics. *Acta Mech.*, **69** (1987): 119-138

57 Dafalias Y F. Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations, Part II: Kinetics. *Acta Mech.*, **73** (1988): 121-146

58 Dienes J K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies, *Acta Mech.*, **32** (1979): 217-232

59 Dienes J K. A discussion of material rotation and stress rate. *Acta Mech.*, **65** (1987): 1-11

60 Ericksen J L. On the symmetry and stability of thermoelastic solids. *J. Appl. Mech.*, **45** (1978): 740

61 Ericksen J L. On the symmetry of deformable crystals. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **72** (1979): 1-13

62 Ericksen J L. Changes in symmetry in elastic crystals. In: Carlson D E; Shield R T (eds). Finite Elasticity. Martinus Nijhoff Publisher, The Hague (1982): 167-177

63 Eringen A C (ed). Continuum Physics. Vol 2, Academic Press, New York/London (1975)

64 Germain P, Nguyan Q S, Suquet P. Continuum thermodynamics. *J. Appl. Mech.*, **50** (1983): 1010-1020

65 Green A E, Rivlin R S. The mechanics of non-linear materials with memory, Part I. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **1** (1957): 1-21, 470

66 Green A E, Rivlin R S, Spencer A J M. The mechanics of non-linear materials with memory, Part II. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **3** (1959): 82-90

67 Guo Z-H, Lehmann T H, Liang H-Y, Man C-S. Twirl tensors and the tensor equation AX − XA = C. *J. Elasticity*, **27** (1992): 227-245

68 Gurevich G B. Foundations of the Theory of Algebraic Invariants, P. Noordhoff, Groningen (1964)

69 Hahn T. Space-group symmetry. In: International Tables for Crystallography, Vol A, 2nd ed, Dordrecht, D. Reidel (1987)

70 Hannabuss K C. The irreducible components of homogeneous functions and symmetric tensors. *J. Inst. Maths. Applics.*, **14** (1974): 83-88

71 Helisch W. Invariantensysteme und Tensorgeneratoren bei materialtensoren zweiter und vierter Stufe, Doctoral Thesis. Technical University Aachen (1993)

72 Hill R. Aspects of invariance in solid mechanics. In: Chia-Shun Yih (ed). Advances in Applied Mechanics, Vol 18 (1978): 1-75

73 Hodge P G. Discussion on W. Prager paper "A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids". *J. Appl. Mech.*, **24** (1957): 482-483

74 Huo Y-Z, Del Piero G. On the completeness of the crystallographic symmetries in the description of the symmetries of elastic tensor. *J. Elasticity*, **25** (1991): 203-246

75 Kiral A, Smith G F. On the constitutive relations for anisotropic materials — triclinic, monoclinic, rhombic, tetragonal and hexagonal crystal systems. *Int. J. Engng. Sci.*, **12** (1974): 471-490

76 Korsgaard J. On the representation of two-dimensional isotropic functions. *Int. J. Engng. Sci.*, **28** (1990): 653-662

77 Krajcinovic D. Continuous damage mechanics. *Appl. Mech. Rev.*, **37** (1984): 1-6

78 Krajcinovic D. Damage mechanics. *Mechanics of Materials*, **8** (1989): 117-197

79 Krajcinovic D, Fanella D. A micromechanical damage model for concrete. *Engng. Fract. Mech.*, **25** (1986): 585-596

80 Krajcinovic D, Sumarac D, Fanella D. A micromechanically-based constitutive law for brittle materials with application to concrete and rocks. In: Boehler J P (ed). Yielding, Damage,

and Failure of Anisotropic Materials. Mechanical Engineering Publications, London (1990): 571-588
81 Kunin I A. An algebra of tensor operators and its applications to elasticity. *Int. J. Engng. Sci.*,**12** (1981): 1551-1561
82 Kunin I A. Elastic Media with Microstructure - II: Three-Dimensional Models. Springer-Verlag, Berlin (1983)
83 Leckie F A, Onat E T. Tensorial nature of damage measuring internal variables. In: IUTAM colloquium on Physical Non-Linearities in Structural Analysis, Springer, Berlin (1981): 140-155
84 Liu I-S. On representations of anisotropic invariants. *Int. J. Engng. Sci.*, **10** (1982): 1099-1109
85 Lokhin V V, Sedov L I. Nonlinear tensor functions of several tensor arguments. *J. Appl. Math. Mech.*,**27** (1963): 597-629 (transl. of *Priklad Mat. Mekh.* **27**(1963): 393-417)
86 Markov K Z, Vakulenko A. On the representation for tensor functions. *Bull. Ac. Pol.*,**29** (1981): 169-176
87 Murnaghan F D. The Theory of Group Representations. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md (1938)
88 Negahban M, Wineman A S. Material symmetry and the evolution of anisotropies in a simple material - I. Change of reference configuration. *Int. J. Non-linear Mech.*,**24** (1989): 521-536
89 Negahban M, Wineman A S. Material symmetry and the evolution of anisotropies in a simple material - II. The evolution of material symmetry. *Int. J. Non-linear Mech.*,**24** (1989): 537-549
90 Neumann F E. Vorlesungenüber die Theorie der Elastizität der festen Körper. Leipzig (1885)
91 Noll W. On the continuity of the solid and fluid states. *J. Ratl. Mech. Anal.*,**4** (1955): 3-81
92 Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**2** (1958): 197-226
93 Noll W. Proof of the maximality of the orthogonal group in the unimodular group. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**18** (1965): 100-102
94 Noll W. Representations of certain isotropic tensor functions. Dept. Math. Carnegie Institute of Technology Report, June (1967)
95 Noll W. A new mathematical theory of simple materials. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **48** (1972): 1-50
96 Nye J F. Physical Properties of Crystals. Oxford Univ. Press (Clarendon), London/New York (1957)
97 Onat E T. Representation of mechanical behavior in the presence of internal damage. *Engng. Fract. Mech.*,**25** (1986): 605-614
98 Onat E T, Leckie F A. Representation of mechanica behavior in the presence of changing internal structure. *J. Appl. Mech.*, **55** (1988): 1-10
99 Pennisi S. On third order tensor-valued isotropic functions. *Int. J. Engng. Sci.*,**30** (1992): 679-692
100 Pennisi S, Trovato M. On the irreducibility of Professor G.F. Smith's representations for isotropic functions. *Int. J. Engng. Sci.*, **25** (1987): 1059-1065
101 Pipes R B (ed). Composite Material Series, Vol 1 - Vol 6. Elsevier, Amsterdam/Oxford (1989)
102 Pipkin A C, Rivlin R S. The formulation of constitutive equations in continuum physics, Part 1. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **4** (1959): 129-144
103 Pipkin A C, Rivlin R S. *Lincei Memorie,* **8** (1966): 1-29
104 Pipkin A C, Rivlin R S. The formulation of constitutive equations in continuum physics I. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **4** (1969): 129-144
105 Pipkin A C, Wineman A S. Material symmetry restrictions on non-polynomial constitutive equations. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**12** (1963): 420-426
106 Podio-Gudugli P, Virga E G. Transversely isotropic elasticity tensors. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A**411** (1987): 85-93
107 Reiner M. A mathematical theory of dilatancy. *Amer. J. Math.*,**67** (1945): 350-362
108 Reiner M. Elasticity beyond the elastic limit. *Amer. J. Math.*, **70** (1948): 433-446

109 Rivlin R S. Large elastic deformations of isotropic materials, IV. Further developments of the general theory. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A**241** (1948): 379-397
110 Rivlin R S. The hydrodynamics of non-Newtonian fluids: I. *Proc. Roy. Soc. Lond.*,A **193** (1948): 260-281
111 Rivlin R S. Further remarks on the stress-deformation relations for isotropic materials.*Ratl. Mech. Anal.*,**4** (1955): 681-702
112 Rivlin R S. The formulation of constitutive equations in continuum physics: II. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**4** (1960): 262-272
113 Rivlin R S. Constitutive equations involving functional dependence of one vector on another. *ZAMP*,**12** (1961): 447-452
114 Rivlin R S. Viscoelastic fluids. In: Temple G, Seeger R (eds). Frontiers of Research in Fluid Dynamics. Wiley (Interscience), New York (1965)
115 Rivlin R S. Nonlinear viscoelastic solids. *SIAM Review*,**7** (1965): 323-340
116 Rivlin R S (ed). Non-Linear Continuum Theories in Mechanics and Physics and their Applications. Edizioni Cremonese, Rome (1970)
117 Rivlin R S, Ericksen J L. Stress-deformation relations for isotropic materials. *J. Ratl. Mech. Anal.*,**4** (1955): 323-425
118 Rivlin R S, Smith G F. Orthogonal integrity basis for N symmetric matrices. In: Abir D (ed). Contributions to Mechanics. Pergamon Press, Oxford/.../Braunschweig (1969): 121-141
119 Rivlin R S, Smith G F. On identities for 3 × 3 matrices. *Rend di Matematica Serie* VI,**8** (1975): 345-353
120 Rivlin R S, Smith G F. The description of material symmetry in materials with memory. *Int. J. Solids. Struct.*,**23** (1987): 325-334
121 Rychlewski J. Zur Abschätzung der Anisotropie. *ZAMM*,**65** (1985): 256-258
122 Sawczuk A, Stutz P. On formulation of stress-strain relations for soils at failure. *ZAMP*,**19** (1968): 770-778
123 Schur I. Vorlesungen über Invariantentheorie, bearbeitet und herausgegeben von H. GRUNSKY, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 143, Springer-Verlag, Berlin /Heidelberg/New York (1968)
124 Sedov L I, Lokhin V V. The specification of point symmetry groups by the use of tensors (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **149** (1963): 796-797
125 Silber G. Aggregate isotroper Tensoren zur Darstellung hyperelastischer anisotroper Stoffe. *ZAMM*,**68** (1988): 39-45
126 Smith G F. On the minimality of integrity bases for symmetric 3 × 3 matrices. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**5** (1960): 382-389
127 Smith G F. On the yield condition for anisotropic materials. *Q. Appl. Math.*, **20**(1962): 241-247; Further results on the strain-energy function for anisotropic elastic materials,*Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**10** (1962): 108-118
128 Smith G F. On isotropic integrity bases. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**18** (1965): 282-292
129 Smith G F. Tensor and integrity bases for the gyroidal crystal classes. *Q. Appl. Math.*,**25** (1967): 218-221
130 Smith G F. On the generation of integrity bases. *Atti. Accad. Naz. Lincei., Ser.*8,**9** (1968): 51-101
131 Smith G F. On a fundamental error in two papers of C.-C. Wang "On representations for isotropic functions, Parts I and II". *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**36** (1970): 161-165
132 Smith G F. The generation of integrity bases. In: Rivlin R S (ed). Non-Linear Continuum Theories in Mechanics and Physics and their Applications. Edizioni Cremonese, Roma (1970): 311-351
133 Smith G F. On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. *Int. J. Engng. Sci.*,**9** (1971): 899-916
134 Smith G F. On transversely isotropic functions of vectors, symmetric second-order tensors and skew-symmetric second-order tensors.*Q. Appl. Math.*,**39** (1982): 509-516

135 Smith G F, Kiral E. Integrity bases for N symmetric second-order tensors—the crystal classes. *Rend. Circ. Mat. Palermo.* II, Ser., **18** (1969): 5-22
136 Smith G F, Rivlin R S. The anisotropic tensors. *Q. Appl. Math.*,**15** (1957): 308-314
137 Smith G F, Rivlin R S. Stress-deformation relations for anisotropic solids. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**1** (1957): 107-112
138 Smith G F Rivlin R S. The strain energy function for anisotropic elastic materials. *Trans. Amer. Math. Soc.*,**88** (1958): 175-193
139 Smith G F, Rivlin R S. Integrity bases for vectors — The crystal classes. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**15** (1964): 169-221
140 Smith G F, Smith M M, Rivlin R S. Intergrety bases for a symmetric tensor and a vector — the crystal classes. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **12** (1963): 93-133
141 Smith G F, Spencer A J M. A continuum theory of a plastic-rigid solid reinforced by two families of inextensible fibres. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **23** (1970): 489-504
142 Song G-Q, Yang D-P, Zheng Q-S. Representation of quadratic elasticity tensors under various material symmetries (in Chinese). *J. Jiangxi Polytechnic Univ.*,**12**, 2 (1990): 14-26
143 Spencer A J M. The invariants of six symmetric 3 × 3 matrices. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**7** (1961): 64-77
144 Spencer A J M. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: Part II. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**18** (1965): 51-82
145 Spencer A J M. A note on the decomposition of tensors into traceless symmetric tensors. *Int. J. Engng. Sci.*,**8** (1970): 489-505
146 Spencer A J M. On generating functions for the number of invariants of orthogonal tensors. *Mathematika*,**17** (1970): 275-286
147 Spencer A J M. Theory of invariants. In: Eringen A C (ed). Continuum Physics, Vol I, Academic Press, New York (1971): 239-353
148 Spencer A J M. Deformations of Fibre-Reinforced Materials. Oxford Univ. Press (1972)
149 Spencer A J M. The formulation of constitutive equations for anisotropic solids. In: Boehler J P (ed). Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids. Editions du CNRS, Paris and M Nijhoff, The Hague (1982): 2-26
150 Spencer A J M. In: Boehler J P (ed). Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics, CISM Courses and Lectures No. 292, Springer-Verlag, Berlin (1987): 141-201
151 Spencer A J M, O'Neill, J M, Zheng Q-S. Second-order effects in anisotropic themoelasticity. In: Ferrarese G (ed). Advances in Modern Continuum Dynamics. Pitagora Editrice Bologna (1993): 207-215
152 Spencer A J M, Rivlin R S. The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**2** (1959): 309-336
153 Spencer A J M, Rivlin R S. Finite integrity bases for five or fewer symmetric 3 × 3 matrices. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **2** (1959): 435-446
154 Spencer A J M, Rivlin R S. Further results on the theory of matrix polynomials. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**4** (1960): 214-230
155 Spencer A J M, Rivlin R S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors, Part 1. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**9** (1962): 45-63
156 Spencer A J M, Rivlin R S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors, Part 2. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **18** (1965): 51-82
157 Telega J J. Some aspects of invariant theory in plasticity, Part I. New results relative to representation of isotropic and anisotropic tensor functions. *Arch. Mech.*,**36** (1984): 147-162
158 Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechancs, Vol 1. Academic Press (1977)
159 Truesdell C, Noll W. The non-linear field theories of mechanics. In: Flügge S (ed). *Handbuch der Physik*, Vol. III/3. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York (1965)
160 Vainshtein B K. Modern Crystallography, Vol I. Springer-Verlag, Berlin /Heidelberg /New York (1981)
161 Wang C-C. On representations for isotropic functions, Part I. Isotropic functions of symmetric tensors and vectors. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**33** (1969): 249-267

162 Wang C-C. On representations for isotropic functions— Part II. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**33** (1969): 268-287

163 Wang C-C. A new representation theorem for isotropic functions: A answer to Professor G.F. Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions, Part 1. Scalar-valued isotropic functions. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**36** (1970): 166-197

164 Wang C-C. A new representation theorem for isotropic functions: A answer to Professor G.F. Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions, Part 2. Vector-valued isotropic functions, symmetric tensor-valued isotropic functions, and skew-symmetric tensor-valued functions. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**36** (1970): 198-223

165 Wang C-C. Corrigendum to my recent papers on "Representations for isotropic functions" Vol.36, pp. 166-197, 198-223 (1970). *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**43** (1971): 392-395

166 Wang C-C, Liu I-S. A note on material symmetry. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**74** (1980): 227

167 Weyl H. The Classical Groups, Their Invariants and Representations. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1939)

168 Wineman A S, Pipkin A C. Material symmetry restrictions on constitutive equations. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*,**17** (1964): 184-214

169 Wineman A S, Rajagopal K R, Negahban M. Change in material symmetry associated with deformation: uniaxial extension. *Int. J. Engng. Sci.*,**26** (1988): 1307

170 Wiren F, Norris C B. Mechanical properties of a laminate designed to be isotropic, Report No. 841, Forest Products Laboratory. Forest Service, US Department of Argriculture (1953)

171 Xiong Z-H, Zheng Q-S. General algorithms for the polar decomposition and strains. *Acta Mech. Sinica*,**4** (1988): 175-181

172 Xiong Z-H, Zheng Q-S. Canonical representations and degree of freedom formula of orthogonal tensors in n-dimensional Euclidean space. *Appl. Math. Mech.* (English edi.),**10** (1989): 93-101

173 Xiong Z-H, Zheng Q-S. Some fundamental problems in nonlinear field theories of mechanics (in Chinese). *Advances in Mechanics*,**21** (1991): 310-332

174 Zhang J M, Rychlewski J. Structural tensors for anisotropic solids. *Arch. Mech.*,**42** (1990): 267-277

175 Zheng Q-S. General constructions for homogeneous isotropic tensor functionals and partioned isotropic tensor functionals (in Chinese). *J. Jiangxi Polytechnic Univ.*,**8**, 1 (1986): 1-19

176 Zheng Q-S. The formulation of the generalized constitutive equations from their irrotational forms for simple materials. *Chinese Science Bulletin*,**37** (1991): 1217-1221; (in Chinese version)**36** (1990): 1751-1754

177 Zheng Q-S. On the generalization of constitutive laws from their arotational forms. *Acta Mech.*,**91** (1992): 97-105

178 Zheng Q-S. On the representations for isotropic vector-valued, symmetric tensor-valued and skew-symmetric tensor valued functions. *Int. J. Engng. Sci.*,**31** (1993): 1013-1024

179 Zheng Q-S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors, Part I. Two dimensional orthotropic and relative isotropic functions and three dimensional relative isotropic functions. *Int. J. Engng. Sci.*,**31** (1993):1399-1409

180 Zheng Q-S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors: Part II. The representations for three dimensional transversely isotropic functions. *Int. J. Engng. Sci.*,**31** (1993): 1411-1423

181 Zheng Q-S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors, Part III. The irreducibility of the representations for three dimensional transversely isotropic functions. *Int. J. Engng. Sci.*, **31** (1993): 1425-1433

182 Zheng Q-S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors, Part IV. The representations for three dimensional orthotropic functions. *Int. J. Engng. Sci.*,**31** (1993): 1435-1443

183 Zheng Q-S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors, Part V. The irreducibility of the representations for three dimensional orthotropic functions and summary. *Int. J. Engng. Sci.*, **31** (1993): 1445-1453
184 Zheng Q-S. Two-dimensional tensor function representation for all kinds of material symmetry. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A**443** (1993): 127-138
185 Zheng Q-S. A note on representation for isotropic functions of a 4th-order tensor in 2-dimensional space. *ZAMM*, **74** (1994): 357-359
186 Zheng Q-S. A survey of the basic results in the theory of representations for tensor functions. *Int. J. Engng. Sci.* (1994)
187 Zheng Q-S, Betten J. On the tensor function representations of 2nd-order and 4th-order tensors, Part I. *ZAMM* (in press) (1994)
188 Zheng Q-S, Betten. The formulation of constitutive equations for fibre-reinforced composites in plane problems: Part II. *Arch. Appl. Mech.* (in press) (1994)
189 Zheng Q-S, Betten J, Spencer A J M. The formulation of constitutive equations for fibre-reinforced composites in plane problems: Part I. *Arch. Appl. Mech.*, **62** (1992): 530-543
190 Zheng Q-S, Boehler J P. The description, classification, and reality of material and physical symmetries. *Acta. Mech.*, **102** (1994): 73-89
191 Zheng Q-S, Boehler J P. Tensor function representations as applied to formulating constitutive laws for clinotropic materials. *Acta Mech. Sinica*, **10** (1994): 336-348
192 Zheng Q-S, Boehler J P. On alternative form of orthotropic tensor function representation. (in preparation) (1994)
193 Zheng Q-S, Spencer A J M. On the canonical representations for Kronecker power of orthogonal tensors with applications to material symmetry problems. *Int. J. Engng. Sci.*, **31** (1993): 617-635
194 Zheng Q-S, Spencer A J M. Tensors which characterize anisotropies. *Int. J. Engng. Sci.*, **31** (1993): 679-693
195 Zheng Q-S, Tai T-M. Two simple proofs of Cayley-Hamilton theorem and two representation theorems. *Appl. Math. Mech.*, **5** (1984): 977-984

清华大学工程力学系

方辉宇 译自： Theory of representations for tensor functions — A unified invariant approach to constitutive equations. *Appl. Mech. Rev.*, **47**, 11(1994):545-587