

边界积分方程中超奇异积分的解法

董春迎 谢志成 姚振汉 杜庆华

清华大学工程力学系, 北京 100084

摘要 本文对边界积分方程中所存在的超奇异积分的数值解法作了综述, 并介绍了它的一些应用。

关键词 边界积分方程; 超奇异积分; 数值解法

1 引言

边界元法作为边界积分方程的离散数值解法有它特有的优点, 同时也在数值计算上引出一些新问题。以弹性问题为例, 用边界积分方程求得物体边界上的未知量后, 就可用内点的应力边界积分方程求得物体内部点处的应力分量。但是, 当内点趋于物体的边界时, 积分方程中存在着超奇异积分, 使得数值积分发生困难。

到目前为止, 应用超奇异积分的典型领域是研究断裂力学中的裂纹问题。在其它领域里, 超奇异积分方程也有用, 且有好处。如板弯曲、设计的灵敏度分析以及波的散射问题等。特别是在弹性或弹塑性问题中, 应用边界应力的积分方程能够直接获取边界上各点的应力分量, 这样为边界元法的直接误差估计^[10]提供了较好的途径。正如文[16]中所指出的, 边界元法的误差估计可为没有解析解的问题提供一种检验所得结果正确与否的尺度。

2 边界积分方程

对于弹性问题, 由边界元法解出边界位移和边界力后, 内点位移和应力就可以由如下的积分公式求出:

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P; q) t_j(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} T_{ij}(P; q) u_j(q) d\Gamma(q) \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(P) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(P; q) t_k(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} S_{ijk}(P; q) u_k(q) d\Gamma(q) \quad (2)$$

式中 U_{ij} , T_{ij} , D_{ijk} 及 S_{ijk} 为对应于开尔文解的核函数。其具体表达式如下:

$$[U_{ij}]_{3D} = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)r} \{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j \} \quad (3)$$

$$[U_{ij}]_{2D} = \frac{1+\nu}{4\pi E(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_i r_j \right\} \quad (4)$$

$$[T_{ij}]_{3D} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}[(1-2\nu)(u_j r_i - u_i r_j) - n_m r_m \{(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j\}] \quad (5)$$

$$[T_{ij}]_{2D} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [n_m r_m \{(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j\} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i)] \quad (6)$$

$$[D_{ijk}]_{3D} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{(1-2\nu)(r_j \delta_{jk} + r_j \delta_{ki} - r_k \delta_{ij}) + 3r_i r_j r_k\} \quad (7)$$

$$[D_{ijk}]_{2D} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{(1-2\nu)(r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ik} - r_k \delta_{ij}) + 2r_i r_j r_k\} \quad (8)$$

$$[S_{ijk}]_{3D} = \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)r^3} [3n_m r_m \{(1-2\nu)r_k \delta_{ij} + \nu(r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki}) - 5r_i r_j r_k\} + 3\nu(n_i r_j + n_j r_i)r_k + (1-2\nu)(3n_k r_i r_j + n_i \delta_{jk} + n_j \delta_{ki}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij}] \quad (9)$$

$$[S_{ijk}]_{2D} = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)r^2} [2n_m r_m \{(1-2\nu)r_k \delta_{ij} + \nu(r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki}) - 4r_i r_j r_k\} + 2\nu r_k (n_i r_j + n_j r_i) + (1-2\nu)(2n_k r_i r_j + n_i \delta_{jk} + n_j \delta_{ki}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij}] \quad (10)$$

以上各式中 r 是 P 与 q 之间的距离。对三维问题 $i, j, k, m = 1, 2, 3$ ；二维问题 $i, j, m = 1, 2$ 。 r_i 等是方向余弦。

当 P 点趋于物体边界时，在积分公式 (1)、(2) 中的一些积分变为奇异积分。其实此时公式 (1) 就趋于通常采用的边界积分方程，其中含 $\ln r$ (二维)、 $1/r$ (三维) 型弱奇异积分及 $1/r$ (二维)、 $1/r^2$ (三维) 型 Cauchy 主值积分，而在公式 (2) 中则除 Cauchy 主值积分外，还出现 $1/r^2$ (二维)、 $1/r^3$ (三维) 型的超奇异积分。这些积分不能直接由通常的数值积分公式求出，必须采取特殊的处理。为此，许多研究者在处理超奇异积分方面做了许多工作。下面就将这些工作做一介绍。

3 超奇异积分的数值解法

公式 (1)、(2) 中的弱奇异积分及 Cauchy 主值积分的数值求解技术已趋于完善。本文仅阐述已有的一些求解超奇异积分的方法。

3.1 分部积分法

为克服超奇异积分处理上的困难，一些研究者 (Budiansky & Rice^[1], Sladek & Sladek^[2], Cruse^[4] 等) 针对裂纹问题，借助于方程 (2)，并利用了裂纹面的位移及面力协调条件，推导了内点应力的边界积分方程

$$\sigma_{ij}(P) = - \int_{\Gamma} S_{ijk}(P; q) \Delta u_k(q) d\Gamma(q) \quad (11)$$

式中 $\Delta u_k(q) = u_k(q^+) - u_k(q^-)$ ， $u_k(q^+)$ 表示裂纹上表面的位移，而 $u_k(q^-)$ 则为下表面的位移。

为了得到适用于裂纹表面上的边界应力积分方程,他们对公式(11)通过使用分部积分法,将超奇异积分核中的一些导数项移到了边界层上,降低了奇异性。Zhang和Achenbach^[6]采用弹性动力保守积分,推导了适用于裂纹形状的边界积分方程。这个方程和使用分部积分法所得到的是一样的。这种方法仅仅对平面裂纹得到了一些数值结果。

3.2 Stokes 理论

Krishnasamy 等^[7]处理超奇异积分的方法是将含有超奇异积分的被积函数的密度函数减去密度函数在奇异点邻域中的 Taylor 级数展开式的前三项,然后再添加相应项。对这些添加项使用 Stokes 理论可将积分方程中的超奇异积分核变换为含有弱奇异积分核的边界线积分、面积分以及隅角的组合。这些变换都是在离散方程之前完成的。因为整个变换过程没有进行分部积分,所以积分方程仍然是原始变量的形式。对于平面裂纹,得到了一些数值结果。

3.3 散度理论

Budreck 等^[8]在研究平面裂纹的散射问题时,针对离散后的应力积分方程,通过使用散度定理,得到了一个改进后的适用于裂纹表面上的应力边界积分方程。这种公式仅适用于平面裂纹,而且仅允许每个单元上有一个节点(即通常的常单元)。

3.4 Guiggiani 法

[9]中将边界单元积分方程中的超奇异积分直接在自然坐标系 ξ_1, ξ_2 的平面中变换成规则的积分(如图1示)。详细的推导说明了边界应力积分方程中的超奇异积分实质上是不存在的。这种方法虽然一般,但针对具体的问题,必须做大量的推导工作,使用起来很不方便。文中的数值算例仅对三维势问题的超奇异核函数进行了计算,没有针对具体的弹性问题进行求解。

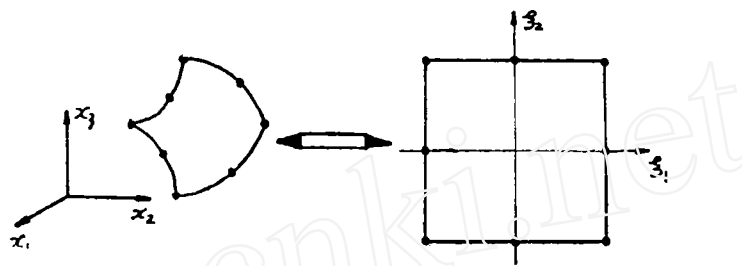


图1 边界单元的自然坐标变换

3.5 Kutt 法

[10]在给出二维平面弹性问题的边界应力积分方程的基础上,对于具有直线边界及圆弧形边界的问题,通过较为繁琐的推导,利用了 Kutt 求积公式求解了边界应力积分方程中的超奇异积分,但对于具有一般形状的物体边界,此文中没有提及处理的方法。

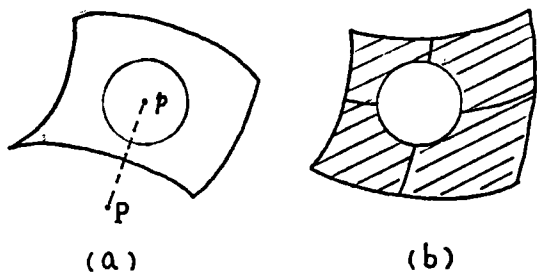


图2 典型的挖洞区
(a) 面元 (b) 区域单元

3.6 挖洞法

Krishnasmy 等^[7]通过在以奇异点为中心的附近挖去一个洞的方法(图2a),对超奇异积分进行了处理。这种方法有一个限制:内点 P 与边界的最小距离趋近于零的速度要快于空洞边界趋近于零的速度。实际上,趋近于零的要求就是要迫使挖去的空洞

有一个有限的尺寸边界。这种方法程序实现较为方便,但此方法的有效性要受到挖去空洞尺

寸的限制。尺寸挖去多少，文中并没有给出理论上的证明，因此使用起来不能令人放心。Banerjee 等^[15]在处理区域 Cauchy 主值积分时采用了挖洞法(图 2b)。对二维问题，他们取圆的面积为单元面积的 0.25% 时获得了较好的结果。但当相邻单元尺寸相差较大时，方法有效性受到了限制。

3.7 变换方程形式法

[14,15,25] 中给出了一个新的内点应力边界积分公式

$$\sigma_{ij}(P) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(P; q) t_k(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} S_{ijk}(P; q) (u_k(q) - u_k(P)) d\Gamma(q) \quad (12)$$

当内点 P 趋于边界点 p 时，公式 (12) 变为：

$$C_{ijk} \sigma_{kl}(p) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(p; q) t_k(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} S_{ijk}(p; q) (u_k(q) - u_k(p)) d\Gamma(q) \quad (13)$$

上式中 C_{ijk} 是与边界几何性质有关的量。若 p 点处于光滑边界上，则 $C_{ijk} = (1/2)\delta_{ijk}$ 。

公式 (13) 试图利用当 p 与 q 重合时， $u_k(q)$ 与 $u_k(p)$ 相等来降低超奇异积分核 S_{ijk} 的奇异性。但在根据已得近似解 $u_k(q)$ 来确定与此解相对应的域内连续的边界值 $u_k(p)$ 时，即使 p, q 重合，一般情况下 $u_k(p)$ 与 $u_k(q)$ 也不相等。因此利用上式确定边界应力的精度要受到限制。

3.8 特解法

[16] 针对线性单元给出了一组八个简单特解(即刚体位移模式、刚体转动、均匀拉伸、

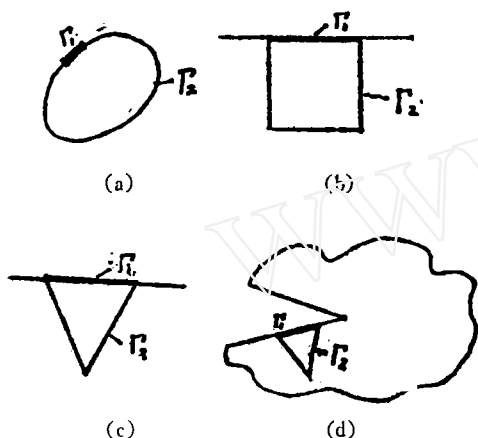


图 3 特解法的闭合面

(a) 一般边界 (b) 及 (c) 奇异单元上的特殊构造
(d) 二维裂纹面上的特殊构造

均匀剪切、纯弯曲等)，借助于它们，可以方便地确定包括超奇异积分在内的所有有关的奇异积分。实际上，这是刚体位移模式确定 Cauchy 主值积分的推广。在具体的数值处理上，为了提高计算效率，在由非奇异积分确定奇异积分的计算中，可以在原问题的除奇异单元 Γ_1 之外的整个边界 Γ_2 上计算非奇异积分(图 3a)，而是以奇异单元为一边做一正方形(图 3b)或三角形 Γ_2 (图 3c)，通过计算正方形或三角形 Γ_2 上其它的三边或二边上的非奇异积分来确定奇异积分。

对于三维问题面积分上的奇异单元，为了提高计算效率，可用类似的方法构造特殊的边界。

对于直线高次插值单元，[17] 选取了一组十二个简单特解，克服包括超奇异积分在内的所有的奇异积分。这种处理方法是上述方法的推广。

对于曲线单元，由于寻找满足平衡方程、几何方程及本构方程的特解比较困难，至今，还没有见到过这方面的报道。

3.9 Paget 法

[18,24] 从平面弹性问题的内点应力边界积分方程出发，通过极限过程，得到了边界应

力积分方程

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma_{\gamma\delta}(p) = \int_{\Gamma} D_{\alpha\beta\gamma}(p;q)t_{\gamma}(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} S_{\alpha\beta\gamma}(p;q)u_{\gamma}(q) d\Gamma(q) \quad (14)$$

式中 $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 参见 [18], \int 表示 Cauchy 主值积分, \int_{Γ} 则表示有限部分积分. 对于光滑边界上的 p 点, 方程 (14) 变为

$$\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}(p) = \int_{\Gamma} D_{\alpha\beta\gamma}(p;q)t_{\gamma}(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} S_{\alpha\beta\gamma}(p;q)u_{\gamma}(q) d\Gamma(q) \quad (15)$$

上式右端是由 Cauchy 主值积分和有限部分积分组成. 为了求解它们, 不妨设 p 点处在一个二次等参边界元上 (其实其它情况也可类似处理). 经过一定的处理, 含有 q 点的单元上的所有奇异积分均可化为标准形式

$$I(f;s) = \int_{-1}^1 \frac{f(\xi;s)}{\xi-s} d\xi \quad (16)$$

$$J(f;s) = \int_{-1}^1 \frac{h\xi(\xi;s)}{(\xi-s)^2} d\xi \quad (17)$$

这样就可利用 Paget 公式直接求解上述方程. 应该指出, Paget 公式在 $s = \pm 1$ 时是失效的. 为克服这种缺陷, [18] 采用间接的方法求得了 $s = \pm 1$ 处的应力分量. 同时, 对受均匀横向载荷的悬臂薄板梁得到了边界元沿边界的误差分布, 而且对承受均布载荷, 半径为 100 的圆板进行了应力计算, 其结果见表 1.

[18] 的方法不受直线单元的限制, 可直接推广应用于求解三维弹性、弹塑性及其它问题.

表 1 一些点的边界面力 t_n 计算值和满足边界条件的误差

计算点坐标	t_n	Δt_n
(70.90, 70.52)	2.00078	0.00078
(70.86, 70.56)	2.00017	0.00017
(70.83, 70.58)	1.99979	-0.00021
(70.77, 70.65)	2.00013	0.00013

4 结 论

通过对现有的边界积分方程中的超奇异积分处理方法的综述, 使得人们对于这种积分有了进一步的理解. 上述的各种解法都有相应的局限性, 如何克服这些局限性, 仍是今后科学工作者所要面临的任务.

就笔者的经验所知, 本文所介绍的特解法及 Paget 法似乎更有吸引力. 特解法主要有以下几个好处: (1) 所得结果比较精确; (2) 可用于二维和三维问题; (3) 不需要对含有超奇异积分核的积分进行复杂的代数变换; (4) 超奇异积分只需通过图 3 中的 Γ_2 上的非奇异积分求解. Paget 法的最大好处是不受单元边界形状的限制, 而且易于为人们所采用, 程序实施也相当方便. 对于单元内部的各点, 所得结果是比较令人满意的.

参 考 文 献

- 1 Budiansky B, Rice J R, *Wave Motion*, **1** (1979) : 187
- 2 Sladek V, Sladek J, *Appl. Math. Modelling*, **8** (1984) : 2
- 3 Bonnet M, *Boundary Element Techniques: Applications in Engineering* (ed Brebbia C A, Zamani N), Computational Mechanics Publications, Southampton (1989) : 171
- 4 Cruse T A, *Fracture Mechanics, Boundary Element Methods in Mechanics* (ed Beskos D E), North Holland (1987) : 333
- 5 Weaver J, *Int. J. Solids Structures*, **13** (1977) : 321
- 6 Zhang Ch, Achenbach J D, *ASME J. Appl. Mech.*, **55** (1988) : 104
- 7 Krishnasamy G, Schmerr L W, Rudolphi T J, Rizzo F J, *ASME J. Appl. Mech.*, **57** (1990) : 404
- 8 Budreck D E, Achenbach J D, *ASME J. Appl. Mech.*, **55** (1988) : 405
- 9 Guiggiani M, Krishnasamy G, Rudolphi T J, Rizzo F J, *ASME J. Appl. Mech.*, **59** (1992) : 604
- 10 Hildenbrand J, Kuhn G, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **10** (1992) : 209
- 11 Cruse T A, Novati G, *22nd ASTM Conference on Fracture Mechanics* (1990)
- 12 Ioakimidis N I, Pitta M S, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **69** (1988) : 325
- 13 Banerjee P K, Raveendra S T, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **23** (1986) : 985
- 14 Li Y S, Obata T, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **33** (1992) : 1451
- 15 Cruse T A, Vanburen W, *Int. J. Fract. Mech.*, **7** (1971) : 1
- 16 姚振汉, 钟晓光, 第二届工程中边界元法会议论文集, **1** (1988) : 24
- 17 霍同如, 清华大学工程力学系博士论文 (1989)
- 18 董春迎, 清华大学工程力学系博士论文 (1992)
- 19 Paget D F, *Numer. Math.*, **236** (1981) : 447
- 20 姚振汉, 董春迎, 首届全国解析与数值结合法学术会议文集 (1990) : 233
- 21 凌岭, 超双曲型方程, 西北大学出版社 (1987)
- 22 Lutz E, Gray L J, Ingraffea A R, *Boundary Elements X III* (ed Brebbia C A, Gipsen, G S), Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science (1991) : 913
- 23 Banerjee P K, Butterfield R, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw Hill (1981)
- 24 Yao Z H, Dong C Y, *Proc. 4th China-Japan Symp. on BEM* (ed Du Q H, Tanaka M), Int. Academic Publishers (1991) : 95
- 25 Matsumoto T, Tanaka M, *Proc. 4th China-Japan Symp. on BEM* (ed Du Q H, Tanaka M), Int. Academic Publishers (1991) : 53

SOME NUMERICAL SOLUTION METHODS OF HYPERSINGULAR INTEGRALS IN BIE

Dong Chunying Xie Zhicheng Yao Zhenhan Du Qinghua
Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing, 100084

Abstract In this paper numerical solution methods of hypersingular integrals in boundary integral equation have been summarized together with some of their applications.

Keywords *hypersingular integrals, numerical solution method, BIE*