

含夹杂复合材料宏观性能研究*

吴林志 杜善义

哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

石志飞

北方交通大学土建系, 北京 100044

摘要 本文综述并评价了有关含夹杂复合材料的有效弹性模量研究的代表性工作, 包括自治理论, 微分法, Eshelby-Mori-Tanaka 法, Hashin 和 Shtrikman 的变分法等。指出上述理论由于没有充分考虑复合材料内部的微结构特征, 如夹杂的形状、几何尺寸、分布和夹杂间的相互影响, 在夹杂的体积分数较大, 如大于 0.3 时已不能有效地预报复合材料的有效弹性模量。随后介绍了近来才发展起来的一种新方法——相关函数积分法。理论与实验的结果的比较表明, 该方法在夹杂体积分数较大时仍然有效。

关键词 复合材料; 有效弹性模量; 夹杂; 相互作用

1 引言

随着复合材料的不断出现和发展, 力学工作者所面临的任務已不仅仅是预报其力学性能, 更重要的是通过细观力学的理论和方法对作为结构考虑的复合材料进行设计, 以优化其力学性能。一般来说, 复合材料的基本力学性能可分为两方面, 即局部性能和宏观有效性能。对于前一个问题, 其关键之处在于如何求得复合材料内部的弹性场。而对于后一个问题, 笔者认为应根据简单合理的假设来建立一般性的理论, 并用以求解复合材料的有效性能。

对于含夹杂复合材料, 影响其有效弹性模量的因素可分为两类。一类是复合材料中每一组份材料的材料弹性常数。另一类是复合材料内部的微结构特征, 它包括夹杂的形状、几何尺寸、在基体中的分布和夹杂间的相互作用。一般情况下, 目前理论对第一类因素考虑较详细, 而对第二类因素却考虑不充分, 如 Hill^[1] 和 Budiansky^[2] 的自治理论, Smith^[3] 的广义自治理论和 Roscoe^[4] 的微分法仅考虑了夹杂的形状, 而没有充分考虑材料的其他微观几何因素。这样, 在夹杂的体积分数较大时, 这些理论已不能很好地预报复合材料的有效弹性模量。尽管 Kunin^[5] 的有效场理论考虑了夹杂的形状、几何尺寸和在基体中的分布, 但由于在推导时所作的假定过多, 这一方法也具有一定的局限性。为了克服上述弱点, 吴林

* 国家教委博士点基金资助

志^[6]在考虑夹杂的形状、几何尺寸和在基体中分布等情况下推导了复合材料的有效弹性模量。通过与实验的比较,可以发现[6]的理论预报值很接近相应的实验值。特别是在夹杂体积分数较大时该结果明显好于目前其他理论的结果,但需要指出的是[6]的结果仅限于夹杂呈周期排列的情况。

为方法的比较起见,下面我们将含夹杂复合材料有效性能的上下限研究单独作为一节进行讨论。具体安排如下:在2节中讨论自治理论、微分法、Eshelby-Mori-Tanaka法、相关函数积分法和其他方法。在3节中讨论Paul的上下限、Hashin和Shtrikman的上下限、Milton的上下限和其他上下限。在4节中进行小结。

2 含夹杂非均匀体有效特性

有关复合材料特性的研究最早可追溯到Maxwell(1873)和Rayleigh(1892)对含球夹杂复合材料有效电传导系数的计算。但在这一领域所做的开拓性工作应归功于Eshelby^[7,8], Hill^[1], Budiansky^[2], Roscoe^[4], Hashin, Shtrikman^[9,10]。目前,有关复合材料特性的研究方法很多,很难对每一方法进行综述。下面仅就这一领域的代表性工作进行综述,而其他的方法我们也将给予适当评价。另外,由于复合材料多种特性(如弹性与热膨胀性质、热传导与电传导性质等)在数学上的相似性,我们在对复合材料力学性能讨论的同时,也对其他特性给予讨论。

所谓有效特性就是非均匀体在宏观上表现的整体特性。一般情况下,它依赖于非均匀体的所有微结构细节和每相材料的物理特性。其求解只能在一些近似假定下进行。当然,对于一些极其理想的情况,非均匀体有效特性的解析解是可以求出的,如Hashin^[11], Lee和Westman^[12]。

非均匀体有效弹性模量 C^* 和柔度 S^* 可写成^[13]

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^* \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl} \quad (2)$$

式中, $\bar{\sigma}_{ij}$ 和 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ 分别为非均匀体内的平均应力场和应变场。根据此定义,下面我们对含夹杂非均匀体的有效特性及其上下限分别进行研究。

2.1 自治理论

自治理论的思想最初是由Bruggeman^[14]在研究热传导问题时引入的,当时称为有效介质法。后来Hershey^[16]和Kröner^[10]采用这一方法研究了多晶体的弹性性能。而真正将自治理论用于复合材料有效弹性模量求解的是Hill^[1]和Budiansky^[2]。

实际上,自治理论的基本思想很简单。如图1所示,自治模型是由夹杂与有效介质构成的,而夹杂周围有效介质的弹性常数恰好就是复合材料的弹性常数。利用这一模型,Hill^[1]证明了含球夹杂复合材料有效体积模量和剪切模量是在Hashin和Shtrikman^[9]的上下限之间,而

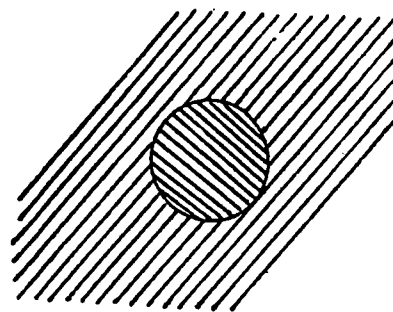


图1 自相似模型夹杂有效介质

图1 自相似模型夹杂有效介质

Budiansky^[2] 根据 Eshelby^[7] 的结果导出了含球夹杂多相复合材料的有效体积模量、剪切模量和泊松比的 3 个耦合方程, 即

$$\frac{1}{K^*} = \frac{1}{K_N} + \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{K_i}{K_N}\right) \frac{V_i}{K^* + \alpha^*(K_i - K^*)} \quad (3)$$

$$\frac{1}{G^*} = \frac{1}{G_N} + \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{G_i}{G_N}\right) \frac{V_i}{G^* + \beta^*(G_i - G^*)} \quad (4)$$

$$\nu^* = \frac{3K^* - 2G^*}{6K^* + 2G^*} \quad (5)$$

其中

$$\alpha^* = \frac{1 + \nu^*}{3(1 - \nu^*)}, \quad \beta^* = \frac{2(4 - 5\nu^*)}{15(1 - \nu^*)}$$

在式 (3)–(5) 中, K^* , G^* 和 ν^* 分别表示复合材料的有效体积模量、剪切模量和泊松比; K_i , G_i 和 V_i 分别表示第 i 相材料的体积模量, 剪切模量和体积分数; 而 N 为相数。这时, 复合材料表现为宏观各向同性。

与 [1,2] 不同的是, Chou^[17] 计算了单向短纤维增强复合材料的有效弹性常数; 而 Wu^[18] 研究的是椭球夹杂随机取向的复合材料。在 [17] 中, 短纤维被简化成椭球, 而复合材料在宏观上可作为横观各向同性的。实际上, 将短纤维作为椭球处理是很不合理的。前者表面为分片光滑的, 而后者却是光滑的。这在数学处理上存在质的差别。

对于含微裂纹非均匀体, 根据自洽模型 Budiansky 和 O'Connell^[19] 计算了微裂纹随机分布且张开时非均匀体的有效弹性模量。而 Horii 和 Nemat-Nasser^[20] 研究了微裂纹闭合且具有摩擦时的情况。在 [19] 中非均匀体为宏观各向同性, 而在 [20] 中非均匀体除了具有宏观各向异性外, 其有效弹性模量还依赖于加载历史和摩擦系数。

由于自洽模型仅考虑了单夹杂与周围有效介质的作用 (图 1), 因而当夹杂体积分数或裂纹密度较大时, 这一模型预报的有效弹性模量过高 (含硬夹杂) 或过低 (含软夹杂)。特别是当夹杂与基体的弹性常数相差较大时, 这一偏差更加显著, 如对于微裂纹随机取向的非均匀体, 当微裂纹密度为 9/16 时, 自洽模型预报的有效杨氏模量为零 (图 2)。为了克服这一弱点, Kerner^[21] 提出了广义自洽模型, 但在求解含球夹杂复合材料的有效体积模量和剪切模量时 [21] 做了一些不必要的假定。最后, 给出了有效体积模量和剪切模量的表达式, 但有效剪切模量的结果是错误的^[13]。后来, Smith^[3] 针对这一问题给出了正确的有效剪切模量。

如图 3 所示, 广义自洽模型是由夹杂、基体壳和有效介质构成的。而夹杂体积与基体壳外边界所围成的体积比恰好是复合材料的夹杂体积分数。与自洽模型一样, 图 3 中有效介质的弹性常数与复合材料的相同, 采用这一模型 Christensen 和 Lo^[22] 分别计算了含球夹杂和单向圆柱夹杂复合材料的有效剪切模量。与自洽模型相比, 广义自洽模型似乎更合理一些。本文认为其主要原因有两点: ①由于广义自洽模型考虑了夹杂、基体壳和有效介质间的相互作用, 因而使得相的“比重”处于平衡, 即有效介质内不仅仅含有夹杂, 而且夹杂周围

还附有一层适当的基体；②广义自洽模型放宽了相之间的界面约束。

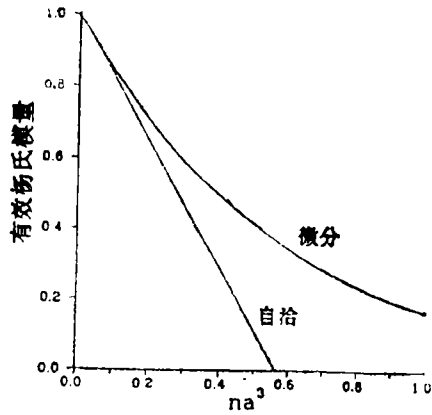


图2 自洽理论与微分法的比较

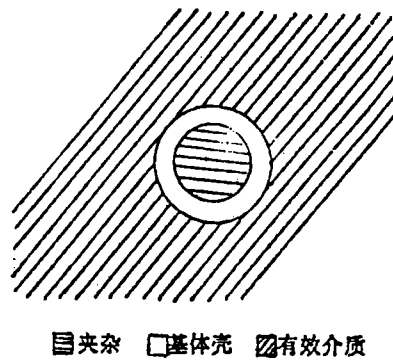


图3 广义自相似模型

另一个与自洽理论相关的模型是“三相模型”。这一模型是将广义自洽模型中的夹杂核和基体壳作为一个非均匀的椭球夹杂来处理的(图4)。Herve和Zaoui^[23]采用这一模型研究了含夹杂非线性复合材料的有效弹性模量。应该指出的是尽管自洽模型具有一定的局限性,但其优势是显著的,如在研究各向异性、非线性等问题时其求解过程相对来说是简单的。有关自洽理论的综述可参见[13]。

2.2 微分法

实际上,微分法最初也是由Bruggeman^[14]的工作发展起来的。后来,Roscoe^[4]发展了这一方法,并用以研究悬浮体问题。与自洽理论不同,微分法很难用几何模型来描述。但可以给出一个定性的描述,即复合材料的有效弹性模量是随着夹杂的增减而变化的。下面给出Mclaughlin^[24]对微分法的数学描述,即

$$\frac{dC^*}{dV} = (C - C^*)A^*/(1 - V), \quad C^*|_{V=0} = C_0 \quad (6)$$

$$\frac{dS^*}{dV} = (S - S^*)B^*/(1 - V), \quad S^*|_{V=0} = S_0 \quad (7)$$

式中, C^* 和 S^* 分别为复合材料的有效弹性模量和柔度; $C(C_0)$ 和 $B(B_0)$ 分别为夹杂(基体)的弹性模量和柔度;而 V 是夹杂的体积份数。另外,式(6),(7)中的 A^* 和 B^* 可由自洽模型或其他方法确定。

利用式(6),(7),Hashin^[25]计算了含微裂纹非均匀体的有效弹性模量。从计算结果来看,对于微裂纹随机分布的3维情况,自洽理论与微分法之间差别很大。自洽理论预报

的有效杨氏模量在裂纹密度为9/16时降为零，而微分法的结果却随着裂纹密度的增加而逐渐地减小（图2）。对于微裂纹单向排列的平面应力问题，上述两种方法所预报的结果差别不大。

比较自治理论和微分法的另一个例子是由 Sayers 和 Kachanov^[26] 给出的。他们根据含微裂纹非均匀体势函数^[27,28]的线性展开式计算了微裂纹具有不同取向时非均匀体的有效弹性模量。实际上，势函数的线性化忽略了微裂纹之间的相互影响。另外，对于势函数的常数项和线性项系数的确定，[26]分别采用了自治理论和微分法。通过比较，[26]也发现了与[25]同样的现象，即与微分法相比自治理论过高估计了微裂纹的相互作用。有关这两种方法的详细评论可参见 Bruner^[29]。

与[26]相似，Duva 和 Storm^[30]利用复合材料应变率势函数研究了刚性夹杂对幂律材料的增强影响。对于平面应变问题，应变率势函数依赖于一个待定函数。[30]采用微分法确定了这个函数，并且给出了线性基体中含圆柱硬夹杂复合材料的本构关系。而对于其他情况，如非线性基体或（和）非圆柱硬夹杂，[30]指出，所求得的弹性场不满足夹杂与基体界面处的边界条件。有关微分法在其他方面的应用可见[31]。

2.3 Eshelby-Mori-Tanaka 法

对于单向纤维增强复合材料，Taya 和 Mura^[32]研究了在纤维方向的应力场作用下纤维端部出现扁平裂纹时的宏观弹性性能和强度问题。由于问题的复杂性，[32]的求解仅限于如下两种情况：①扁平裂纹在基体中扩展但未触及邻近的纤维；②扁平裂纹由周围的纤维阻止扩展。对于这两种情况，[32]根据 Eshelby^[7]等效夹杂法和 Mori-Tanaka^[33]的后应力分析法计算了复合材料的有效纵向杨氏模量。但值得注意的是，[32]没有考虑裂纹之间以及裂纹与周围纤维的相互作用影响。同样，Zhao 和 Weng^[34]也采用这两种方法对纤维条（ribbon）增强复合材料的有效弹性模量进行了研究。对于椭圆纤维条随机分布的情况，[34]给出了横观各向同性复合材料的5个有效弹性常数。当椭圆的短长轴比趋于零时，其中的4个有效弹性常数分别与 Hill^[35]和 Hashin^[36]的上限一致。但对于圆纤维条，上述4个常数分别与[35]和[36]的下限一致。与此相反，第5个有效弹性常数在上述极限下分别对应于下限和上限。而对于椭圆纤维条单向排列的情况，[34]计算了正交各向异性复合材料的9个有效弹性常数。

Agah-Tehrani^[37]根据 Eshelby^[7]的思想研究了具有周期微结构复合材料的有限变形（包括塑性变形）问题。其具体步骤为：首先选择合适的代表性体积单元；然后在给定该单元的边界条件下来研究其内部的速度和应力率场及宏观有效模量；最后根据夹杂的周期分布，将代表性单元内的相应量推广到复合材料上。需要说明的是，代表性单元的边界条件给定是极其近似的。有关自治理论，微分法和 Mori-Tanaka 法的比较可参见[31]。

2.4 相关函数积分法

对于含夹杂复合材料的有效弹性模量，当夹杂的体积分数较小时，目前的理论还是能满足实际需要的。但当夹杂的体积分数较大时，由于这些理论没有充分考虑复合材料的微结构特征，因而它们不能很好地预报复合材料的有效弹性模量。由此看来，充分有效地考虑复合材料的微结构特征是解决问题的关键，为此，[6]在考虑夹杂的形状、几何尺寸和在基体中分布的情况下导出了复合材料有效弹性模量的表达式

$$C^* = C_0 + \sum_{i=1}^n C_{1i} E_i (C_{1\alpha}, V_\alpha, F_{\alpha\beta}) \cdot \left[I - A_0 \sum_{i=1}^n C_{1i} E_i (C_{1\alpha}, V_\alpha, F_{\alpha\beta}) \right]^{-1} \quad (8)$$

式中 C^* , C_0 分别为复合材料的有效弹性模量和基体的弹性模量; C_{1i} ($C_{1\alpha}$) 是第 i (α) 个夹杂与基体的弹性模量之差; A_0 是相应于基体材料的 Eshelby 张量; I 是 4 阶单位张量; V_α 为第 α 个夹杂的体积分数; n 是夹杂的数目; $F_{\alpha\beta}$ 是与夹杂相互影响函数有关的积分; E_i (C_{1i} , V_α , $F_{\alpha\beta}$) 是 C_{1i} , V_α 和 $F_{\alpha\beta}$ 的函数。

利用式 (8), [38,39] 计算了球夹杂周期 (立方) 排列时复合材料的有效弹性模量。从与 Smith [40] 的实验结果相比来看, 当夹杂的体积分数大于 0.4 时, 相关函数积分法所给出的结果与实验结果很接近, 但自洽模型的结果却偏差较大 (见图 5)。

与 [38,39] 相似, [41] 针对单向圆柱夹杂周期排列情况计算了有效弹性模量, 并将相应结果与 Halpin-Tsai [42] 的理论进行了比较 (图 6,7), 结果发现两者能很好符合。对于 2 维平面问题, [43] 得到了一个与式 (8) 相似的结果。利用这一结果 [43] 计算了圆孔周期排列时有效弹性模量的衰减情况, 结果再一次验证了式 (8) 的有效性。

从上述的理论分析及计算可以看到, 影响复合材料有效弹性常数的因素可分为两类。一类为复合材料中每一组份材料的弹性性能, 如夹杂和基体的杨氏模量和泊松比。另一类为复合材料的微结构几何参数——夹杂的形状、几何尺寸以及在基体中的分布。因此, 在对复合材料进行设计时应充分考虑上述两类因素。

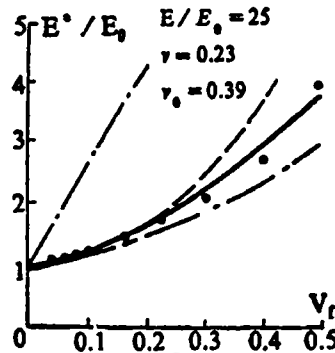


图 5 有效杨氏模量与球夹杂体积分数的关系

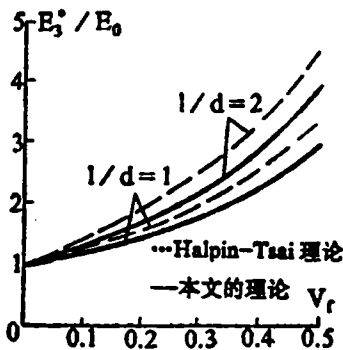


图 6 $1/d=1$ 和 2 时有效纵向杨氏模量的比较

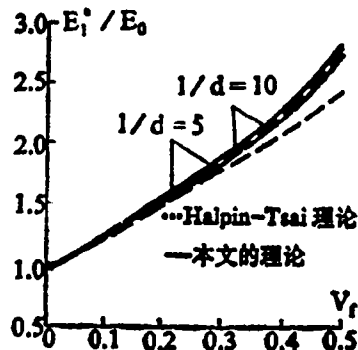


图 7 $1/d=5$ 和 10 时有效横向杨氏模量的比较

需要指出的是, 式 (8) 的推导是在夹杂内的应变场为常数的假定下导出的。这一假定对球夹杂和椭球夹杂情况是合理的, 而对圆柱夹杂却不一定合适。另外, [6] 的另一局限性

在于,其计算结果仅限于夹杂周期排列的情况。

2.5 其他方法

2.5.1 确定性方法

Kachanov^[44]采用一种近似法研究了含微裂纹弹性体的有效弹性模量。近似法是根据无限平面内含多个相同且共线裂纹的解,并引入应力变换因子而发展起来的。

对于脆性多晶体,Laws和Brockenbrough^[45]分别采用晶粒正六边形排列和随机分布模型研究了微裂纹对有效弹性模量的影响。在外载作用下,当裂纹张开时[45]根据Laws和Brouchenbrough^[46]的结果发现裂纹密度较小时材料的有效模量衰减仍很大。而当裂纹闭合且具有摩擦时,[45]根据[20]的结果得到了如下结论:①当拉伸为零时,剪切模量对裂纹面摩擦系数的变化不敏感;②规则排列的模型得到的剪切模量依赖于剪切角的变化,而随机模型的结果与此无关。

对于含球夹杂复合材料,当夹杂的体积分数较小时,Ogden^[47]根据Hill^[48]的方法研究了非线性复合材料的有效弹性常数。当夹杂为空洞或刚性时,[47]讨论了它对复合材料的弱化或增强影响。这一结果不同于线性理论的结果。

Valanis^[49]采用热力学理论研究了单向纤维增强复合材料的有效纵向、横向和剪切模量。但公式中有一个参数需由实验确定。另外,从[49]所导出的结果来看,有效纵向杨氏模量跟纤维和基体的泊松比无关,而有效横向杨氏模量和剪切模量跟纤维的弹性常数无关。显然[49]的理论是不合理的。

Walton^[50]采用微结构分析法研究了含球填料复合材料的有效弹性模量,所谓球填料复合材料就是在未受外载作用下其内部的多数球夹杂都保持接触状态。在求有效弹性模量时,[50]采用如下步骤:①求出两个等体积球夹杂相互挤压后接触面内的面力场和位移场;②在使位移场产生一个微扰动后求出相应的扰动面力场;③通过假定建立起微扰动位移场和扰动外均匀应变场的关系;④通过对复合材料内部的应力场求均值可导出扰动应力场与扰动外均匀应变场的关系,从而求得复合材料的有效弹性模量。

Hirai^[51]采用一种体视学方法研究了Shirasu球增强铝合金复合材料的有效电传导系数。其具体作法为:根据体视学定义球颗粒的接触度;然后给出接触度与复合材料有效性能的关系。通过计算和实验分析,[51]指出,球颗粒的接触度比体积份数更能反映材料的特性。值得注意的是,[51]的方法仅适用于球颗粒复合材料。

2.5.2 随机统计法

Khoroshun和Leshchenko^[52]采用随机统计方法研究了含单向椭球夹杂复合材料的有效热弹性常数。但[52]的推导依赖于下述两条假定:①随机应力和应变场具有各态历经性;②复合材料中夹杂与基体的横观各向同性方向一致。最后,[52]根据这两条假定给出了复合材料有效热弹性常数的复杂表达式。其中,有效弹性常数和热膨胀系数仅依赖于各组份的相应性能及夹杂的形状和体积份数,而不依赖于夹杂的几何尺寸和分布。

[53]采用有限元分析和统计法研究了球颗粒增强复合材料的有效杨氏模量。其所使用的计算模型为一个直径与高相等的圆柱体中心含一球颗粒,而球颗粒与圆柱的体积比恰好为球颗粒的体积份数。通过计算给出了该单元的有效杨氏模量。最后,采用统计法将单元的计算结果推广到复合材料上。

3 含夹杂非均匀体有效特性的上下限

3.1 Paul 的上下限

多晶体有效弹性模量的确定是一个古老问题。早在 1889 年 Voigt^[54] 就根据晶体内部常应变假定研究了这一问题，并且给出了有效体积模量 K_V^* 和剪切模量 G_V^* 为

$$K_V^* = \sum_{i=0}^N C_i K_i \quad (9)$$

$$G_V^* = \sum_{i=0}^N C_i G_i \quad (10)$$

式中 K_i , G_i 和 C_i 分别为第 i 相材料的体积模量，剪切模量和体积分数，而 N 为相的数目。后来，Reuss^[55] 根据晶体内部的常应力假定给出了如下结果：

$$K_R^* = \left(\sum_{i=0}^N \frac{C_i}{K_i} \right)^{-1} \quad (11)$$

$$G_R^* = \left(\sum_{i=0}^N \frac{C_i}{G_i} \right)^{-1} \quad (12)$$

式中 K_R^* 和 G_R^* 分别为 Reuss^[55] 理论中多晶体的有效体积模量和剪切模量。

针对式 (9)–(12)，Hill^[56] 根据弹性极值原理证明了式 (9) 和式 (10) 为多晶体有效体积模量和剪切模量的上限，而式 (11) 和式 (12) 为下限。同样，对于含夹杂复合材料，Paul^[37] 根据最小势能和最小余能原理也证明了 [56] 中的结论。但在 [57] 中要求复合材料具有宏观统计均匀性和各向同性。

3.2 Hashin 和 Shtrikman 的上下限

对于各向异性非均匀体，Hashin 和 Shtrikman^[10] 采用变分法研究了应变能的极值条件。其基本思想是：① 选择一个几何形状和边界条件都相同的参考介质，但该介质是各向同性的均匀体；② 将非均匀体的应力场 σ_{ij} 分解为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} + \tau_{ij} \quad (13)$$

式中， ε_{ij} 表示非均匀体内的应变场， C_{ijkl}^0 是参考介质的弹性模量，而 τ_{ij} 被称为应力极化 (Polarization) 张量；③ 将非均匀体的位移场，应力场和弹性模量分解成相应的参考介质质量和扰动量；④ 通过边界条件和内部的约束条件给出非均匀体应变能的极值条件。

根据这一思想，Hashin 和 Shtrikman^[9] 研究了多相复合材料有效弹性模量的上下限问题。在 [9] 中，复合材料应是准各向同性和均匀的。由此，[9] 给出了两相复合材料有效体积模量和剪切模量的上下限

$$K_{\text{下}}^* = K_1 + \frac{V_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3V_1}{3K_1 + 4G_1}} \quad (14)$$

$$G_{\text{下}}^* = G_1 + \frac{V_2}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6(K_1 + 2G_1)V_1}{5G_1(3K_1 + 4G_1)}} \quad (15)$$

$$K_{上}^* = K_2 + \frac{V_1}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3V_2}{3K_2 + 4G_2}} \quad (16)$$

$$G_{上}^* = G_2 + \frac{V_1}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{6(K_2 + 2G_2)V_2}{5G_2(3K_2 + 4G_2)}} \quad (17)$$

式中, K_1, K_2, G_1, G_2 和 V_1, V_2 分别为第 1, 2 相材料体积模量, 剪切模量和体积分数, 而 $K_1 < K_2$ 和 $G_1 < G_2$ 。

有趣的是, 当参考介质的弹性模量取极限 (趋于 0 或 ∞) 时, 式 (14)–(17) 的结果可退化为 Paul 的上下限。另外, Hill^[58] 在研究复合材料有效弹性常数和上下限问题时也发现了一个有趣现象, 即当两相材料的剪切模量相同时, 式 (14) 与 (16) 相同。这也就是说, 此时的有效体积模量是精确解 (上下限重合)。需要说明的是, 在考虑每相材料的弹性常数和体积分数情况下, 式 (14) 和 (16) 所给出的有效体积模量上下限是最好的。但对于式 (15) 和 (17) 中有效剪切模量上下限的有效性, 目前只能依靠实验来验证^[59]。

Walpole^[60,61] 根据极值原理并采用 Green 函数和势函数法重新推导了 Hashin 和 Shtrikman^[9] 的上下限。但在 [60,61] 中, 应力极化张量的选取不同于 [9]。另外, [60,61] 还研究了应变极化张量的相应情况。与 [9,60,61] 相似, Willis^[62] 也采用极化张量概念研究了各向异性复合材料有效弹性模量的上下限, 且给出了 Hashin 和 Shtrikman^[9] 上下限的推广形式 (张量表达式)。对于含椭球夹杂复合材料有效热传导系数, Hashin 和 Shtrikman^[63] 和 Brailsford^[64] 早已给出它们的上下限。但 [62] 讨论了夹杂形状和弹性性能取极限时的特殊情况。需要指出的是, 尽管 Hashin 和 Shtrikman^[9] 的上下限是目前较理想的上下限, 但由于它没有考虑材料内部的微结构, 如夹杂的形状、几何尺寸和分布, 因而在夹杂与基体弹性常数相差较大的情况下这一上下限也不是令人满意的。

除此之外, Kröner^[65] 也推广了 Hashin 和 Shtrikman^[9] 的上下限理论。对于线弹性非均匀体, Dederichs 和 Zeller^[66] 发展了一种奇数阶¹⁾ 有效弹性模量的上下限理论。在此基础上, [65] 将其理论推广到偶数阶的情况, 并且提出了材料的均匀性、各向同性和无序 (disorder) 性级的概念。具体地说就是当材料的某种性质具有 n 级时, 我们仅知道这一性质的 n 点相关函数。借助此概念, [65] 研究了多晶体有效弹性常数在 (2,2,2), (3,1,3), ($\infty, \infty, 2$) 和 ($\infty, \infty, 3$) 级情况下的上下限。有趣的是, ($\infty, \infty, 2$) 级的上下限恰好与 Hashin 和 Shtrikman^[9] 的上下限一致。另外, 在研究零阶和一阶上下限时, [65] 解释了晶格方向的改变对有效弹性常数的影响要大于晶粒形状的改变对它的影响。需要指出的是, [65] 的理论在实际求解时具有一定的局限性: ① 对于复合材料来说, 当夹杂与基体的弹性常数相差较大时, [65] 中的级数展开式并不收敛; ② 求多点相关函数需借助于实验和极其复杂的计算。

对于非线性复合材料有效弹性性能的上下限, Willis^[67] 评价了 Ponte Castaned^[68] 方法以及 Hashin 和 Shtrikman^[9] 变分法在非线性领域的推广形式 (由 Talbot 和 Willis^[69] 推

1) 奇数阶是指级数展开式中仅含奇数项。

广的)。从[67]的证明来看,上述两种方法在理论上具有同样的有效性,但在实际使用时 Ponte Castaned 方法更具灵活性。

Diener^[70]根据[66]的方法和 Fourier 变换研究了具有特殊微结构复合材料的有效介电(dielectricity)常数上下限。为了具体求得上下限,[70]假定复合材料具有“体脆结构”(cell structure)^[71]。最后,[70]针对含等球体夹杂“二元体系”(binary mixtures)复合材料给出了有效介电常数与波矢模量 K 的关系。当 $K \rightarrow \infty$ 时,上下限重合,而当 $K \rightarrow 0$ 时,相应的上下限与 Hashin 和 Shtrikman^[63]的结果相同。同样,对于具有“体脆结构”和“二元体系”的复合材料,Diener^[72]根据[62]所采用的变分原理研究了有效 Lamé 常数在 Fourier 变换空间的上下限情况。有趣的是,由 Paul^[67]所给出的上下限在 Fourier 空间仍然有效。另外,对极化张量的选取,[72]采用了[66]的近似做法。最后,[72]对于波矢不为零的情况导出了 Fourier 空间的有效 Lamé 常数上下限。该上下限依赖于两点相关函数和材料的微观几何参数。有关 Hashin 和 Shtrikman^[63]的上下限及其推广形式的评论文章可见[13,73]。

3.3 Milton 的上下限

Milton^[74]采用 Bergman^[75]的方法研究了两相复合材料有效复介电常数的界限¹⁾问题。这里所说的 Bergman 方法不同于前面所说的各种变分原理。其基本思想为,将复合材料的有效性能作为两相性能比率的解析函数,然后对这一解析函数进行数学上的处理。图 8 就是[74]给出的复介电有效常数的界限,其中

$$A = c_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_2 \quad (18)$$

$$B = \left(\frac{c_1}{\varepsilon_1} + \frac{c_2}{\varepsilon_2} \right)^{-1} \quad (19)$$

$$X_2 = \varepsilon_1 + \frac{dc_2 \varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d\varepsilon_1 + c_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \quad (20)$$

$$Y_a = \varepsilon_2 + \frac{dc_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{d\varepsilon_2 + c_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (21)$$

在这里, Ω 是由 $\varepsilon_1 A \varepsilon_2$ 和 $\varepsilon_1 B \varepsilon_2$ 所围成的区域, Ω' 是由 $A Y_3 Y_2 B$ 和 $A X_3 X_2 B$ 所围成的区域, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 和 c_1, c_2 分别是第 1, 2 相材料的介电常数和体积份数,而 d 是所考虑问题的维数。

对于图 8 中的区域 Ω, Ω' 和 Ω'' , [74] 给出了如下解释: ①如果不知道两相复合材料的“几何信息”,那么复有效介电常数 ε 被限制在 Ω 内; ②如果知道两相材料的体积份数,那么 ε 被限制在 Ω' 内; ③除体积份数外,如果还知道复合材料具有统计各向同性,那么 ε 被限制在 Ω'' 内。另外,由[74]可知,当 ε_1 和 ε_2 都是正实数时, Ω' 和 Ω'' 在实数轴上的投影分别对应于 Wiener^[76] 和 Hashin 和 Shtrikman^[63] 的上下限。

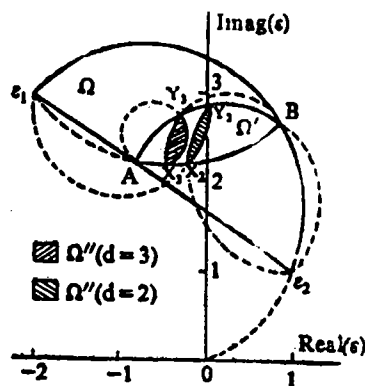


图 8 复介电常数的界限

1) 所谓复介电常数的界限就是复平面上的一个面域。

同样,对两相复合材料的有效电容率, Milton^[77]也采用 Bergman^[75]的方法研究了复平面的界限问题。但与[75]不同的是, [77]给出了有效电容率上下限的推广形式,即复平面上无穷组界限。显然,我们知道复合材料微结构的信息越多,其界限区域越小。在这里,微结构的几何参数依赖于多点相关函数(见[73])。

与[77]的推广不同, Golden^[78]将 Bergman^[75]对于两相复合材料的结果推广到多相复合材料上,并且给出了相应的 Wiener^[76]的以及 Hashin 和 Shtrikman^[9]的上下限。需要说明的是, [78]的上下限没有考虑复合材料的微观几何因素。

3.4 其他方法

Phillips^[79]采用变形协调理论和混合律模型分别研究了单向纤维和球颗粒周期排列时复合材料的有效弹性模量上下限。其具体作法为:①给出正方形(对于单向纤维)和立方体(对于球颗粒)周期排列时的复合材料有效弹性模量;②在引入相对体积分数后, [79]得到了如下结论:正方形外接圆和立方体外接球周期排列的情况分别对应于单向纤维和球颗粒增强复合材料的有效弹性模量上限,而内切圆和内切球的情况分别对应于下限。

对于含夹杂非均匀体, Hill^[53]研究了其弹性特征,并且重新讨论了著名的 Hill 条件

$$\langle \sigma \rangle \langle \varepsilon \rangle = \langle \sigma \varepsilon \rangle \quad (22)$$

式中, σ 和 ε 分别为非均匀体的应力场和应变场,而 $\langle \cdot \rangle$ 表示 \cdot 的体积平均。最后, [58]针对有效体积模量和剪切模量讨论了 Voigt^[54] 上限和 Reuss^[55] 下限。对于 Hashin 和 Shtrikman^[9] 的上下限, [58]采用势函数法也给出了相应的结果。

Nomura 和 Chou^[30]采用局部应变场的扰动展开法研究了单向短纤维增强复合材料的有效弹性模量上下限。需要说明的是, [80]的方法考虑了三点相关函数,即考虑了复合材料的微观几何因素,而 Paul^[57]的及 Hashin 和 Shtrikman^[9]的上下限仅分别考虑了一点和两点相关函数。

对于宏观各向同性复合材料, Milton 和 Kohn^[31]根据 Dirichlet 和 Thompson 变分不等式首先给出了有效电传导系数的一般表达式。然后[81]将变量空间分解成三个正交空间(见[81]式(2.1)–(2.6))。最后, [81]根据这一分解很简捷地得到了一组各向异性复合材料有效电传导系数和有效弹性模量的上下限表达式。这一结果包含了 Hashin 和 Shtrikman^[9]的上下限,但它同样没有考虑材料的微结构。

Teply 和 Dvorak^[82]根据最小势能和余能原理研究了弹塑性复合材料瞬时有效特性的上下限。在具体求解上下限时, [82]对纤维周期排列的复合材料采用有限元法进行计算。而所求得上下限依赖于有限单元的划分。

4 结 语

对于含夹杂非均匀体的有效弹性模量,自洽理论仅考虑了各组份材料的弹性常数,体积分数和夹杂形状。实际上,夹杂的几何尺寸,分布和相互作用对有效弹性模量均有影响。特别是当夹杂的体积分数较大时,这种相互作用影响是比较显著的。因此,在这种情况下自洽理论的预报值与实验值之间相差较大^[80]。与自洽模型相似,微分法除了没有考虑上述微结构因素外,其微分式的使用仅适合于夹杂体积分数较小的情况。因此,本文认为当夹杂体积分数较大时应发展相应的多级微分方程式。

Eshelby-Mori-Tanaka 法实际上是将 Eshelby^[7]的等效夹杂法与 Mori 和 Tanaka^[33]

的后应力分析法结合起来使用。对于夹杂体体积分数较小的情况，应使用等效夹杂法。而对于夹杂体体积分数较大的情况，应使用后应力分析法。严格来说，这一方法没有充分考虑复合材料的微结构。

与上述方法相比，相关函数积分法充分考虑了复合材料内部的微结构，即夹杂的形状，几何尺寸，分布和夹杂间的相互影响，所以在夹杂的体积分数较大时，该方法仍很有效。但需要指出的是，该方法所得到的结果仅限于周期排列的情况。实际上将这一方法推广到一般情况，即夹杂随机均匀分布的情况，也是可能的。但这要将式[8]中的求和项用夹杂分布函数的积分代替。这样，数值计算时将要增加两重积分。有关这一方面的工作，将在今后给予报道。

对于含夹杂非均匀体有效弹性模量的上下限，Paul^[57]的结果是很宽的，与之相比，尽管Hashin和Shtrikman^[9]的上下限有了较大改善，但当复合材料中每相材料的弹性常数相差较大时这一结果也不是令人满意的（见[83]中的图45.3和4）。笔者认为其原因主要在于：[9]的上下限仅考虑了每相材料的弹性常数和体积分数，而忽略了材料微结构的几何因素。为了改善复合材料有效弹性模量的上下限，目前出现了许多涉及多点相关函数的理论^[73]，其特点就是考虑了材料微结构的几何因素。但这些理论在数学处理上是很复杂的，以至于无法求解，因此其应用范围受到一定限制。

对于Milton的上下限，同样存在上述问题。一方面，在不考虑材料微结构的几何参数时，所给出的上下限既简单又方便，但其宽度有时不是令人满意的。另一方面，在考虑材料微结构的几何参数时，尽管相应的上下限宽度可变窄，但由于涉及较复杂的计算，因而其方法有时也具有一定的局限性。

有关含夹杂复合材料有效弹性模量预报可参见如下书籍和综述文章：Mura^[83]，Kunin^[5]，Beran^[84]，Christensen^[85]，Hashin^[13]，Christensen^[31]，Torquato^[73]，Milton^[86]和McCoy^[87]。

本研究课题受到国家教委博士点基金资助，在此表示感谢。

参 考 文 献

- 1 Hill R. J. *Mech. Phys. Solids*, **13** (1965) : 213—222
- 2 Budiansky B. J. *Mech. Phys. Solids*, **13** (1965) : 223—227
- 3 Smith J C. J. *Research of the National Bureau of Standards*, **78A** (1974) : 355—362
- 4 Roscoe R. Br. *J. Appl. Phys.*, **3** (1952) : 267
- 5 Kunin I A. *Elastic media with microstructure II*. Springer-Verlag, Berlin (1983)
- 6 吴林志, 含夹杂和分布裂纹弹性介质的细观理论. 博士论文, 哈尔滨工业大学 (1992)
- 7 Eshelby J D. *Proc. Roy. Soc.*, **A241** (1957) : 376—396
- 8 Eshelby J D. *Proc. Roy. Soc.*, **A252** (1959) : 561—569
- 9 Hashin Z. Shtrikman S. *J. Mech. Phys. Solids*, **11** (1963) : 127—140
- 10 Hashin Z. Shtrikman S. *J. Mech. Phys. Solids*, **10** (1962) : 335—342
- 11 Hashin Z. *J. Appl. Mech.*, **29** (1962) : 143—150
- 12 Lee K J, Westmann R A. *J. Comp. Mater.*, **4** (1970) : 242—253
- 13 Hashin Z. *J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 481—505
- 14 Bruggeman D A G. *Annalen der Physik*, **24** (1935) : 636—679
- 15 Hershey A V. *J. Appl. Mech.*, **21** (1954) : 236—240

- 16 Kroner E, *Zeitschrift für Physik*, **151** (1958) : 504--518
- 17 Chou T W, Nomura S, Taya M, *J. Comp. Mater.*, **14** (1980) : 178—188
- 18 Wu T T, *Int. J. Solids Struc.*, **2** (1966) : 1—8
- 19 Budiansky B, O'Connell R J, *Int. J. Solids Struc.*, **12** (1976) : 81—97
- 20 Horii H, Nemat-Nasser S, *J. Mech. Phys. Solids*, **31** (1983) : 155—171
- 21 Kerner E H, *Proc. Phys. Soc.*, **B69** (1956) : 807—808
- 22 Christensen R M, Lo K H, *J. Mech. Phys. Solids*, **27** (1979) : 315—330
- 23 Herve E, Zaoui A, *Eur. J. Mech., A/Solids*, **9** (1990) : 505—515
- 24 McLaughlin R, *Int. J. Engng. Sci.*, **15** (1977) : 237—244
- 25 Hashin Z, *J. Mech. Phys. Solids*, **36** (1988) : 719—734
- 26 Sayers C M, Kachanov M, *Int. J. Solids Struc.*, **27** (1991) : 671—680
- 27 Kachanov M, *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, **106** (1980) : 1039—1051
- 28 Kachanov M, ASME Winter Annual Meeting, Boston (1987) : 99—105
- 29 Bruner W M, *J. Geophys. Res.*, **81** (1976) : 2573—2576
- 30 Duva J M, Storm D, *ASME Trans., J. Engng. Mater. Tech.*, **111** (1989) : 368—371
- 31 Christensen R M, *J. Mech. Phys. Solids*, **38** (1990) : 379—404
- 32 Taya T, Mura T, *J. Appl. Mech.*, **48** (1981) : 361—367
- 33 Mori T, Tanaka K, *Acta Metall.*, **21** (1973) : 571—574
- 34 Zhao Y H, Weng G J, *J. Appl. Mech.*, **57** (1990) : 158—167
- 35 Hill R, *J. Mech. Phys. Solids*, **12** (1964) : 199—212
- 36 Hashin Z, *J. Mech. Phys. Solids*, **13** (1965) : 119—134
- 37 Agah-Tehrani A, *Mech. Mater.*, **8** (1990) : 255—268
- 38 Du S Y, Wu L Z, The Second International Symposium on Composite Materials and Structures, Beijing (1992) : 396—401
- 39 杜善义, 吴林志, *复合材料学报*, **11** (1994) : 105—111
- 40 Smith J C, Society of Plastics Engineers, EPS Div. Meeting, Akron, Ohio (1975)
- 41 Du S Y, Wu L Z, *Acta Mechanica Sinica*, **9** (1992) : 53—60
- 42 Halpin J C, Tsai S W, Environmental factors in composite materials design, AFML TR 67—423 (1967)
- 43 Wu L Z, Du S Y, Qu W, Overall properties of composites with inclusions in plane problems, IUMRS-ICAM-93 (1993)
- 44 Kachanov M, *Int. J. Solids Struc.*, **23** (1987) : 23—43
- 45 Laws N, Brockenbrough J R, *J. Engng. Mater. Tech.*, **110** (1988) : 101—104
- 46 Laws N, Brockenbrough J R, *Int. J. Solids Struc.*, **23** (1987) : 1247—1268
- 47 Ogden R W, *J. Mech. Phys. Solids*, **22** (1974) : 541—553
- 48 Hill R, *Proc. Roy. Soc.*, **A326** (1972) : 131
- 49 Valanis K C, *J. Engng. Mater. Tech.*, **113** (1991) : 141—147
- 50 Walton K, *J. Mech. Phys. Solids*, **35** (1987) : 213—226
- 51 Hirai H, Kitahara A, Nagata S, Proc. 8th Int. Conf. on Composite Materials, Hawaii (1991) : 29—H—1—10
- 52 Khoroshun L P, Leshchenko P V, Nazarenko L V, *Soviet Appl. Mech.*, **24** (1988) : 955—961
- 53 Guild F J, Davy P J, Young R J, Proc. 6th Int. Conf. on Composite Materials, London (1987) : 5536—5546
- 54 Voigt W, *Wied. Ann.*, **38** (1889) : 573—587
- 55 Reuss A Z, *Angew. Math. Mech.*, **9** (1929) : 49—58
- 56 Hill R, *Proc. Phys. Soc.*, **A65** (1952) : 349—354
- 57 Paul B, *Trans. ASME*, **218** (1960) : 36—41
- 58 Hill R, *J. Mech. Phys. Solids*, **11** (1963) : 357—372
- 59 Watt P J, O'Connell R J, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **21** (1980) : 359—370
- 60 Walpole L J, *J. Mech. Phys. Solids*, **14** (1966) : 151—162
- 61 Walpole L J, *J. Mech. Phys. Solids*, **14** (1966) : 289—301
- 62 Willis J R, *J. Mech. Phys. Solids*, **25** (1977) : 185—202
- 63 Hashin Z, Shtrikman S, *J. Appl. Phys.*, **33** (1962) : 1514—1517
- 64 Brailsford A D, Major K G, *Br. J. Appl. Phys.*, **15** (1964) : 313
- 65 Kroner E, *J. Mech. Phys. Solids*, **25** (1977) : 137—155
- 66 Dederichs P H, Zeller R, *Z. Physik*, **259** (1973) : 103—116

- 67 Willis J R. *J. Mech. Phys. Solids*, **39** (1991) : 73—86
 68 Fouta Castaneda P. *J. Mech. Phys. Solids*, **39** (1991) : 45
 69 Talbot D R S, Willis J R. *IMA J. Appl. Math.*, **35** (1985) : 39
 70 Diener G, Raabe Ch, Weissbarth J. *J. Mech. Phys. Solids*, **29** (1981) : 181—198
 71 Millër M N. *J. Math. Phys.*, **10** (1969) : 1988—2004
 72 Diener G, Hurrich A, Weissbarth J. *J. Mech. Phys. Solids*, **32** (1984) : 21—39
 73 Torquato S. *Appl. Mech. Rev.*, **44** (1991) : 37—76
 74 Milton G W. *Appl. Phys. Lett.*, **37** (1980) : 300—302
 75 Bergman D. *J. Phys. Rep.*, **43** (1978) : 377—407
 76 Wiener O. *Ab. Math-Phys. Kl. Konigl. Saechs. Ges.*, **32** (1912) : 509
 77 Milton G W. *J. Appl. Phys.*, **52** (1981) : 5294—5304
 78 Golden K. *J. Mech. Phys. Solids*, **34** (1986) : 333—358
 79 Phillips M G. Proc. 8th Int. Conf. on Composite Materials, Hawaii (1991) : 29-D-1-10
 80 Nomura S, Chou T-W. *J. Appl. Mech.*, **51** (1984) : 540—545
 81 Milton G W, Kohn R V. *J. Mech. Phys. Solids*, **36** (1988) : 597—629
 82 Teply J L, Dvorak G J. *J. Mech. Phys. Solids*, **36** (1988) : 29—58
 83 Mura T. *Micromechanics of defects in solids*, Second, Martinus Nijhoff, Netherlands (1987)
 84 Beran M J. *Statistical continuum theories*, Wiley, New York (1968)
 85 Christensen R M. *Mechanics of composite materials*, Wiley-Interscience, New York (1979)
 86 Milton G W. *J. Mech. Phys. Solids*, **30** (1982) : 177—191
 87 McCoy J J. *Macroscopic response of continua with random microstructures*, in *Mechanics Today*, Vol. 6, Nemat-Nasser, S., ed., Pergamon Press (1981) : 1—40

STUDY OF OVERALL PROPERTIES OF COMPOSITES WITH INCLUSIONS

Wu Linzhi Du Shanyi

School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

Shi Zhifei

Department of Civil Engineering, Northern Jiaotong University, Beijing 100044

Abstract This paper gives a review on the studies of the effective elastic moduli of composite materials with inclusions, which include the self-consistent theory, the differential method, Eshelby-Mori-Tanaka's method, and Hashin and Shtrikman's variational method etc. Since the microstructural characteristics of composites such as the shape, geometric size and distribution of inclusions and interaction between inclusions, have not been properly considered by the theories indicated above, the effective elastic moduli of composite materials are not successfully predicted when the volume fraction of inclusions is larger than 0.3. Subsequently, a new method which has recently been developed—the integral method of the related function—is introduced. As a comparison with experimental results, it is shown that the latter method is still effective when the volume fraction of inclusions is larger.

Keyword *composite materials; effective elastic moduli; inclusions; interaction*