

非线性湍流模式研究及进展*

符 松

清华大学工程力学系, 北京 100084

提要 现代湍流模式研究已经超出了经典的 Boussinesq 涡粘性概念和线性的雷诺应力输运范畴。湍流运动过程中的非线性本质已成为模式研究人员所关心的中心问题。其目的在于使湍流模式能更加真实地再现湍流运动的复杂性, 提高模式的适用范围, 使复杂湍流能够得到合理的模拟。非线性湍流模式在解决复杂湍流运动的计算中已经取得可喜进展, 正逐步应用于工程湍流的计算。同时, 工程中的湍流问题计算也已走出了简单剪切流动类型及传统的 $k-\varepsilon$ (及其它形式的) 二方程模式框架, 二阶矩封闭模式在先进的工程计算中已被用来解决诸如可压缩的空气动力学、发动机气缸及三维复杂几何场内等具有重要应用背景的流动问题, 并逐步进入计算流体力学商业软件包。

关键词 湍流模式; 计算流体力学; 复杂流动; 数值方法

1 概 述

直到前不久, 湍流模式、工业流动计算、数值方法的研究基本上在各自的方向独立发展, 它们之间的研究交流十分松散。湍流模式的研究基本上基于简单的剪切流动, 平均场的流线大致平行于流场的几何边界, 在此基础上建立的湍流模式通过写成张量形式推广到多维流动问题, 著名的 Launder-Reece-Rodi (LRR) 二阶矩封闭模式就是这样建立的^[1]。在工程计算方面, 人们为满足应用及设计方面的诸多要求, 往往仅满足于对湍流作简单处理。例如, 在空气动力学问题的计算中, 许多人至今仍停留在混合长度模式上。然而, 对湍流高阶模式的忽视实际上限制了人们解决实际问题的能力和手段。简单地说, 湍流对流动阻力起决定作用, 对湍流的有效控制可以有效地降低流动阻力; 湍流对流动混和 (进而对燃烧、热运输) 等过程同样起着不可忽视的作用。正因为如此, 近年来, 在工程湍流计算中, 人们愈来愈重视对湍流场的研究, 高阶湍流模式已开始被应用于各种复杂几何和复杂物理的流动计算中, 并取得可喜成绩。

湍流模式在总体上可划分为基于 Boussinesq 假设的涡粘性模式 (BVM) 和基于雷诺应力

* 本课题由国家自然科学基金、清华大学基础研究基金及中科院力学所非线性连续介质力学开放研究实验室资助。

输运方程的二阶矩封闭模式,前者又可细分为混合长度、一方程和二方程模式(包括 $k-\varepsilon$, $k-w$, $k-\tau$ 等模式^[2,3,4]),后者则有代数应力模式(ASM)和雷诺应力输运方程形式模式(DSM)两大类。在涡粘性模式中,雷诺剪切应力的方向与平均场的应变率相同。这一特点可以说是涡粘性模式的基本缺陷之一,在复杂流动中,湍流场的变化滞后于平均场的变化,例如在管道旋流实验中^[5]人们观察到,剪切应力 \overline{uv} 和 \overline{vw} 组成的方向角小于速度梯度 $\partial U/\partial r$ 和 $(\partial w/\partial r - w/r)$ 的方向角, \overline{uv} 并不平行于 $\partial U/\partial r$ 。在二阶矩封闭模式中,雷诺应力与平均速度之间的关系则隐含在一组联立的偏微分方程式中,它们之间的相互关系包括一些复杂的物理机制。后面我们将看到,雷诺应力方程中的压力-应变率相关项为雷诺应力的输运过程提供了快慢两种不同的变化机理,在一定程度上反映了湍流的非线性作用。通常形式的二阶矩封闭模式对雷诺应力来说基本上线性的,所包含的非线性作用非常小,不能令人满意地用来解决复杂的工程问题。

非线性湍流模式在理论和应用上目前都已成为工程湍流计算研究中的核心问题之一。不管是在二方程还是在二阶矩封闭模式框架下,人们已经成功地提出了不同形式的非线性模式,在具有重要工程应用背景的湍流计算中(如换热管^[6]、撞击射流^[7]、表面减阻^[8]等)已取得成功,表明非线性湍流模式是今后工程湍流计算的发展方向。

2 湍流运动的基本方程

2.1 平均场流动方程

在工程湍流计算中,流动的平均参数对工程设计具有重要作用,流动的运动方程都建立在雷诺平均的概念下,即对 Navier-Stokes 方程取某种形式的平均,如时间平均、体积平均或系综平均。对于不可压流动来说,平均场的动量方程(即雷诺方程)形式如下:

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (1)$$

其中 $\overline{u_i u_j}$ 即为雷诺应力,为方程中的未知量。上式中的 U_i 和 P 为平均速度分量和压力,显然,当平均方式为时间平均时, $\partial U_i/\partial t = 0$ 。流体运动时必须满足连续方程,即

$$\partial U_i/\partial x_i = 0 \quad (2)$$

2.2 雷诺应力输运方程

在雷诺平均框架下的流动控制方程中,湍流的全部信息可以被认为是包含在二阶速度相关项 $\overline{u_i u_j}$ 之中,若 $\overline{u_i u_j}$ 被忽略不计时,则方程(1)回归到层流的控制方程。由此可见,层流可被看作是湍流的一个极限特例,在大部分工程湍流问题, $\overline{u_i u_j}$ 不仅不能被忽视,而且对流动混合、扩散等起决定性作用。

由于雷诺应力的存在,雷诺方程实际上并不封闭,我们在建立 $\overline{u_i u_j}$ 的封闭模式之前,有必要讨论雷诺应力输运的控制方程,其表达式为

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_p} - \overline{u_i u_j u_p} - \frac{p u_i}{\rho} \delta_{j p} - \frac{p u_j}{\rho} \delta_{i p} \right) \\ & - \left(\overline{u_i u_p} \frac{\partial U_j}{\partial x_p} + \overline{u_j u_p} \frac{\partial U_i}{\partial x_p} \right) + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 2r \frac{\partial u_i}{\partial x_p} \frac{\partial u_j}{\partial x_p} \end{aligned} \quad (3)$$

该方程等式左边为应力的对流输运项 (c_{ij}), 等号右边的第一个括弧中的项 (d_{ij}) 代表湍流的扩散特性, 控制湍流的空间分布, 由三种不同的物理机制组成: 粘性扩散、三阶速度相关及压力与速度的相互作用。第二个括弧表示湍流的生成机制 (P_{ij}), 即湍流在通常情况下由雷诺应力和速度梯度的相互作用所产生。第三个括弧项为压力与应变率的相关 (ϕ_{ij}), 由张量的缩并原理和连续条件可知, $\phi_{pp} = 0$ 。因此, ϕ_{ij} 仅在湍流各分量间存在, 它起着重新分配湍流的作用, 因此通常称为再分配项。最后一项为应力的耗散率 (ϵ_{ij})。为方便起见, 我们将方程 (3) 写作

$$c_{ij} = d_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (4)$$

方程 (4) 中的 d_{ij} , ϕ_{ij} 和 ϵ_{ij} 为新的未知量, 但对雷诺应力输运起重要作用的对流和生成机制则是封闭的, 因此, 人们只须对 d_{ij} , ϕ_{ij} 和 ϵ_{ij} 作适当模化即可得到封闭的二阶矩输运方程。例如在工程湍流问题中, 流动的雷诺数高, 湍流耗散基本呈各向同性, 因此,

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \quad (5)$$

ϵ_{ij} 的六个未知量由此转化为一个。扩散和再分配机制则十分复杂, 下一节将详细讨论。

3 湍流基本模式

3.1 $k-\epsilon$ 二方程涡粘模式

根据 Boussinesq 假设, 雷诺应力与平均场应变率有如下关系:

$$\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k = -\nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

其中涡粘系数 ν_t 在 $k-\epsilon$ 模式中取

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (7)$$

k 为湍流动能, ϵ 为湍能的耗散率。 k 和 ϵ 的基本模式方程为^[2]

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_p} \right] + \frac{1}{2} P_{pp} - \epsilon \quad (8)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_p} \right] + \frac{\epsilon}{k} \left(C_{\epsilon 1} \frac{1}{2} P_{pp} - C_{\epsilon 2} \epsilon \right) \quad (9)$$

该模式的标准系数一般取值如下:

C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

3.2 二阶矩封闭模式 (DSM)

基本形式的二阶矩封闭模式取如下形式:

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\left(\nu + c_\epsilon \frac{k}{\epsilon} u_p u_q \right) \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_q} \right] \quad (10)$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ij1} + \phi_{ij2} + \phi_{ijw}$$

其中

$$\phi_{ij1} = -C_1 \varepsilon a_{ij}, \quad a_{ij} = \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) / k \quad (11)$$

$$\phi_{ij2} = -C_2 \left[\left(p_{ij} - \frac{\delta_{ij} p_{kk}}{3} \right) - \left(c_{ij} - \frac{\delta_{ij} c_k}{3} \right) \right] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ijw} = & c_{1w} \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_p u_q n_p n_q} \delta_{ij} - 1.5 \overline{u_p u_i n_p n_j} - 1.5 \overline{u_p u_j n_p n_i}) f_e \\ & + C_{2w} (\phi_{pq2} n_p n_q \delta_{ij} - 1.5 \phi_{pi2} n_p n_j - 2.5 \phi_{pj2} n_p n_i) f_e \end{aligned} \quad (13)$$

在模式方程(9—13)中, 扩散模式取自 Daly-Hartow^[9] 梯度扩散假设, ϕ_{ij} 包含三个机制: 湍流各项同性回归 (ϕ_{ij1} 也称慢速项), 湍流与平均场的相互作用 (ϕ_{ij2} 或称快速项), 壁面反射项 (ϕ_{ijw})。在二阶矩模式中, 湍流耗散率方程一般用

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\left(\nu + c_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_p u_q} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_q} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (0.5 C_{\varepsilon 1} P_{kk} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (14)$$

方程(9—14)中的系数通常取值为:

C_1	C_2	c_{1w}	c_{2w}	c_ε	c_ε
1.8	0.6	0.5	0.3	0.22	0.18

3.3 代数应力模式 (ASM)

代数应力模式是建立在其 DSM 的对应形式上, 即在上一节中的模式中取^[10]

$$c_{ij} - d_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (c_k - d_k) = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (0.5 P_{kk} - \varepsilon). \quad (15)$$

其中 c_k, d_k 分别为湍流能量的对流和扩散。这一简化导致 (对自由流动)

$$\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k = \frac{1 - C_2}{C_1 + \lambda - 1} \frac{k}{\varepsilon} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) \quad (16)$$

这一方程不包含 $\overline{u_i u_j}$ 的湍流分项, 求解大为简化, 其中 $\lambda = 0.5 P_{kk} / \varepsilon$ 。

3.4 湍流基本模式的简单讨论

对于 $k-\varepsilon$ 模式来说, 其众所周知的缺陷为涡粘系数的各向同性特点, 这是对实际流动的一个十分粗略的假设。Boussinesq 假设所隐含的以前不为人们所注意的重要缺陷在于雷诺应力与平均场应变率的线性关系, 这一关系使得例如在方管流动中 $k-\varepsilon$ 模式无法再现流动中出现的二次流^[12], 在旋转管流中导致剪切应力 \overline{vw} 消失而使流动呈刚体旋转状 ($W \propto r$)。这是因为在旋转管流中切向速度 W 的方程在充分发展时给出

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r(\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right] = 0 \quad (17)$$

这里 ν_t 根据式(7)的定义不可能为负, 因而必有 $W/r = \text{常数}$ 。

$k-\varepsilon$ 模式表现出来的这一缺陷在“标准”ASM 方程中也同样存在。基于方程(16)的分析解, 文献[11]得出了雷诺应力与时均速度之间的关系, 对于旋转管流, ASM 仍然给出 $W/r = \text{常数}$ 的错误结论。由此可见, 为了再现湍流流动的基本物理特性, 求解雷诺应力的输

运方程是最低的要求，否则，在涡粘性模式中，Boussinesq 假设则应作非线性模化扩充，以再现湍流的非线性的内在性质。

4 湍流模式的发展

4.1 非线性 $k-\varepsilon$ 模式

发展非线性的湍流模式是近几年来国内外模式研究领域中的一个中心课题之一。即便是早已基本定型的 $k-\varepsilon$ 涡粘性模式，人们对其向非线性化的发展重又作出很大努力。目前发展较成功的非线性 $k-\varepsilon$ 模式为 Speziale^[12] 和 Craft & Launder^[6] 提出的模式，前者成功地计算出了充分发展方管中的二次流，后者还有效地计算出了旋转管道流动中非线性切向速度剖面的特点（见图 1）。Speziale 模式在文献中已有介绍^[12]。本文仅着重介绍 Craft 等人的非线性涡粘模式。

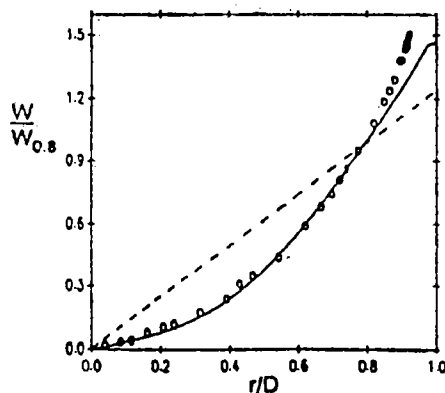


图1 轴向旋转管流的切向速度分布，实线为非线性二方程模式计算结果

非线性涡粘模式思想是在 Boussinesq 涡粘度假设的基础上加入非线性的速度梯度项，速度梯度可以表现为应变率和涡量，在 Craft 等人的模式中，雷诺应力被表示为

$$\begin{aligned}
 u_i u_j = & \frac{2}{3} \delta_{ij} k - \nu_t S_{ij} + c_1 \frac{k}{\varepsilon} \nu_t \left(S_{im} S_{mj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_{mn} S_{mn} \right) \\
 & + c_2 \frac{k}{\varepsilon} \nu_t (\Omega_{im} S_{mj} + \Omega_{jm} S_{mi}) + c_3 \frac{k}{\varepsilon} \nu_t \left(\Omega_{im} \Omega_{mj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Omega_{mn} \Omega_{mn} \right) \\
 & + c_4 C_\mu \nu_t \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \left(S_{mj} \Omega_{ni} + S_{mi} \Omega_{nj} - \frac{2}{3} \delta_{ij} S_{mp} \Omega_{pn} \right) S_{mn} \\
 & + c_5 C_\mu \nu_t \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \left(S_{im} S_{jn} - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_{mp} S_{pn} \right) S_{mn} \\
 & + C_\nu \nu_t \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^2 S_{ij} (c_6 S_{mn} S_{nm} + c_7 \Omega_{mn} \Omega_{mn})
 \end{aligned} \tag{18}$$

这里， $S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ ， $\Omega_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ ，

$$c_\mu = \frac{0.3}{1 + 0.35[\max(S, \Omega)]^{1.5}} \left[1 - \exp\left(\frac{-0.36}{\exp(-0.75\max(S, \Omega))}\right) \right],$$

S 与 Ω 为无量纲应变率与涡量:

$$S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad \Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (19)$$

Craft 等人的模式虽看起来繁长,但在计算应用中却有较好效果,除图 1 给出的旋转流的例子外,该模式还在均匀剪切、弯曲槽流、撞击射流等简单到复杂流动中作了验算,取得的效果令人满意^[6]。

4.2 非线性二阶矩封闭模式的发展

二阶矩封闭模式的非线性化主要指的是雷诺应力输运方程中湍流再分配项 ϕ_{ij} 的非线性模化。在方程 (10—13) 给出的基本模式中我们看到 ϕ_{ij} 是雷诺应力 $\overline{u_i u_j}$ 的线性函数,由于再分配项包含着湍流非局域性 (non-local) 性质,线性的 ϕ_{ij} 模式在理论上是不完善的。近几年来,二阶矩封闭模式的研究主要集中于湍流再分配特性的压力-应变率相关作用的模化,尤其是非线性模化。

雷诺应力再分配项的模化主要包括两部分:湍流脉动速度间的相关作用和脉动相关与平均速度梯度间的相互作用,分别记作 ϕ_{ij1} 和 ϕ_{ij2} 。对于 ϕ_{ij1} 的模化,根据各向同性回归的原理,一般表示为^[13]

$$\phi_{ij1} = -\varepsilon [c_1 a_{ij} - c'_1 (a_{ij}^2 - \delta_{ij} A_2/3)] \quad (20)$$

其中, $a_{ij}^2 = a_{im} a_{mj}$, $A_2 = a_{ij}^2 = a_{ij} a_{ji}$, $a_{ij} = \overline{u_i u_j} / k - 2/3$, δ_{ij} 为雷诺应力各向异性张量, A_2 为雷诺应力各向异性张量的二阶不变量。方程 (20) 中我们仅将 a_{ij} 作二阶展开,由 Cayley-Hamilton 定理给出,高阶项不独立,可表示为一阶和二阶项的函数,因此,式 (20) 可看作是 ϕ_{ij1} 非线性模式的一般表达式。目前各向同性回归项模式都基于式 (20) 的形式,

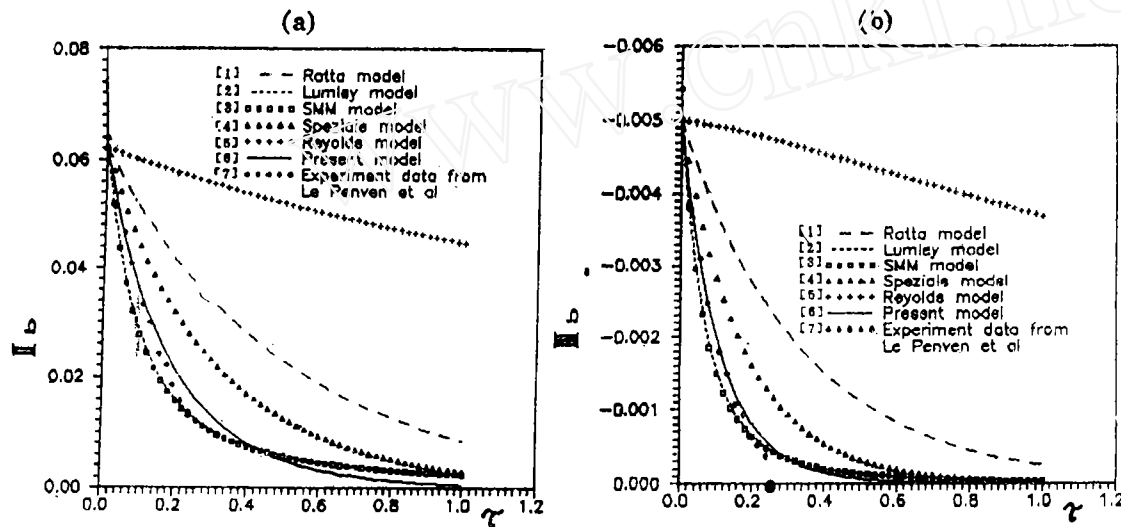


图 2 湍流衰减的模式预测与 Le Penven 等人的平面收缩实验结果对比,
 $\Pi_i < 0$: (a) 二阶不变量 (b) 三阶不变量

- [1] Rotta 模型 [2] Lumley 模型 [3] SMM 模型 [4] Speziale 模型
 [5] Reynolds 模型 [6] Present 模型 [7] 取自 Le Penven 等人的实验数据

例如, 最典型的 Rotta 模式为 $c'_1 = 0$, $c_1 = 1.5 - 1.8$. 施鹏和符松^[14]对现有的模式作了仔细研究, 并提出了一组能反映湍流结构的模式系数 c_1 和 c'_1 , 它们分别为

$$c'_1 = 1.5c_1, \quad c_1 = \frac{1}{2}(1.85 - 0.65\chi); \quad (21)$$

其中, $\chi = \sqrt[3]{A_3} / \sqrt{A_2}$, A_3 为雷诺应力各向异性张量的三阶不变量, 对于不同结构的湍流, 其回归速率变化很大, 参量 χ 则可较合理地反映这一变化. 计算表明, 施鹏-符松模式较好地再现了“雪茄”状和“馅饼”状湍流的衰减过程^[14]. 图 2 为几种各向同性回归模式的比较.

在复杂流动中, 脉动速度的相关与平均速度梯度的相互作用对雷诺应力输运方程的平衡起着重要作用. 由于雷诺应力一般随平均场的量快速变化, 因而该项也通常称作快速项. 式 (12) 中给出的基准模式为线性模式, 它的提出没有考虑湍流的可实现性, 因而有可能给出不真实解 (如湍能 $k < 0$). 非线性快速项模式的提出一般基于可实现性条件的制约. 目前在国际上受重视的非线性模式为 FLT^[15], SL^[16], SSG^[17] 等三种模式. 美国 NASA 对这三个模式作了详细的比较研究, 认为 FLT 和 SSG 模式较为成功^[18]. 笔者作为 FLT 模式的提出者之一, 在此仅对该模式作简单讨论.

FLT 模式对雷诺应力的展开在三阶层次上进行截断, 快速项 ϕ_{ij2} 因而可表示为

$$\phi_{ij2} = 2k(a_{1ijk} + a_{1jik}) \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{1ijk} = & a_1 \delta_{li} \delta_{kj} + a_2 (\delta_{lj} \delta_{ki} + \delta_{lk} \delta_{ij}) + a_3 b_{li} \delta_{kj} + a_4 b_{kj} \delta_{li} \\ & + a_5 (b_{lj} \delta_{ki} + b_{lk} \delta_{ij} + b_{ij} \delta_{lk} + b_{ki} \delta_{lj}) + a_6 b_{li} b_{kj} + a_7 (b_{lj} b_{ki} + b_{lk} b_{ij}) \\ & + a_8 b_{ij}^2 \delta_{kj} + a_9 b_{kj}^2 \delta_{li} + a_{10} (b_{ij}^2 \delta_{ki} + b_{lk}^2 \delta_{ij} + b_{ij}^2 \delta_{lk} + b_{ki}^2 \delta_{lj}) \\ & + [a_{11} \delta_{li} \delta_{kj} + a_{12} (\delta_{lj} \delta_{ki} + \delta_{lk} \delta_{ij})] \text{II}_b \\ & + a_{13} b_{li} b_{kj}^2 + a_{14} b_{kj} b_{li}^2 + a_{15} (b_{ij} b_{ki}^2 + b_{lk} b_{ij}^2 + b_{ij} b_{lk}^2 + b_{ki} b_{ij}^2) \\ & + [a_{16} \delta_{li} \delta_{kj} + a_{17} (\delta_{lj} \delta_{ki} + \delta_{lk} \delta_{ij})] \text{III}_b \\ & + [a_{18} b_{li} \delta_{kj} + a_{19} b_{kj} \delta_{li}] \text{II}_b + a_{20} (b_{lj} \delta_{ki} + b_{lk} \delta_{ij} + b_{ij} \delta_{lk} + b_{ki} \delta_{lj}) \text{II}_b \end{aligned} \quad (23)$$

这里, a_i 为常数, $b_{ij} = a_{ij}/2$, $\text{II}_b = A_2/4$, $\text{III}_b = A_3/8$. 为确定系数 a_i , 上式被认为满足下列三个制约条件:

- 连续条件: $a_{1ikk} = 0$
- 归一化条件: $a_{1ikk} = \overline{u_i u_j} / k$
- 二分量湍流极限: $\phi_{\alpha\alpha 2} = 0$

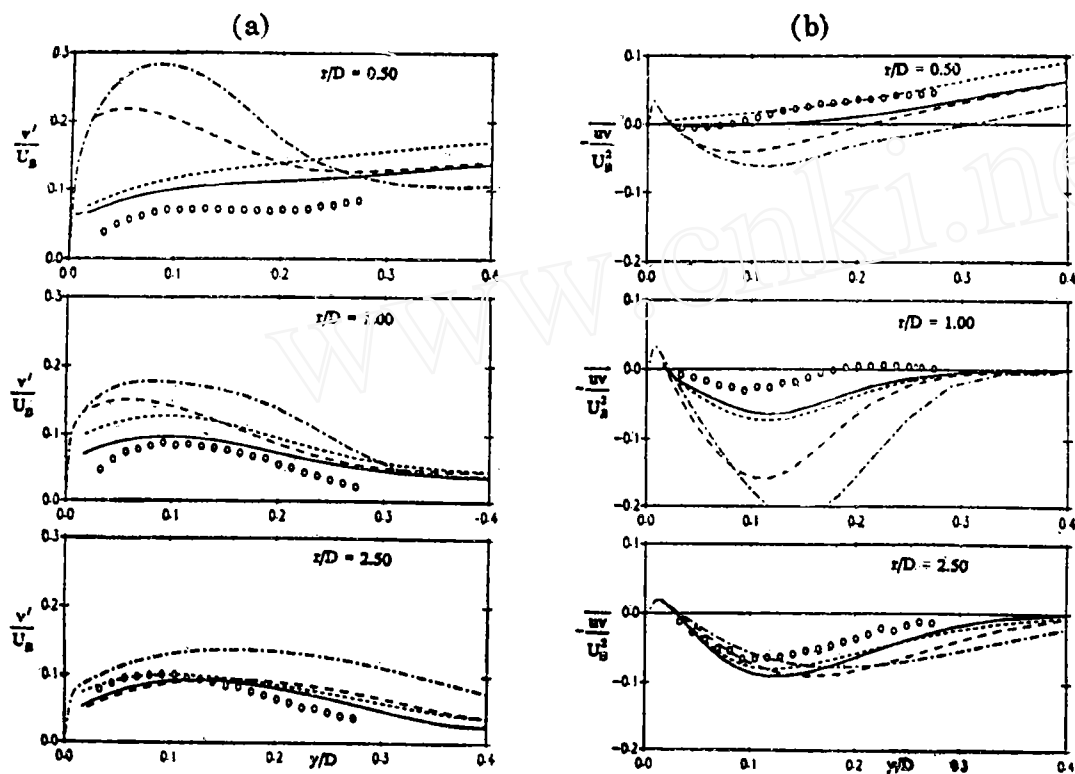
二分量湍流极限可理解为当湍流的一个脉动分量在一个方面上受抑消失时, 该分量输运方程的各项亦消失, 因而有 $\phi_{\alpha\alpha 2} = 0$, α 为该分量方向. 由此制约条件可得出方程 (23) 中的 18 个系数, ϕ_{ij2} 的模化形式则为

$$\begin{aligned}
\phi_{i,jz} = & -\left[0.6 - t\left(\frac{7}{15} - \frac{A_2}{4}\right)\right]\left(P_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}P_{kk}\right) + [(0.3 + 0.1t)P_{kk} - 0.05ta_{lk}P_{lk}]a_{ij} \\
& - 0.05t\left(a_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}A_2\right)P_{kk} - (0.2 - 0.1t)(R_{im}P_{mj} + R_{mj}P_{im}) - 0.4kR_{li}R_{kj}S_{lk} \\
& - \frac{2}{30}t\delta_{ij}R_{lk}P_{lk} - rA_2(P_{ij} - D_{ij}) + 0.1t\left(R_{li}R_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}R_{lk}^2\right)(6D_{lk} + 13kS_{lk}) \\
& - (3ra_{ij}a_{kj} + 0.2tR_{li}R_{kj})(P_{lk} - D_{lk}) \tag{24}
\end{aligned}$$

其中，系数 r 和 t 待定， r 一般取 0.6， t 的早期取值为零，现在趋于取 0.5。

方程 (24) 所表现的不仅是非线性雷诺应力的作用，还直接包含雷诺应力与涡量的相互作用，如 $P_{ij} - D_{ij} = \overline{u_i u_m \Omega_{mj}} + \overline{u_j u_m \Omega_{mi}}$ 。涡与雷诺应力的相互作用应当被认为是湍流运动的基本特征之一，因而以上模式在理论上更为完善。

从应用角度来看，非线性模式也取得了较理想结果。图 3 给出的是撞击射流 (impinging jet) 的计算结果，图中比较了 4 种湍流模式，其中的三阶模式 (cubic model) 即本文所讨论的式 (24) 模式。撞击射流对垂直起飞、降落过程起重要作用，非线性模式对这一流动表现了很好的模拟能力。章光华^[19] 在有重要理论与应用背景的三维复杂湍流边界层流动研究中，应用非线性湍流模式有效地再现了流动的三维特性。



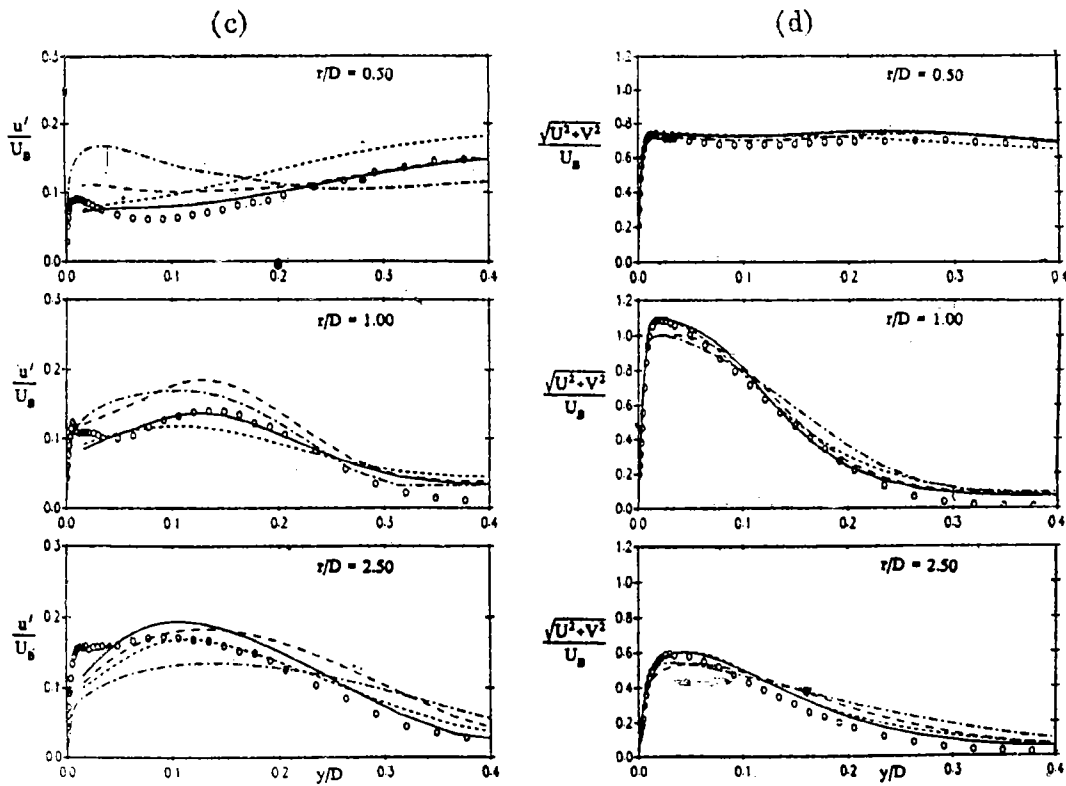


图3 4种湍流模式在撞击射流计算中的比较。链线： $k-\epsilon$ 模式；长虚线：基准应力模式；
实线：修正基准应力模式；点线：非线性应力模式
(a) v' 随半径的变化, $H/D=2.0$; $Re=23000$
(b) 壁射流区湍流剪切应力剖面, $H/D=2.0$
(c) 平均速度矢量方向上的脉动速度均方根值的变化, $H/D=2.0$; $Re=23000$
(d) 壁射流区的平均速度剖面, $H/D=2.0$; $Re=23000$

5 湍流模式研究及其工程应用前景

湍流模式研究在本世纪末前将仍沿非线性化方向发展, 但研究途径将更加丰富, 主要内容将包括:

- 完善非线性涡粘模式 ($k-\epsilon$ 二方程模式) 研究, 使之实用化, 具有更大的普适性;
- 应用直接数值模拟 (或大涡模拟) 数据库详细探讨二阶矩方程中各物理量的特性, 为改善和建立模式提供更多和充足的依据;
- 完善雷诺应力耗散率方程的模化, 在耗散率各向异性的研究方面可望取得进展;
- 近壁湍流模式研究近几年来已成为模式研究领域的焦点之一, 建立完善的二阶矩近壁模式将仍是今后的研究重点;
- 建立可压缩湍流二阶矩模式, 为解决激波与湍流边界层、湍流跨音速流等复杂空气动力学问题提供依据;
- 湍流模式研究将进入更加复杂的流动领域, 复杂性将包括复杂的流物理性质 (如柯氏力与湍流场的相互作用等) 和复杂的流场几何;

- 应用重整化群理论为二阶矩湍流模式提供更完善的理论依据;
- 湍流模式的实用化、商业化, 在目前国际上流行的大型软件包中(如 Phoenix, Fluent, Flow 3-D 等), 应用二阶矩模式的尚不成熟, 这将在今后几年内得到改善。

湍流模式研究的中心目的是为解决工程流动计算问题提供可靠手段, 随着研究的深入和数值方法的发展, 应用湍流模式解决工程湍流问题的前景日趋明朗。目前, 计算湍流的先进软件已经可以成熟地采用非交错网格、非正交坐标系, 分区域(或多区域)和无结构网格技术也已成功地应用在 $k-\varepsilon$ 湍流模式计算中, 二阶矩模式则已进入了解决可压流阶段, 并取得明显效果。由于应用湍流模式解决工程问题是一条经济有效途径, 对计算机要求远低于大涡和直接数值模式, 在我国展开模式研究既符合国情又是解决问题的切实可行的方法。

参 考 文 献

- 1 Launder E B, Reece G J, Rodi W. Progress in the development of a Reynold-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.* **68** (1975) : 537—566
- 2 Launder B E, Spalding D B, The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **3** (1974) : 269—289
- 3 Wilcox D C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J.* **26** (1988) : 1299—1310
- 4 Speziale C G, Abid R, Anderson E C. Critical evaluation of two-equation models for near-wall turbulence. *AIAA J.* **30**, 2 (1992)
- 5 Reich G, Beer H. Fluid flow and heat transfer in axially rotating pipe-I: effect of rotation on turbulent pipe flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **32**, 3 (1989) : 551—562
- 6 Craft T J, Launder B E, Leschziner M A. On the prediction of turbulent flow in spirally fluted tubes. Proc. 5th Int. Symp. Refind Flow Modelling and Turbulence Measurements, France (1993)
- 7 Craft T J, Launder B E. New wall-reflection model applied to the turbulent impinging jet. *AIAA J.* **30**, 12 (1992)
- 8 Launder B E, Li S P. On the prediction of riblet performance with engineering turbulence models. *Appl. Sci. Research* **50** (1993) : 283—298
- 9 Daly B J, Harlow F H. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, **13** (1970) : 2634—2649
- 10 Rodi W. A new algebraic stress relation for calculating the Reynolds stresses. *Z. Ang. Math.* **56** (1976) : 219
- 11 符松. 代数雷诺应力模式的分析解及其在旋转管流中的应用. 第4届全国湍流与流动稳定性学术会议, 南京 (1994)
- 12 Speziale C G. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23** (1991) : 107—157
- 13 Lumley J L. Computational modeling of turbulent flows. *Adv. Appl. Mech.* **18** (1978) : 123—176
- 14 施鹏, 符松. 湍流各向同性回归过程的非线性模化. 第4届全国湍流与流动稳定性学术会议, 南京 (1994)
- 15 Fu S (符松), Launder B E, Tseleidakis D P. Accommodating the effects of high strain rates in modelling the pressure-strain correlation. Rep. No. FTD/87/5, Mech. Eng. Dept. UMIST (1987)
- 16 Shih T-H, Lumley J L. Modelling of Pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar coax equation. Rep. No. FDA-85-3, Cornell Univ., Ithaca, N. Y. (1985)
- 17 Speziale C G, Sarkar S, Gatski, T. Modelling the pressure strain of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.* **227** (1991) : 245—272
- 18 Abid R, Speziale C G. Predicting equilibrium state with Reynolds stress closures in channel flow and homogeneous shear flow. *Phys. Fluids A* **5**, 7 (1993) : 1776—1782
- 19 章光华, 熊国华. Second-moment closure for modelling the nearwall turbulence in 3D mean flows. Proc. 2nd int. conf. Fluid Mech., Beijing (1993) : 228

PROGRESS IN THE STUDY OF NONLINEAR TURBULENCE MODELLING

Fu Song

Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084

Abstract Contemporary turbulence modelling research has been developed beyond the classical concepts of Boussinesq eddy-viscosity and linear Reynolds-stress transport, the nonlinear nature of turbulent flows is now one of the focal points of researcher's concern. The purpose is to develop the turbulence model which can simulate for modelling studies the complexity of turbulence motion more realistically, and to increase the adaptivity of the model in applications. Significant progress has been made over the last few years in the development of the nonlinear turbulence models which include both eddy-viscosity and second-moment closures. Meanwhile, the calculation of engineering turbulent flows has been carried out beyond the simple-shear type flows and traditional two-equation model approach, second-moment closures have been implemented in advanced commercial computer codes to solve problems like compressible aerodynamics, IC engines and 3-D complex flows with important engineering background. This article is to present an overview of these developments, emphasis will be laid on the author's modelling experience.

Keywords *turbulence model; computational fluid dynamics; complex flows*