第24卷 第2期 力学进展 Vol. 24 No. 2
1994年5月25日 ADVANCES IN MECHANICS May 25, 1994

译 文

利用符号运算进行工程分析——一个突破*

Abraham I Beltzer
[以色列] Tel-Aviv 大学 Holon 技术教育研究所

提要 50年代初期，关于符号运算的最初的规程已经成为可用的．自那时起，它们的进展和使用已发展为一门学科．除了无可争辩的工作效益和更高的可靠性之外，借助于使用符号运算，工程分析的一些熟知方法可以扩展到新的使用范围．还有一个已经习以为常的情况，即近来对于研究人员来说用键盘工作比用铅笔可能更为方便．本文综述了可用于符号运算的主要软件以及从使用者的角度来看它在工程分析中的应用．

1 引 言

当然，从计算机已对科学分析带来了惊人的影响开始进行叙述是平凡琐碎的．也许有点意义的是指出，事实上迄今这一说法是意味着，对数值计算的影响已经暗含了代替上述说法的意思．由于数字计算机的出现而强调"离散"方法并不总是可接受的，因为数值解可能不具有很合乎需要的足够一般的性质．它们还可能是过分形式的，而且难于验证和解释．研究人员甚至曾讨论过"与计算机合作或与之竞争"的狼狈处境．尽管有些人回避了基于数值算法的工作而勇敢地去冒选择与计算机竞争的危险，但目前人类的聪明才智正在通过提供具有实现分析运算能力的计算机而使这种狼狈处境成为过去．够令人惊讶的是，正是这同样的数字计算机现在促进着重新建立起分析方法与数值方法之间的融洽平衡的而有望获得丰富成果．此外，正在兴起的所谓"计算机代数"或"符号运算"这一领域，在克服由于进行数值计算的有限速度而引起的困难方面可能是有用的．正如 Davenport et al (1988) 所指出的，为了赶在48小时以前准确地预报天气，甚至用 CRAY 巨型机仍然需要大大超过48小时的运算时间．

本文的目的是综述可用于符号运算的主要软件以及从使用者的角度来看它在工程分析中的应用．特别是，将考察它在变分法和有限元法方面的应用．涉及此课题的文献刊登在多种多样的期刊上，难于跟踪．笔者谨向在本评论文章中未提到的在计算机代数的应用方面工作的那些作者表示歉意．尽管如此，可以相信这里给出的文献有充分的代表性．希望本文将促使广大工程界注意到正在兴起的符号运算这一领域的巨大能力．

* 本文原文作者 Beltzer A I 及《*Applied Mechanics Reviews*》杂志主编 Metzner A W K 惠允译成中文在本刊登载，特致谢意．——编者

2 软件．它的可操作性与能力

在50年代初期，关于符号运算的最初一批规程（codes）已成为可用的（Kahrimanian，1953；Nolan，1953）．从那时起，这些规程的研制和使用已发展为一门学科，它主要以计算机科学为基础，而且至少就目的而论与人工智能这一领域紧密相关(Taylor，1988)．的确，这些规程含有“数学的”知识且对于使用者起着智力伙伴的作用，可以认为它们是一些专家系统．

尽管现在有许多这样的专家系统是可用的，但其中只有几个得到了充分发展和检验．MACSYMA 是最老和最强有力的系统之一．它具有一个发展得特别好的程序库，且已被广泛使用多年．它通用于 VAX 族，Apollo，Masscomp，IBM 386，Sun & Symbolics机，甚至手提式 Compaq．就内在功能而论，REDUCE 也许不如 MACSYMA 那样全面，但它可用于许多大型机和微机，例如IBM 系列 360，370，Cyber 等等．MAPLE 因相对地更快而著名，且对于符号运算比其他系统可供更多的使用者之用．它的存储空间需要较小，且可用于下列系统：IBM VM/SP CMS，VAX/VMS，或 UNIX 和 PC-386．最近的一个系统是 MATHEMATICA，它尤其通用于 Mácintosh Ⅱ，PC-386，NEXT 和 CRAY．

最后，我们要提到 SCRATCHPAD 和 DERIVE．前者是一个新系统，它的可利用性很有限，但由于它的先进的结构，可以代表符号规程的下一代样品．与上述系统不同，它还不是特别方便用户的．DERIVE 也许属于另一极端．它是 muMATH 系统的一个副产品，通用于几乎每一种个人计算机，且使用很简单．当然，它缺少上述其他规程的威力．

除了可用于上述系统的参考手册外，还发表了若干有用的专著和论文．Davenport et al（1988）评述了 MACSYMA 和 REDUCE 和此课题的一般基础知识．Pavelle & Wang（1985）简要介绍了MACSYMA，而 Wooff & Hodgkinson（1987）则介绍了 muMATH．Wolfram（1988）全面地描述了 MATHEMATICA．虽然讨论符号运算应用的论文刊登于各种期刊中，但以软件专家为读者的《Journal of Symbolic Computation》已于1985年创刊．它也刊登面向应用的文章．计算机器协会（Association for Computing Machinery，ACM)的符号与代数运算特殊关心组（Special Interest Group in Symbolic and Algebraic Manipulations SIGSAM）把软件的研究者和使用者联合起来而且出版其会刊．

主要的符号规程存在于 LISP 或 C 语言中，且其中包括支持下列程序：

i．对整数、有理数、实数和复数的运算，具有理论上不受限制的精确度；

ii．对矩阵和多项式的计算，具有符号项和数值项；

iii．解析微分和积分、级数展开式、极限计算等；

iv．各种代换和处理．

可能存在一个 SHARE 程序库能方便地实行张量计算、解微分方程或积分方程、进行 Laplace 变换和其他工作．许多这样的程序是以模式匹配法（pattern matching techniques）为基础的．大多数系统还可以生成数值 FORTRAN，BASIC 和其他规程（Gates，1985）．

我们现在提供 MACSYMA 性能的某些简例，它们也是其他系统的典型例子．这个规程可以用于联机方式或 Batch 方式．它的激励可记为 c 线，而响应则标记为 d 线．

比方说，我们要展开 $(a+b)^2$．打印

(c1) expand $((a+b)$^2)；

而规程回答出

(d1) $a^2+2ab+b^2$

若我们要微分 $\cos x\sin x$，则我们发出

(c2) diff (cos(x)* sin(x),x)；

于是得到

(d2) $\cos^2(x)-\sin^2(x)$

若我们要对 b 微分 $(a+b)^2$ 两次，则我们打印

(c3) diff ((a+b)^2,b,2)；

于是得到

(d3) 2

下列指令得到 2 个线性方程

$$ax_1+bx_2=c,\ dx_1+ex_2=f \tag{1}$$

的解：

(c4) linsolve ([a*x[1]+b*x[2]=c,d*x[1]+e*x[2]=f,[x[1],x[2]])；

(d4) $\left[x_1=-\dfrac{ce-bf}{bd-ae},\ x_2=\dfrac{cd-af}{bd-ae}\right]$

这里是解微分方程的一个例子：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0,\ (m>0,k>0) \tag{2}$$

(c5) assume (m>0,k>0)；

(d5) [m>0, k>0]

(c6) m*'diff(x,t,2)+k*x；

(d6) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx$

(c7) ode2(%,x,t)：

(d7) $x=\%k1\sin\left(\dfrac{\mathrm{sqrt}(k)t}{\mathrm{sqrt}(m)}\right)+\%k2\cos\left(\dfrac{\mathrm{sqrt}(k)t}{\mathrm{sqrt}(m)}\right)$

这里 %k1 和 %k2 为自由常数，而 sqrt≡√

指令 ic2 可供对 2 阶方程所加的初始条件之用．比方说，

$$x(t=0)=x_0,\ \frac{dx}{dt}(t=0)=x_1 \tag{3}$$

我们发出

(c8) ic2 (d7,t=0,x=x0, diff(x,t)=x1)；

(d8) $x=\dfrac{\mathrm{sqrt}(m)\sin\left(\dfrac{\mathrm{sqrt}(k)t}{\mathrm{sqrt}(m)}\right)x1}{\mathrm{sqrt}(k)}+\cos\left(\dfrac{\mathrm{sqrt}(k)t}{\mathrm{sqrt}(m)}\right)x0$

下一个例子讨论方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0 \tag{4}$$

满足初始条件（3）．我们打入

(c1) assume ($m>0, c>0, k>0$)；

(d1) $[m>0, c>0, k>0]$

(c2) m*'diff(x, t, 2) + c*'diff(x, t, 1) + k*x；

(d2) $$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx$$

(c3) ode2(%, x, t)；

(d3) $$x=\%e^{-\frac{ct}{2m}}\left(\%k1\sin\left(\frac{\mathrm{sqrt}\left(\frac{4k}{m}-\frac{c^2}{m^2}\right)t}{2}\right)+\%k2\cos\left(\frac{\mathrm{sqrt}\left(\frac{4k}{m}-\frac{c^2}{m^2}\right)t}{2}\right)\right)$$

(c4) ratsimp (ic2($d3, t=0, x=x0$, diff(x, t) = $x1$))；

(d4) $$\begin{aligned}x=-\%e^{-ct/(2m)}&\times\Big(\mathrm{sqrt}(4km-c^2)\Big(-2m\sin\Big(\frac{\mathrm{sqrt}(4km-c^2)t}{2m}\Big)x1\\&\qquad-c\sin\Big(\frac{\mathrm{sqrt}(4km-c^2)t}{2m}\Big)x0\Big)\\&+(c^2-4km)\cos\Big(\frac{\mathrm{sqrt}(4km-c^2)t}{2m}\Big)x0\Big)\Big/(4km-c^2)\end{aligned}$$

边界条件可以借助于 bc2 包括进去．例如，若边界条件为

$$x(t=0)=1,\quad x(t=1)=2 \tag{5}$$

则我们发出

(c5) bc2($d3, t=0, x=1, t=1, x=2$) $

式中 $ 为防止冗长表达式的出现，现在它可简化为

(c6) ratsimp (d5)；

(d6) $$\begin{aligned}x=-\%e^{-ct/(2m)}&\times\Big(\Big(\cos\Big(\frac{\mathrm{sqrt}(4km-c^2)}{2m}\Big)-2\,\%e^{-c/(2m)}\Big)\times\sin\Big(\frac{\mathrm{sqrt}(4km-c^2)t}{2m}\Big)\\&-\sin\Big(\frac{\mathrm{sqrt}(4km-c^2)}{2m}\Big)\times\cos\Big(\frac{\mathrm{sqrt}(4km-c^2)t}{2m}\Big)\Big)\Big/\sin\Big(\frac{\mathrm{sqrt}(4km-c^2)}{2m}\Big)\end{aligned}$$

指令 integrate 得出给定表达式对给定变量的不定积分．比方说，我们求得

$$\int\frac{z}{z^2+1}dz \tag{6}$$

如下：

(c7) z/(z**2 + 1)；

(d7) $$\frac{z}{z^2+1}$$

(c8) integrate (%,z);

(d9) $$\frac{\log(z^2+1)}{2}$$

若指令 integrate 以其自变量的积分限给出，则它将进行定积分。也可以进行多重积分。

一个矩阵可以用打印 matrix ([ ],…,[ ]) 生成，此处方括号包含矩阵的横行。另一办法是使用 zeromatrix 指令和 do 语句相结合。比方说，我们需要一个 3×3 矩阵，其元素为

$$(a^j)^i,\quad i,j=1,2,3 \tag{7}$$

下列程序将它作出：

(c1) (h : zeromatrix(3,3), for i : 1 thru 3 do(for j : 1 thru 3 do $h[i,j:](a^1j)^1i$)) $

(c2) h;

(d2) $$\begin{bmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^4 & a^6 \\ a^3 & a^6 & a^9 \end{bmatrix}$$

在复合语句 (c1) 的第一个子语句中我们定义 h 为 3×3 零矩阵，然后借助于 do 改变其输入使其赋于由 (7) 给定的值。在 (c2) 中调入 h，我们得到由 (d2) 给出的最终形式。

在下列两个指令中我们得到逆矩阵 $g=h^{-1}$ 和 h 矩阵的行列式

(c3) g : h^^(−1);

(d3) $$\begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^3-a^2-a+1} & -\frac{1}{a^3-2a^2+a} & \frac{-1}{a^6-a^5-a^4+a^3} \\ -\frac{1}{a^3-2a^2+a} & \frac{a^2+1}{a^6-2a^5+a^4} & -\frac{1}{a^7-2a^6+a^5} \\ \frac{1}{a^6-a^5-a^4+a^3} & -\frac{1}{a^7-2a^6+a^5} & \frac{1}{a^9-a^8-a^7+a^6} \end{bmatrix}$$

(c4) determinant (h);

(d4) $$a(a^{13}-a^{12})-a^2(a^{11}-a^9)+a^3(a^8-a^7)$$

这些只是 MACSYMA 能力的一小部分。以类似办法，这些操作也可以借助于其他系统来完成。应当指出，读者可以在第一次使用规程的经验之后立即完成上述计算。在工程研究的水平上编写程序则需要更严格的基础知识。

3 应 用

就工程分析或科学分析而论，符号运算在时间、成果和可靠性方面显然都提供了巨大的收益。张量计算的冗长运算是符号运算的第一批应用之一。读者在 Howard(1980) 的书中可找到某些典型例子。就工程分析而论，下面我们在指出典型文献的同时列出某些应用。它们包括随机振动理论和稳定性理论 (Rehak et al, 1987; Benaroya & Rehak, 1987)，机器动力学 (Garrad & Quarton, 1986; Sylva & Hodges, 1986)，声学和流体力学 (Laure & Demay, 1989; Bau et al, 1988; Cabannes & Duruisseau-Aloyd, 1989; Fitt, 1989)，摄动和分岔理论 (Rand & Armbruster, 1987)，机器人动力学 (Hirschberg & Schramm, 1989)，多晶体中的波传播 (Stanke & Kino, 1984; Hirsekorn, 1988) 以及变分法 (Elishakoff & Tang, 1988; Beltzer,1990). 有限元法代表一个特别有发展前景的应用领域. 关于刚度矩阵的自动生成的第一批研究之一由 Cecchi & Lami (1977) 完成. Noor & Anderson (1979; 1981) 提供了此课题的一个阐述并讨论了某些主要应用. 进一步的发展可在下列论文中找到: Tan (1986), Wang et al (1984), Wang (1985; 1986), Wang et al (1986), Kikuchi (1989) 和 Bardell (1989). 最后, Beltzer (1990) 的教材讨论了借助于符号运算完成的经典的变分法和有限元法. 各种各样的研究工作也在一些科学会议上报告过. 例如, ASA 和 ASME 最近的一些年会都包括了关于此课题的专门会议. 尽管如此, 实际的应用甚至比发表过的还要更广泛些. 例如, 符号运算规程经常用于校验手算获得的结果.

如前所述, 这些规程以容易和可靠的手段大大提高了我们进行复杂而冗长的计算的能力. Rehak et al(1987) 发表的研究工作从这个观点来看特别有说服力. 他们提出计算机代数应用于结构的概率分析的 5 个例子, 从而显示了这一工具的优越性. 应当指出, 所获得的某些结果甚至是他们未曾试图进行手算的. 下面考察他们的两个例子.

由一随机力激发的确定性振子的支配方程的无量纲形式为

$$\ddot{x}_0(t)+2\xi\dot{x}_0(t)+x_0(t)=F(t),\quad x_0(0)=\dot{x}_0(0)=0 \tag{8}$$

式中的点表示对时间的导数, ξ 为阻尼比, 自然频率取为 1, 而 $F(t)$ 为由其谱密度 $S_{FF}(\omega)$ 描述的一个平稳随机强迫函数. $x_0,\dot{x}_0,\ddot{x}_0$ 的方差用 m_0,m_1,m_2 来表示.

若 $H(i\omega)$ 为系统的复频率响应, 则输出谱密度为

$$S_{XX}(\omega)=|H(i\omega)|^2S_{FF}(\omega) \tag{9}$$

在频域中我们求得

$$m_j=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{2j}S_{XX}(\omega)d\omega,\quad j=0,1,2 \tag{10}$$

用残数法计算这些积分时已使用MACSYMA. 当 $H(i\omega)$ 和 S_{FF} 是以多项式之比来表达时, 可写出此程序以便对于给定的 j 来计算 m_j. 这一特别规程的限制为分母是 2 次多项式的乘积. MACSYMA 程序算出泛积分 (generic integral)

$$I(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)dx}{(a_1x^2+b_1x+c_1)\cdots(a_Nx^2+b_Nx+c_N)} \tag{11}$$

式中 x 是积分变量, $g(x)$是 x 的多项式. 若此被积式是收敛的, 则 $g(x)$ 可能含有高到 x^{2N-1} 幂次的项. 第一步包括求出分母的 $2N$ 个极点, 然后选出在上半平面上的那些极点, 且计算对应的残数. 最后令 $I(x)=2\pi\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}_j$

特别地, 对于

$$S_{FF}(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2},\quad H(i\omega)=\frac{1}{1+i\mu-\omega^2+2i\xi\omega} \tag{12}$$

式中 μ 为引入的结构阻尼, 可以得到

$$\left.\begin{aligned}
m_0&=\frac{2\xi(2\xi+\alpha)[\alpha(2\xi+\alpha)+1]-\mu^2}{(2\xi-\mu)(2\xi+\mu)\{\alpha(2\xi+\alpha)[\alpha(2\xi+\alpha)+2]+\mu^2+1\}}\\
m_1&=\frac{\alpha\{2\xi[\alpha(2\xi+\alpha)+\mu^2+1]+\alpha\mu^2\}}{(2\xi-\mu)(2\xi+\mu)\{\alpha(2\xi+\alpha)[\alpha(2\xi+\alpha)+2]+\mu^2+1\}}\\
m_2&=\alpha\frac{\{2\alpha\xi[\alpha(2\xi+\alpha)+2]-(\alpha-1)(\alpha+1)\mu^2+\alpha^2+1-\alpha^3\mu^2\}}{(2\xi-\mu)(2\xi+\mu)\{\alpha(2\xi+\alpha)[\alpha(2\xi+\alpha)+2]+\mu^2+1\}}
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

第 2 个例子讨论由一随机力激发的一个随机振子．振子的刚度假定为由其谱密度

$$S_{KK}(\omega)=\sigma_K^2\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2} \tag{14}$$

描述的零平均有色噪声随机过程 $K(t)$．支配方程为

$$\ddot{x}(t)+2\xi\dot{x}(t)+x(t)=F(t)-K(t)x(t) \tag{15}$$

因为不存在此方程的精确解，所以响应用 $x(t)\approx x_0(t)+x_1(t)$ 来逼近，式中 $x_0(t)$ 为确定性系统对于 F-输入的响应，$x_1(t)$ 为同一确定性系统对于 $K(t)x_0(t)$ 的响应．

谱密度用下式来逼近：

$$S_{xx}(\omega)\approx S_{x_0x_0}(\omega)+S_{x_1x_1}(\omega) \tag{16}$$

交叉项 $S_{x_1x_0}$ 通过取 $x_1(t)$ 的自相关函数的逆 Fourier 变换求出．这是由下列方程支配的：

$$\ddot{x}_1(t)+2\xi\dot{x}_1(t)+x_1(t)=-K(t)x_0(t) \tag{17}$$

对应于有效强迫函数 $K(t)x_0(t)$ 的输入谱密度为

$$S_{(Kx_0)(Kx_0)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}(S_{KK}(\omega)*S_{x_0x_0}(\omega)) \tag{18}$$

式中星号 * 表示卷积．于是

$$S_{x_1x_1}(\omega)=\frac{1}{2\pi}(S_{KK}(\omega)*S_{x_0x_0}(\omega))\,|H(i\omega)|^2 \tag{19}$$

$S_{x_1x_1}$ 利用在前一例子中制定的同一规程用残数积分计算．由于它们的冗长，这例里的残数并不加起来．它们被转换成 FORTRAN 且合并成一个数值规程．其他几个例子讨论分布的累积量、梁的随机振动以及具有白噪声系数的 N 阶方程．

Cabannes & Duruisseau-Aloyd (1989) 考察了稀薄气体理论中出现的一个离散模型，它由下列非线性微分方程组给出：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial n_1}{\partial t}-\frac{\partial n_1}{\partial x}-\frac{\sqrt{6}}{2}Q_1=0\\
\frac{\partial n_2}{\partial t}+\frac{\partial n_2}{\partial x}+\frac{\sqrt{6}}{2}Q_1=0\\
\frac{\partial n_3}{\partial t}+\frac{\partial n_3}{\partial x}-2\sqrt{6}\,Q_1-\frac{4}{3}Q_2=0\\
\frac{\partial n_4}{\partial t}-\frac{\partial n_4}{\partial x}+2\sqrt{6}\,Q_1-\frac{4}{3}Q_2=0\\
\frac{\partial n_5}{\partial t}-\frac{2}{3}Q_2=0
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

式中 $Q_1=n_2n_4-n_1n_3$，$Q_2=n_3n_4-n_5^2$．这里 $n_i(x,t)$ 描述分子密度．(20) 的一个解具有下列形式：

$$n_j=\alpha_j+2\frac{\beta_j\sin(2\lambda x)-\gamma_j\sinh(2\mu t)}{\cos(2\lambda x)+\cosh(2\mu t)} \tag{21}$$

为表示 (20) 已使用计算机代数，将 (21) 代入 (20)，然后对在 (21) 中出现的未知参数解30个代数方程组．解与早先用冗长的手算求得的相吻合，从而不仅证实了其适用性，还认可了符号运算规程的性能．

其次，在直接变分法或有限元法方面，早先毫无可能的高阶分析逼近现在可以完成．Elishakoff及其合作者发表了关于结构稳定性的研究，其中为方便计算而应用了计算机代数(Elishakoff & Tang，1988；Elishakoff & Couch，1988；Elishakoff & Hallkamp，1987；Elishakoff & Wang，1987；Lottati & Elishakoff，1987)．下面要考察的 Bardell (1989)的工作也是一个良好说明．

所谓有限元法的 p 变体，是为了达到足够精确的解而假定逼近多项式函数的次数 p 要尽可能地大．广泛用于有限元法中的数值积分格式，由于数值误差会增大而在 $p \geqslant 6$ 时失效．然而．这些积分可以用符号运算精确地计算．

为此，Bardell首先将结构的一个单元的全部在平面上的和平面外的位移用下列标准方式表示：

$$\left.\begin{aligned} m(\xi) &= \sum_{r=1}^{p} x_r g_r(\xi) \\ v(\xi) &= \sum_{r=1}^{p} y_r g_r(\xi) \\ w(\xi) &= \sum_{r=1}^{p} z_r f_r(\xi) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式中x_r，y_r，z_r为任意系数(广义坐标)，$g_r(\xi)$和$f_r(\xi)$是从 Legendre 正交多项式的 Rodrique 形式得到的形函数．与所用的特殊方法无关，多项式函数的各“对”及其导数应当在一起相乘，然后在确定的积分限之间加以积分以导出结构的刚度矩阵和质量矩阵．

可以看出，对于一般的梁、板、壳结构，我们感兴趣的是下列 3 组积分：

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} g_i^{\alpha}(\xi) g_j^{\beta}(\xi) d\xi \\ &\int_{-1}^{1} f_i^{\alpha}(\xi) f_j^{\beta}(\xi) d\xi \\ &\int_{-1}^{1} f_i^{\alpha}(\xi) g_j^{\beta}(\xi) d\xi \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

式中 $i,j=1,2,3,\cdots,p$，而 $\alpha,\beta=1,2$ 为导数的阶．因而，对于上述 3 种情形中的每一种都将有 $9p^2$ 个乘积和积分．比方说，对于10个位移函数，需要2700个乘积和积分．因此，代数运算很快就无能为力．然而，用符号运算却可以很容易求得结果．Bardell提出了用REDUCE编写的一个简单程序和这些积分的精确值的大批表格．

说明符号运算可靠性和有效性的下一个例子，是带有 4 个节点和12个自由度的矩形板单元的刚度矩阵的推导．在每个节点处存在位移的 3 个分量，即挠度 w 以及两个转角θ_x和θ_y．节点力矢量 $\{q\}$ 与节点位移矢量 $\{w\}$ 之间有如下的关系式：

$$\underset{[12\times1]}{\{q\}} = \underset{[12\times12]}{[k]}\ \underset{[12\times1]}{\{w\}} \tag{24}$$

式中 $[k]$ 是单元的刚度矩阵．在用有限元法正确求 $[k]$ 的早期阶段曾作过许多努力，至多也只不过要作些冗长的计算而已［例如，见 Cook (1981) 的关于误差的历史］．按照 Beltzer (1990)，下面我们提出以 MACSYMA 规程编写的一个程序，它提供了 $[k]$ 的自动推导法，假定读者对此规程已有了某种程度的熟悉．

首先，我们借助于由下面给出的 po 矩阵和 a 矩阵来表达挠度 $w(x,y)$ 和 $w(x,y)$ 有关的导数如下：

```
(c3) po: matrix ([1,x,y,x^2,x*y,y^2,x^3,x^2*y,x*y^2,y^3,x^3*y,x*y^3]) $
(c4) (a: zeromatrix (12,1) for i : 1 thru 12 do a[i,1] : bo[i]) $
(c5) w: po,a;
```

(d5) $bo_{12}xy^3+bo_{10}y^3+bo_9xy^2+bo_6y^2+bo_{11}x^3y$
$+bo_8x^2y+bo_5xy+bo_3y+bo_7x^3+bo_4x^2+bo_2x+bo_1$

```
(c6) (wy: diff(-w,y),wx: diff(w,x)) $
```

于是，$w(x,y)$ 由 (d5) 给出而转角由 (d6) 给出。其次，将节点坐标表示为 x_i 和 y_i，$i=1,2,3,4$，而在这些点处的挠度和转角的值分别表示为 w_i，tet x_i，tet y_i，并计算这些量。

```
(c7) for i : 1 thru 4 do
     (subst([x=x[i], y=y[i]],w)w[i]: %%, subst([x=x[i], y≈y[i], wy,
     tet x[i]: %%
     subst([x=x[i], y=y[i]], wx), tet y[i]: %%) $
```

此线性方程组可用符号写为

$$\{w\}=[c]\{a\} \tag{25}$$

式中 $\{a\}$ 由 (c4) 给出，它是挠度函数 $w(x,y)$ 的系数 bo_i 的上述矩阵。c 矩阵可借助于 coefmatrix 得出。因此我们把坐标系放在矩形 $2a1\times 2a2$ 的中心，并规定节点为

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=-a1, & y_1=-a2 \\ x_2=-a1, & y_2=a2 \\ x_3=a1, & y_3=a2 \\ x_4=a1, & y_4=-a2 \end{array}\right\} \tag{26}$$

并打入

```
(c8) (c: coefmatrix ([w[1], tet x[1], tet y[1], w[2], tet x[2], tet y[2],
     w[3], tet x[3], tet y[3], w[4], tet x[4], tet y[4], bo[1], bo[2], bo[3],
     bo[4], bo[5], bo[6], bo[7], bo[8], bo[9], bo[10], bo[11], bo[12]]),
     c: subst([x[1]=-a1, y[1]=-a2, x[2]=-a1, y[2]=a2, x[3]=a1,
     y[3]=a2, x[4]=a1, y[4]=-a2], %%)) $
```

式中 c 矩阵是对 (26) 给出的那些节点计算的。

这时我们可以求得内插函数矩阵 $\{d(x,y)\}$，这是由于

$$\{d(x,y)\}^T=[po][c]^{-1} \tag{27}$$

式中 $[po]$ 由 (d3) 给出。$\{d(x,y)\}^T$ 表示为 interpoltr 并在下面由 (d9) 给出：

```
(c9) (invc: c^^(-1), interpoltr: po, %%) $
```

式中 invc 为 c 矩阵的逆。

其次，表述 (c10) 中的广义应力 $\{\varepsilon\}$，接着是 s 矩阵，它使 $\{a\}$ 与 $\{\varepsilon\}$ 有关系式

$$\{\varepsilon\}=[s]\{a\} \tag{28}$$

并且利用了下列指令：

```
(c10) (ex: -diff(w,x,2),ey: -diff(w,y,2),exy: 2*diff(w,x,1,y,1)) $
(c11) s: coefmatrix([ex,ey,exy],[bo[1],bo[2],bo[3],bo[4],bo[5],
      bo[6],bo[7],bo[8],bo[9],bo[10],bo[11],bo[12]]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

现在接着有

$$\{\varepsilon\}=[s][c]^{-1}\{w\} \tag{29}$$

从而，应变-位移矩阵 $[B]$ 为

$$[B]=[s][c]^{-1} \tag{30}$$

因此我们将计算（30），并写出弹性常数矩阵 H 如（d13）所示，

```
(c12) B: s. invc $
(c13) H: matrix([1,m,0],[m,1,0],[0,0,m1]);
```

(d13) $$\begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m1 \end{bmatrix}$$

式中 $m=\nu$，$m1=(1-\nu)/2$，而公共乘子 $D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 已被略去．此处 ν 为Poisson比．

可以证明

$$[k]=\iint_S [B]^T[H][B]\,dx\,dy \tag{31}$$

式中 S 为单元面积．从而，刚度矩阵 $[k]$ 的各个元可从下列指令得出：

```
(c14) (g: transpose(B).H.B,assume-pos: true,intanalysis: false,
      for i:1 thru 12 do for j:1 thru 12 do (if j>=i) then
      (k[i,j]: integrate (integrate (g[i,j],x,-a1,a1),y,-a2,a2),
      display (k[i,j]))) $
```

例如，

$$\left.\begin{aligned} k_{1,1} &= \frac{14a1^2a2^2m1+5a1^2a2^2m+10a2^4+10a1^4}{10a1^3a2^3} \\ k_{1,2} &= -\frac{2a2^2m1+5a2^2m+10a1^2}{10a1a2^2} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

此分析也可进一步推广以求出结构的刚度矩阵（Beltzer，1990）．

这些例子提供了早期想法的良好说明，即符号运算在计算的方便性和可靠性方面产生了巨大收益．应指出的另一点是，这个方法还可得到一个定性的新特点．例如，上述的解是一个解析解，尽管事实上它是通过有限元法求得的．于是，当借助于符号运算进行计算时，此法不再是典型的数值法．所得的解析解可进一步用于各种目的，例如，可用于优化．Beltzer(1990)给出了几个有关例子，讨论了通过符号运算来进行有限元法计算的这些新的能力．

再者，甚至像 Rayleigh-Ritz 法这样一个经典方法，也可以重新表述以使它变得更具有

一般性．关于这个方法，现在我们可以从一开头就考虑一族同类问题而不是单个问题．然后通过一些简单的指令从一个主要程序得出解．

为此，最好是详细地考察弹性地基上的梁的例子．它可提供一个相当紧凑的打印输出．记梁长为 z，挠度为 w，轴向坐标为 x．令 ei,k 及 q 分别为梁弯曲刚度，地基刚度及横向分布载荷．这些记号虽然有点异乎寻常，但在 MACSYMA 规程中作为符号运算却是方便的．

不是去考虑唯一确定的各边界条件而是考虑它们的全体，梁所遵从的边界条件为：

(i)两端铰支；(ii)两端固支；(iii)一端为铰支而另一端为固支；(iv)两端简支；(v)一端固支（悬臂梁）．它们意味着以挠度函数 $w(x)$ 及其导数表示的下列边界条件：

(i) $$w(x=0)=w''(x=0)=0,\quad w(x=z)=w''(x=z)=0 \tag{33a}$$

(ii) $$w(x=0)=w'(x=0)=0,\quad w(x=z)=w'(x=z)=0 \tag{33b}$$

(iii) $$w(x=0)=w''(x=0)=0,\quad w(x=z)=w'(x=z)=0 \tag{33c}$$

(iv) $$w(x=0)=w(x=z)=0 \tag{33d}$$

(v) $$w(x=0)=w'(x=0)=0 \tag{33e}$$

梁的一端，比方说，$x=0$ 端总是固定的．从而，$w(x)$可表示为

$$w=\sum_{i=1}^{N}a_i x^i \tag{34}$$

若$N>3$，则此近似式总能成立，与特殊问题无关．这是因为甚至对于情形(i)—(iii)我们都只需要 3 个系数来满足边界条件．例如，令

$$N=6 \tag{35}$$

在(i),(ii)及(iii)情形下，根据极值条件将有 3 个自由系数可调节．而在(iv) 及 (v)情形下则有 5 个自由系数可以调节．

应为极小的势能的泛函 f 为

$$f=\int_0^z[ei(w'')^2/2+kw^2/2-qw]dx \tag{36}$$

而上述极值条件为如下类型：

$$df/da_i=0 \tag{37}$$

注意，由于 Rayleigh-Ritz 法的精神，(34) 中较低幂次的系数由边界条件(33)确定，而其余的系数则由极值条件 (37) 确定．使用符号运算规程后，此过程的主要部分对于上述所有情形都可以只须一次就编出程序．这一简化的结果，用手算是不可能得到的．

用 Rayleigh-Ritz 法求解上述这族问题的主程序以 MACSYMA 规程给出如下：

```
(c1) w : sum(a[i]*x^i,i,1,6) $
(c2) (wx : diff(w,x),wxx : diff(%%,x) $
(c3) [wz : ev(w,x=z),wx0 : ev(wx,x=0),wxz : ev(wx,x=z),
     wxx0 : ev(wxx,x=0),wxxz : ev(wxx,x=z)] $
(c4) ritz(w,q,ei,k): = (ei*'diff(w,x,2))^2/2 + k*w^2/2 - q*w,
     ev(%%,diff),f : integrate(%%,x,0,z),
     for i from 2 thru 6 do b[i] : diff(f,a[i]) $
```

可以看出，(c1) 确定 (34)，而 (c2) 分别确定导数 $wx=w'$ 及 $wxx=w''$．在 (c3)

中我们指出出现在边界条件（33）中的各量. 最后，在（c4）中的Ritz函数计算出由（36）给出的泛函 f. 然后计算出其导数，记为 $b[i]$. 注意，求微分从 $a[2]$ 开始，因为对于所有上述情形来说 $a[1]$ 都从规定的边界条件得出. 用此程序可容易地处理由（33）给出的所有情形.

首先考虑情形（i），即铰支梁情形.

(c5) linsolve([wz,wxx0,wxxz],[a[1],a[2],a[3]]);

(d5) $$\left[a_1=\frac{12a_6z^5+7a_5z^4+3a_4z^3}{3},\ a_2=0,\ a_3=-\frac{15a_6z^3+10a_5z^2+6a_4z}{3}\right]$$

(c6) w : ratsimp(subst(%,d1));

(d6) $(12a_6xz^5+7a_5xz^4+(3a_4x-15a_6x^3)z^3-10a_5x^3z^2+6a_4x^3z+3a_6x^6+3a_5x^5+3a_4x^4)/3$

(c7) ritz(%,q,ei,k) $

(c8) linsolve([b[4],b[5],b[6],[a[4],a[5],a[6]]);

(d8) $$\left[a_4=\frac{97515kqz^4+8494200eiq}{251k^2z^8+2117280eikz^4+203860800ei^2},\right.$$

$$a_5=-\frac{95238kqz^3}{251k^2z^8+2117280eikz^4+203860800ei^2},$$

$$\left.a_6=\frac{31746kqz^2}{251k^2z^8+2117280eikz^4+203860800ei^2}\right]$$

(c9) w : ratsimp(subst(%,w));

(d9) $(2227kqxz^7-36400kqx^3z^5+97515kqx^4z^4$

$+(8494200eiqx-95238kqx^5)z^3+31746kqx^6z^2$

$-16988400eiqx^3z+8494200eiqx^4)/(251k^2z^8+2117280eikz^4+203860800ei^2)$

可以看出，(d5) 得出系数 a_1,a_2 和 a_3 的值，它们可供（34）满足（33a）之用；而后(d6)提供 w 的相应的形式. 而这样又可以让我们调出在(c7)中关于规定的自变量 w,q,ei 和 k 的 Ritz 函数. 求解由 Ritz 函数提供的在（c8）中的方程组（因为 a_i 尚为未知），我们得出由（d9）给出的关于 w 的解.

所得的解具有良好的精确度. 例如，对于中点 $x=x/2$ 及 $kz^4/ei=4$，我们得到

(c10) ev (subst([x=z/2,k=4*ei/z^4],%),numer);

(d10) $$\frac{0.0125053z^4q}{ei}$$

它与以双曲函数及三角函数表示的精确解所预示的值相吻合（Roark & Young, 1975).

对于固支梁［情形（ii）］我们再次使用主程序（c1)—(c4）进行如下：

(c11) linsovle([wz,wx0,wxz],[a[1],a[2],a[3]]) $

(c12) w : ratsimp(subst(%,d1)) $

(c13) ritz(%,q,ei,k) $

(c14) linsolve(b[4],b[5],b[6]],[a[4],a[5],a[6]]) $

(c15) w : ratsimp(subst(%,w));

(d15) $(495kqx^2z^6-2706kqx^3z^5+5643kqx^4z^4-5148kqx^5z^3$

$+(1716kqx^6-1698840eiqx^2)z^2-3397680eiqx^3z$

$-1698840eiqx^4)/(5k^2z^8+83952eikz^4+40772160ei^2)$

对于弹性地基不存在的特殊情形，我们从（$d15$）重新得出精确解（Roark & Young, 1975）。

(c16) ratsimp(subst($k=0$,%));

(d16) $$\frac{qx^2z^2-2qx^3z+qx^4}{24ei}$$

其他各种情形可类似地处理。

在动力学情形下我们可以再次从一开始就考虑一组问题而不是单个问题。梁的自由振动由挠度 w_d 所支配，

$$w_d=w(x)\sin\omega_n t \tag{38}$$

式中 ω_n 为未知的自然频率。可以证明（Thomson, 1981）自然频率 ω_n 与下列方程组的行列式的根有关：

$$\frac{1}{2}\omega_n^2\frac{\partial m0}{\partial a_i}-\frac{\partial u_{max}}{\partial a_i}=0 \tag{39}$$

式中

$$m0=\int_0^z row^2(x)dx \tag{40}$$

$$u_{max}=\frac{1}{2}\int_0^z[ei(x)w_{xx}^2(x)+kw^2]dx \tag{41}$$

其中 ro 为每单位长度的质量。

只要指出这样一点就够了，由下面给出的 Rayleigh 函数，再加上程序(c1)—(c4)，也可以处理自由振动：

```
(c33) rayleigh(w,ei,k,ro) : =(diff(w,x,2)^2*ei/2+w^2*k/2,umax :
      integrate(%%,x,0,z),m0 : integrate(w^2*ro,x,0,z),
      for i:2 thru 6 do h[i] : wn2*diff(m0,a[i])/2-diff(umax,a[i])) $
```

此处 $wn2=\omega_n^2$。可以看出，在（39）左端的 Rayleigh 函数值表示为 $h[i]$。

例如，对于固支梁，我们将w用（d16）代替以便调出 Rayleigh 函数

```
(c34) rayleigh(d16,ei,0,ro) $
```

剩下的工作是求解行列式方程，它保证解的存在性。仅仅为了容易求得可观测的结果，我们首先令 $a_6=0$ 以降低近似式的阶，然后用下列程序得到解：

```
(c35) (subst(a[6]=0,[h[4]h[5]]),coefmatrix(%%,[a[4],a[5]])) $
(c36) (determinant(%),solve(%%,wn2),float(%%));
```

(d36) $$\left[wn2=\frac{504.0ei}{ro\,z^4},\ wn2=\frac{3960.0ei}{ro\,z^4}\right] \tag{42}$$

它们与下列精确解相比是良好的

$$[\omega_n^{(1)}]^2=\frac{501.76ei}{ro\,z^4},\ [\omega_n^{(2)}]^2=\frac{3806.89ei}{ro\,z^4} \tag{43}$$

其他各种边界条件情形可类似地处理.

除了对工程计算有显著影响外，符号运算规程还可以在理论推导方面有用．例如，下面给出 MACSYMA 自动推导提供一个合适的泛函的支配方程．为此，考虑一个连续 2 维系统，其 Lagrange 函数依赖于某一函数、依赖于它对时间的 1 阶导数以及它对空间的 1 阶及 2 阶导数．记此函数为 h，其自变量为 t,x,y，所对应的有关导数为 ht,hx,hxy 等．然后给出下列 MACSYMA 程序自动地推导而提供 Lagrange 函数的 Euler-Lagrange 方程：

```
(c1) depends([h,ht,hx,hxx,hyy,hxy,hy],[t,x,y]) $
(c2) [ht : diff(h,t),hx : diff(h,x),ky : diff(h,y)hxx :
     diff(h,x,2),hyy : diff(h,y,2),hxy : (h,x,1,y,1)]
(c3) eula(La) : =(diff(La,h)-diff(diff(La,ht),t)
     -diff(diff(La,hx),x)-diff(diff(La,hy),y)
     +diff(diff(La,hxx),x,2)+diff(diff(La,hyy)y,2)
     +diff(diff(La,hxy),x,1,y,1)) $
```

此处(c1)和(c2)表述必要的泛函依赖性，而(c3)说明作为 Lagrange 函数 La 的 eula 函数的 Euler-Lagrange方程的一般形式．为使用此程序，我们只需调出规定的自变量 La 的 eula．我们就弹性板振动的情形来验证这一点．记密度为 ro，弯曲刚度为 sd，分布载荷为 q：

```
(c4) eula(-h*q(x,y,t)-(hxy^2-hxx*hyy)*(1-m)*sd
     +(hxx+hyy)^2*sd/2+ro*ht^2/2;
```

(d4) $\qquad -q(x,y,t)+\left(\frac{d^4h}{dy^4}+\frac{d^4h}{dx^2dy^2}\right)sd+\left(\frac{d^4h}{dx^4}+\frac{d^4h}{dx^2dy^2}\right)sd-\frac{d^2h}{dt^2}ro$

式中 eula 函数的自变量，即 Lagrange 函数，已被确定与经典板理论相一致．结果(d4)与熟知的支配板振动的方程相吻合．

4 结 语

借助于符号运算进行计算，所考察的例子显然表明，除了明显的工作效益和较高的可靠性外，工程分析的一些熟知的方法可以应用于一些新的范围．的确，工具通常要影响思维方式．特别地，我们可以期望对直接变分法重新感到兴趣．

这些规程易于提供解析解结果，这使研究人员或大学生可以把注意力集中在思路上而不是在克服计算困难上．正是用符号运算规程编程序的这个过程促进对研究工作的定性方面的重视．还存在一个惯常的状况，即近来对于研究人员(大学生)来说，用键盘工作比用铅笔可能更为方便．此外，如前所述，规程的语义特点可供推广标准方法之用．而没有计算机的帮助，这将是不可能的．然而，这些规程不可能总以最简洁和优雅的形式提供一个解，也不能自动地保证该解的正确性．还有，它们在提供绝对精确度方面可能略感缓慢．高效率的编程与在数值规程情形中一样是关键性的．

我们想特别指出符号运算在工程教育方面的可能的广泛应用．人们可能争辩说，这些规程的使用将妨碍计算方法的自由运用．然而，工科院校的主要任务是提供技术知识而不是计算知识．就工科来说，对数学方法强调过分可能带来破坏性的后果．工科学生确实需要必要的数学和计算的基础知识．然而，这不应当以牺牲某些技术学科作为代价来达到．因此在大学的最后阶段或在研究生学习的过程中使用专家系统看来是合理的，这样可使学生在头几年

中能学到一些基本的数学方法．在借助于 MACSYMA 讲授有限元法课程方面，笔者的经验表明，学生最欢迎得到符号运算的能力．符号运算规程在今后的广泛运用可能引起工科学习计划的重大改变．

遗憾的是，某些规程尚未使用希腊字母，而它们可能要求使用两种符号系统．其中一个系统使用拉丁字母只作为符号运算用，而另一个系统是常见的系统，则用于其他方面．正如 DERIVE 的例子所表明的那样，这一不便之处可能在不久的将来随着软件和硬件的进一步发展而消失．

参考文献（共45条，略）

钟宏九译自：*Appl.Mech.Rev.*，**43**，6（1990）：119—127（**董务民**校）

动　态

神经网络专题讨论班

（1994年3月21日，北京）

［本刊讯］在中国高等科学技术中心资助与主持下，“神经网络专题讨论班”在京举行．来自中国科学院和高等院校的10多个单位、近30位有关专家包括许多年轻学者参加了会议．会上有10多位专家就人工智能、生物神经网络、人工神经网络等方面的一些主要问题作了专题报告并进行了热烈讨论；10多位年轻人也就各自的工作进行了汇报交流．会上还讨论了目前我国神经网络研究的现状及今后的发展方向．大家一致认为，这种讨论班的形式很好，便于充分交流与加深对神经网络的理解．希望今后能继续组织与开展此类活动．