第24卷 第1期 力学进展 Vol. 24 No. 1
1994年2月25日 ADVANCES IN MECHANICS Feb. 25, 1994

结构分析中的退化壳有限元方法

关 玉 璞
南京航空航天大学动力工程系（邮政编码210016）
唐 立 民
大连理工大学工程力学研究所（邮政编码116023）

提要 本文评述了退化壳有限元的现状和发展．首先简要介绍了平板壳有限元和以壳体理论为基础的曲壳有限元，接着介绍了单变量（位移型）退化壳有限元的研究现状，最后介绍了多变量（杂交、混合、拟协调和杂交/混合型）壳有限元．

关键词 壳有限元；退化壳；多变量有限元；变分原理

1 引 言

壳体结构是一种具有多种优点的结构，如厚度小、自重轻、承载大、省材料、刚度大、外形美等等．因此，壳体结构被广泛用于建筑顶盖、锅炉、容器、船舶、飞机和高速飞行器等方面．

由于壳体结构的几何形状、载荷和边界条件的复杂性，能够直接应用各种壳体理论得到的解析解非常少，这使得各种数值解法在实际壳体结构的分析中大有用武之地．

有限元方法是一种求解工程和物理问题的非常有效的数值方法．自从50年代中期有限元方法诞生之后，它很快就被应用于壳体结构的分析中．

30年来，关于壳体有限元的论文已达数百篇，几乎涉及固体力学各方面的问题，如线性非线性位移应力分析、静力动力失稳分析、动力线性非线性分析、复合材料结构分析和随机分析等等．最近Wempner[1]对壳体理论和壳体有限元，Yang等人[2]对薄壳有限元及一些应用的进展情况，Gilewski 和 Radwanska[3]对中厚壳有限元模型进行了全面的评述．壳体有限元可以有两种分类方法．第一种分类方法将壳体有限元分为平板壳元和曲壳元两类．曲壳元又可分为以壳体理论为基础的曲壳元和以3维弹性力学一般理论为基础的退化壳元两种．第二种分类方法将壳体有限元分为单变量（位移型）壳元和多变量（杂交、混合、拟协调、杂交/混合）壳元两类．本文将主要论述退化壳有限元（包括单变量和多变量壳元）的现状和发展．在多变量壳元中主要论述杂交/混合与拟协调模式的壳元．

2 平板壳元与曲壳元

平板壳元是最简单的壳体有限元．这种壳元将膜元（具有拉伸特性）和板弯曲元（具有

弯曲特性）简单地叠加在一起，模拟壳体的拉伸和弯曲状态，以平面来逼近壳体的曲面。在Zienkiewicz[4]和Cook[5]等人的书中，都可见到平板壳元的列式方法。平板壳元的主要优点是：①列式简单；②容易输入描述几何形状的数据；③便于和其他类型单元结合；④易于模拟复杂的载荷和边界条件。它的主要缺点是：①在单元内排除了拉伸和弯曲的耦合，而这是壳体结构的基本特征之一；②当连接在一点的所有单元共面时，壳体结构的刚度矩阵将是奇异的，处理这种零刚度问题比较困难；③单元交界处的弯矩不连续，而这在连续的曲壳结构中是不出现的；④当处理对缺陷敏感的结构时，几何近似的不足将产生影响。

由于平板壳元是“以直代曲”，因而在描述曲面时出现不连续性。为了克服这一缺点，人们将注意力放在曲壳元研究方面。在下面的叙述中我们把基于经典薄壳理论的曲壳元称作曲壳元，把基于3维弹性一般理论的退化曲壳元称作退化壳元。

曲壳元是复杂的壳体有限元。对柱壳和旋转壳等壳体，采用适当的壳体理论，可以给出比较准确的几何描述。这种壳元是空间的2维单元。对任意形状、曲率的壳体采用简单的函数描述其几何形状是很困难的。因此，多数曲壳元是针对特殊形状壳体的有限元。曲壳元一般要求C^1连续的位移插值函数，而满足C^1连续的位移插值函数是很难构造的。

3 退化壳元

退化壳元是Ahmad等人[6]在1970年提出的一种新型的壳体有限元。退化壳元抛弃了2维壳体理论的某些假设，采用了3维连续体方程并且仅对壳体中面进行离散。显然，退化壳元与曲壳元比较起来更简单、更具有一般性。近十几年来，退化壳元概念引起了人们极大的兴趣，除了线弹性方面的应用外，这一概念也被推广于非线性方面的分析。

退化壳元具有几个明显的优点：①容易处理任意几何形状的壳体，不必涉及壳体理论的复杂假设；②易于推广分析非线性问题；③可用来模拟薄壳、中厚壳和复合材料层合壳；④可以使用 C^0 连续的位移插值函数；⑤便于模拟壳与固体或壳与壳之间的连接。

Ahmad等人[6,7]提出的退化壳元是在3维块体单元基础上列式的超参壳体有限元。退化壳元采用了3个基本假设：①壳体的中面法线变形后仍为直线，但不再是变形后壳体的中面法线；②中面法线上的线段在壳体变形后既不伸长也不缩短；③忽略法线方向的正应力。这样，退化壳单元每个结点具有3个平移自由度和2个转动自由度。在薄壳理论中用中面位移表示中面转动；在退化壳元中，中面转动是不依赖于位移1阶导数的独立变量；因此，现在只要求在单元交界处位移函数保证连续就可以了，不再要求位移函数1阶导数的连续性。假设①使退化壳单元能够承受剪切变形，因而能够用于厚壳结构的分析。退化壳元在列式过程中采用3组坐标系：①整体的直角坐标系；②局部的逐点流动坐标系；③等参（自然）坐标系。用整体的直角坐标系描述壳体的几何形状、计算位移和应变；在局部坐标系下定义弹性矩阵，计算中面转动和应力；在等参坐标系下进行位移和转角的插值，计算单元刚度矩阵。退化壳元适用于中厚和厚壳分析。当使用减缩积分或选择积分时，也适用于薄壳分析。

Irons[8]对退化壳有限元的发展作了历史性的评论。Bathe[9]，Crisfield[10]和Hughes[11]等人对退化壳有限元方法以及有关的一类方法作了全面的评论。退化壳元的基本假设和考虑剪切的经典壳理论的基本假设是相同的，但前者是数值的，而后者是解析的。经典壳理论中考虑内力和力矩而不考虑应力。显然，经典壳理论在数学上更复杂一些。

Ahmad 等人[6]提出的退化壳元是8结点和16结点四边形壳元。在此之后，各种退化壳

元及采用各种技术修正的退化壳元相继出现。Takemoto 和 Cook[12]对 8 结点退化壳元作了修正，加入一个内部结点，并采用不同的整体与局部坐标之间的变换。MacNeal[13]提出一个 4 结点四边形退化壳元，应变分别近似，使用减缩积分技术，强加曲率的协调性。Kanok-Nukulchasi[14]构造了一个对横向剪应变使用减缩积分的 4 结点四边形退化壳元，并将其推广进行大变形分析[15]。Hughes 和 Liu[16]构造了可用于非线性分析的减缩积分 4 结点退化壳元、选择积分heterosis 4 结点和 9 结点退化壳元。Surana[17]采用总体的 Lagrange 描述，容许大转动，建立了用于几何非线性分析的 8 结点和12结点退化壳元，分别使用 $2\times2\times2$ 和 $3\times3\times2$ 点积分方案进行积分。Oliver 和 Onate[18]构造了一种 8 结点壳元，在局部坐标系下，有关的有限元矩阵都用显式表达，进行壳体大位移大转动分析。Belytschko 等人[19]构造了一个显式 4 结点壳元，使用 1 点求积方案，进行了壳体非线性动力分析。最近，Simo和Fox[20]提出了一种应力合力壳单元，他们列式的方法是基于 Cosserat 几何结构的经典壳理论和退化壳概念的结合。这种方法已经先后用于线性[21]、非线性[22]和带有厚度方向拉伸的变厚度壳[23]的分析。退化壳有限元也被推广进行壳体结构非线性（几何非线性和材料非线性）[15-18,24-39]、振动[19,40]、稳定[41-44]和复合材料叠层板壳[45-54]问题的分析。

SemiLoof壳元是Irons[8]于1976年提出的一种与众不同的退化壳元。这种单元是特殊的精细的等参壳元。SemiLoof 壳元最重要的特性是引进了Kirchhoff-Love约束，即在单元的点、边界或面上强加 Kirchhoff-Love 约束。这种约束降低了单元的自由度数。选择适当的数值积分方案，SemiLoof 退化壳元可适用于薄壳分析。

SemiLoof 壳元已被应用于各种问题的分析[55-59]，包括线性、非线性、稳定和振动等问题。Nagteaal 和 Slater[60]提出了一种 8 结点 SemiLoof 壳单元，采用了低阶的插值函数。Hellen[59]对 SemiLoof 单元中的数值积分作了进一步的改进。1988 年 Martins 和 Oliveira[61,62]又提出了新型的SemiLoof 壳单元并给出了计算机程序。

旋转壳元在退化壳有限元发展过程中也受到人们的注意。旋转壳实际上是空间特殊的 2 维问题。旋转退化壳元每个结点有 3 个自由度，2 个位移自由度和 1 个转动自由度。Hughes 和 Liu[25]提出了用于轴对称壳体分析的非线性有限元列式，并构造 2 结点、3 结点和 4 结点轴对称退化壳单元。Han 和 Gould[63,64]提出了用于旋转壳分析的退化壳单元，他们用极坐标描述单元的几何形状，而用直角坐标进行单元位移的插值。Vykutil[65]将两点轴对称壳元用于反对称弯曲分析。Yuan 和 Liang[66]用更新的 Lagrange 描述和轴对称 3 结点退化壳元，对旋转壳进行了几何非线性和弹塑性分析。

伴随着 Ahmad 退化壳元出现的一个问题是闭锁现象。这种现象分为剪切闭锁和膜闭锁两种。用退化壳元进行板壳结构分析时，随着板壳变薄，过高的剪切应变被加于弯曲变形上，从而使退化壳元的特性变坏（单元过刚），这种现象称为剪切闭锁。Hughes和Liu[16]，Kanok-Nukulchasi 等人[15]解释了这种现象，膜闭锁是由于单元描述无拉伸弯曲的能力不足而产生的一种现象，Stolarski 和 Belytschko[67]，Parisch[68]曾研究了这一现象。

用减缩积分或选择积分技术进行单元矩阵的求积是克服剪切和膜闭锁现象的一种比较有效的方法[69-73]。然而，减缩积分或选择积分技术的使用又可能导致另一种现象——单元矩阵缺秩或多余零能模式出现，多余零能模式又称作虚假的模式或沙漏模式。为了控制多余零能模式的出现，Jacquotte 和 Oden[74]，Liu 等人[75]提出了稳定矩阵方法；Briassoulis[76]

研究了一种简单的人工的刚化单元方案，提出用稳定单元的方法来稳定系统；Vu-Quoc 和 Mora[77,78]使用一种摄动方法进行矩阵修正．这些方法的共同特征是利用零能模式与单元刚度矩阵的零特征值相对应的关系，在单元刚度矩阵中与零特征值相对应的项上加一个极小的非零正常数，消除多余的零能模式．减缩积分或选择积分技术的使用也可能导致曲壳单元的基本特征之一——膜和弯曲的耦合变坏．

其他的技术也被用来克服剪切和膜闭锁现象．Irons[8]将Kirchhoff约束强加在离散的积分点上．Dvorkin和Bathe[29]，Park和Stanley[79]用假设应变的概念（在曲线自然坐标下）分别构造了 8 结点和 9 结点四边形退化壳单元．Huang和Hinton[80]，Jang和Pinsky[81,82]同样使用假设应变概念（用张量表达）分别构造了 9 结点四边形退化壳单元．Huang[83]用假设应变概念，在自然坐标下假设横向剪切应变、在正交曲线坐标下假设膜应变．构造了用于非线性分析的退化壳单元．Li 等人[84]提出了广义位移法，构造了 4 结点四边形退化壳单元．Briassoulis[85]用剪切闭锁因子消除退化壳元的闭锁现象和多余零能模式．Stolarski 和 Belytschko[67]指出，为了克服膜闭锁现象，单元中面位移场的阶数必须达到足够高的程度．Yang等人[86]分析了一个标准的半球壳问题，证明了这一点．

4　多变量壳元

位移模式的有限元在板壳分析中遇到了困难，如剪切闭锁和膜闭锁、多余零能模式等．薄板壳的分析是C^1类问题，位移元正是在解决C^1类问题上遇到了障碍．正如前面所述，一些研究者用一些特殊的技巧对位移元进行修正，以便克服这些困难．另一些研究人员则转向多变量有限元方法（杂交元、混合元、拟协调元或杂交/混合元）．

多变量有限元方法大多是以修正的余能原理、Hellinger-Reissner 变分原理或 Hu-Washizu 变分原理为基础进行单元列式，或可与广义变分原理相对应．在单元内（或单元边界）除了假设位移外，一般还要假设应力或/和应变．杂交元和拟协调元同位移元一样，以广义结点位移为求解变量．混合元常常以广义位移和广义力为求解变量．

Atluri 和Pian[87]提出了以考虑剪切变形的 2 维壳体理论为基础的各种混合、杂交和应力模型．Deak 和Atluri[88]将[87]中的线性杂交应力模型推广为非线性叠层壳模型．

Noor 和 Andersen[89]讨论了一些结合Hellinger-Reissner泛函和 2 维浅壳理论列式的壳单元，并将这些单元和其他模型作了比较．其中讨论了单元的刚体运动、零能模式、混合模式与使用减缩积分或选择积分的位移模式的等价性．

Lee和Pian[90]提出了基于Hellinger-Reissner变分原理的混合列式，在单元内假设位移和应变，构造了一个 8 结点四边形退化壳元．这种方法与采用减缩积分技术的位移模式相等价．Lee等[91-97]以修正的 Hellinger-Reissner 变分原理为基础，结合退化壳有限元概念，进行了一系列的研究工作．他们构造了三角形45自由度 7 点数值积分的壳元、9 结点四边形壳元、16结点四边形壳元等，并推广进行几何非线性和复合材料层合壳体分析．张国安和洪志泉[98]构造了一个与[94]类似的 9 结点四边形退化壳元，但在单元内假设位移和应力，将应力分为低阶和高阶两部分．Saleeb 和 Chang 等[99-102]也以修正的 Hellinger-Reissner 变分原理为基础，进行了一些退化壳有限元的研究工作．他们在[99]中构造了一个 5 结点（4 个角点和 1 个中点）四边形壳元，在[100]中构造了一个 9 结点四边形壳元，都是在单元内假设位移和应变；在[101]中将 5 结点四边形壳元推广进行复合材料叠层板壳的应力、振动

和稳定分析；在[102]中将5结点四边形壳元推广进行大转动几何非线性分析。Moy和Lam[103]从板壳Hellinger-Reissner泛函出发，提出了一种新的壳元列式方法；他们沿相交单元使用协调的位移插值函数，在单元内假设横向剪切应变，克服了剪切闭锁现象。

Pian和Sumihara[104]以修正的Hu-Washizu变分原理为基础，构造了新的杂交24自由度三角形和32自由度四边形SemiLoof壳单元。刘红[105,106]用拟协调有限元方法构造了同样的两种SemiLoof壳单元，并进行了应力、振动和稳定分析。

Chieslay和Ghali[107]采用Hu-Washizu泛函，将应变和位移作为独立变量，建立了4结点四边形退化壳单元。Cheung和Chen[108]依据一个修正的Hu-Washizu变分原理[109]，以位移、应变和应力为独立变量，构造了两个4结点四边形退化壳单元。这两个单元既消除了剪切/膜闭锁又没有多余零能模式。Guan和Tang[110]用多变量拟协调有限元列式方法，结合退化壳有限元概念，构造了9结点四边形退化壳单元，单元消除了闭锁现象且在总体上无多余零能模式。在[111]中这个退化壳单元又被推广进行叠层复合材料和几何非线性大变形壳体结构分析。

5 结论

自从Ahmad提出退化壳有限元概念以来，位移模式退化壳元已经发展比较完善。这是因为位移模式列式简单，人们在这方面已经积累了大量的经验，许多通用程序都使用位移模式的单元。但位移模式退化壳元出现的问题较多，因此人们还在寻找更加满意的解决办法。

多变量有限元模式出现晚于位移模式，且列式比位移模式复杂，因而研究得还很不充分。位移模式产生的一些问题，如剪切闭锁和膜闭锁、零能模式等，在多变量有限元模式中通常不会出现。构造简单的、高效率的、准确的多变量退化壳单元，并用于线性与非线性、静力与动力、复合材料结构及其他方面问题的分析，仍具有诱人的广阔前景。

参考文献

1 Wempner G. *Appl. Mech. Rev.*, **42** (1989): 129—142
2 Yang H T Y, Saigal S, Liaw D G. *Compt. Struct.*, **35** (1990): 481—504
3 Gilewski W, Radwanska M. *Finite Elements Anal. Des.*, **9** (1991): 1—21
4 Zienkiewicz O C. The Finite Element Method(3rd edn). McGraw-Hill, Maidenhead, U.K. (1979): 329—355
5 Cook R D. Concepts and Applications of Finite Element Analysis (2nd edn). John Wiley, New York (1981): 272—275
6 Ahmad S, Irons B M, Zienkiewicz O C. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **2** (1970): 419—451
7 ——. ——. ——. *ibid*, **2** (1970): 509—522
8 Irons B M. in Finite Elements for Thin Shell and Curved Members (ed Gallagher R H, Ashwell D G). John Wiley, New York (1976): 197—222
9 Bathe K-J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1982)
10 Crisfield M. Finite Elements on Solution Procedures for Structural Analysis. Vol. 1—Linear Analysis. Pineridge Press, Swansea, U. K. (1986)
11 Hughes T J R. The Finite Element Method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1987)
12 Takemoto H, Cook R D. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **7** (1973): 401—405
13 MacNeal R H. *Comput. Struct.*, **8** (1978): 175—183
14 Kanok-Nukulchasi W. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **14** (1979): 179—200
15 ——, Taylor R L, Hughes T J R. *Comput. Struct.*, **13** (1981): 19—27
16 Hughes T J R, Liu W K. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **26** (1981): 331—362
17 Surana K S. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19** (1983): 581—615

18 Oliver J, Onate E. *ibid*, **20** (1984) : 2253—2281
19 Belytschko T, Lin J I, Tsay C-S. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **42** (1984) : 225—251
20 Simo J C, Fox D D. *ibid*, **72** (1989) : 267—304
21 ——, ——, Rifai M S. *ibid*, **73** (1989) : 53—92
22 ——, ——, ——. *ibid*, **79** (1990) : 21—70
23 ——, Rifai M S, Fox D D. *ibid*, **81** (1990) : 91—126
24 Parish H. *ibid*, **14** (1978) : 159—178
25 Hughes T J R, Liu W K. *ibid*, **27** (1981) : 167—181
26 Parish H. *ibid*, **27** (1981) : 183—214
27 Ramm E, Settele J M. in Nonlinear Analysis of Plates and Shells (ASME Winter Annual Meeting, Washington, DC, (1981) (ed Hughes T J R, et al.) . ASME, AMD, **48** (1982)
28 Owen D R J, Figueiras J A. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19** (1983) : 541—566
29 Dvorkin E N, Bathe K-J. *Eng. Comput.*, **1** (1984) : 77—88
30 Milford R V, Schnobrich W. *Comput. Struct.*, **20** (1985) : 225—234
31 Parish H. *Eng. Comput.*, **3** (1986) : 121—128
32 Surana K S. *Comput. Struct.*, **24** (1986) : 47—55
33 Bathe K-J, Dvorkin E N. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **22** (1986) : 697—722
34 Pinsky P M, Jang J. *J. Eng. Mech.*, **114** (1988) : 1045—1062
35 Hsiao K-M, Chen Y-R. *Comput. Struct*, **31** (1989) : 427—438
36 White D W, Abel J F. *ibid*, **35** (1990) : 621—641
37 张义同，杨海元，张敬宇. 力学学报，**22** (1990) : 200—205
38 张其林，沈祖炎. 上海力学，**11**，3 (1990) : 1—15
39 卢文达，李龙元. 应用力学学报，**7**，1 (1990) : 30—36
40 Wouters C R. *Comput. Struct.*, **15** (1982) : 667—672
41 Stolarski H, Belytschko T, Carpenter N, Kennedy J M. *Eng. Comput.*, **1** (1984) : 210—218
42 Liu W K, Law E S, Lam D, Belytschko T. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **55** (1986) : 259—300
43 Rajasekaran S, Weimar K. *J. Struct. Eng.*, **115** (1989) : 1514—1524
44 蔡一平，李力，薛克兴. 航空学报，**8**，11 (1987) : *A*613—*A*618
45 Chang T Y, Sawamiphakdi K. *Comput. Struct.*, **13** (1981) : 331—340
46 Panda S, Natarajan R. *ibid*, **14** (1981) : 225—230
47 Chao W C, Reddy J N. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20** (1984) : 1991—2007
48 Rothert H, Dehmel W. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **64** (1987) : 429—446
49 Kumar R R, Rao Y V K S. *Comput. Struct.*, **28** (1988) : 717—722
50 Liao C L, Reddy J N, Engelstand S P. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **26** (1988) : 1843—1854
51 ——, ——. *AIAA J.*, **27** (1989) : 95—101
52 Fuehne J P, Engblom J J. *Composite Struct.*, **12** (1989) : 81—95
53 Surana K S, Sorem R M. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **29** (1990) : 1393—1420
54 刘修禾. 长沙铁道学院学报. **6**，3 (1988) : 27—39
55 Martins R A F, Owen D R J. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **11** (1977) : 481—498
56 ——, ——. *Comput. Struct.*, **13** (1981) : 505—513
57 Javaherian H, Dowling P J, Lyons L P P. *ibid*, **12** (1980) : 147—159
58 Owen D R J, Figueiras J A. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19** (1983) : 521—539
59 Hellen T K. *ibid*, **22** (1986) : 133—151
60 Nagteaal J C, Slater J G. in Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells (ASME Winter Annual Meeting, Washington, DC, 1981)(ed Hughes T J R, et al.). ASME, AMD, **48** (1982)
61 Martins R A F, Oliveira C A M. *Eng. Comput.*, **5** (1988) : 15—25
62 ——, ——. *ibid*, **5** (1988) : 26—38
63 Han K J, Gould P L. *Eng. Struct.*, **4** (1982) : 129—131
64 ——, ——. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **18** (1982) : 879—895
65 Vykutil J. *ibid*, **20** (1984) : 169—173
66 Yuan K Y, Liang C C. *Comput. Struct.*, **32** (1989) : 1225—1239
67 Stolarski H, Belytschko T. *J. Appl. Mech.*, **49** (1982) : 172—176
68 Parisch H. *Compvt. Methods Appl. Mech. Eng.*, **20** (1979) : 323—350
69 Zienkiewicz O C, Taylor R L, Too J M. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **3** (1971) : 275—290
70 Pawsey S F, Clough R W. *ibid*, **3** (1971) : 575—586

71 Takemoto H, Cook R D. *ibid*, **7** (1973) : 401—405
72 Talha M A. *ibid*, **14** (1979) : 125—142
73 Stolarski H, Belytschko T. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **41** (1983) : 279—296
74 Jacquotte O P, Oden J T. in Innovative Methods Nonlinear Anal. (ed Liu W K, Belytschko T, Park K C). Pineridge Press. Swansea U. K. (1984)
75 Liu W K, Belytschko T, Ong J S J. in Innovative Methods Nonlinear Anal. (ed Liu W K, Belyschko T, Park K C). Pineridge Press. Swansea U. K. (1984)
76 Briassoulis D. *Comput. Struct.*, **30** (1988) : 1389—1402
77 Vu-Quoc L, Mora J A. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **74** (1989) : 117—175
78 ——. *ibid*, **79** (1989) : 129—172
79 Park K C, Stanley G M. *J. Appl. Mech.*, **53** (1986) : 278—290
80 Huang H C, Hinton E. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **22** (1986) : 73—92
81 Jang J, Pinsky P M. *ibid*, **24** (1987) : 2389—2411
82 ——, ——. *ibid*, **26** (1988) : 329—347
83 Huang H C. *Comput. Struct.*, **25** (1987) : 147—155
84 Li Xi-kui, Liu Guo-qiang, Zienkiewicz O C. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **21** (1985) : 2145—2155
85 Briassoulis D. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **72** (1989) : 243—266
86 Yang T Y, Kapania R K, Saigal S. *AIAA J.*, **27** (1989) : 211—218
87 Atluri S, Pian T H H. *J. Struct. Mech.*, **1** (1972) : 1—41
88 Deak A L, Atluri S. in Computational Methods in Nonlinear Mechanics. Univ. of Texas at Austin (1974) : 79—88
89 Noor A K, Andersen C M. in Nonlinear Analysis of Plates and Shells (ASME Winter Annual Meeting, Washington, DC, 1981) (ed: Hughes T J R, et al.) . ASME, AMD, **48** (1982)
90 Lee S W, Pian T H H. *AIAA J.*, **16** (1978) : 29—34
91 ——. Wong S C, Rhiu J J. *Comput. Struct.*, **21** (1985) : 1325—1334
92 ——, Dai C C, Yeom C H. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **21** (1985) : 1813—1831
93 Hass D J, Lee S W. *Comput. Struct.*, **26** (1987) : 445—452
94 Rhiu J J, Lee S W. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24** (1987) : 581—604
95 ——, ——. *ibid*, **26** (1988) : 1945—1962
96 Yeom C H, Lee S W. *ibid*, **28** (1989) : 1749—1768
97 Rhiu J J, Russel R M, Lee S. *AIAA J.*, **28** (1990) : 1517—1524
98 张国安，洪志泉．国防科技大学学报，**11**，3 (1989) : 48—60
99 Saleeb A F, Chang T Y, Graf W. *Comput. Struct.*, **26** (1987) : 787—803
100 Chang T Y, Saleeb A F, Graf W. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **73** (1989) : 259—281
101 Wilt T E, Saleeb A F, Chang T Y. *Comput. Struct.*, **37** (1990) : 597—611
102 Saleeb A F, Chang T Y, Graf W, Yingyeunyong S. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **29** (1990): 407—446
103 Moy S S J, Lam S S E. *Commun. Appl. Numer. Methods.*, **6** (1990) : 457—470
104 Pian T H H, Sumihara K. *Comput. Struct.*, **19** (1984) : 165—173
105 刘红．大连工学院硕士学位论文 (1984)
106 ——．大连理工大学博士学位论文 (1988)
107 Chieslay J D, Ghali A. *Comput. Struct.*, **24** (1986) : 749—765
108 Cheung Y K, Chen W. *ibid*, **36** (1990) : 279—290
109 Chen W, Cheung Y K. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24** (1987) : 1697—1709
110 Guan Yupu, Tang Limin. *Finite Elements Des. Anal.*, **11** (1992) : 165—176
111 关玉璞．大连理工大学博士学位论文 (1991)

THE DEGENERATED SHELL FINITE ELEMENTS IN STRUCTURAL ANALYSIS

Guan Yu-pu
Department of Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics
Tang Li-min
Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology

Abstract The current status and the development of the degenerated shell finite elements are reviewed in the present article. First, flat plate shell finite elements and curved shell finite elements based upon the shell theory are briefly introduced. Then single-variable (displacement type) degenerated shell finite elements are reviewed. Finally, multi-variable (hybrid, mixed, quasi-conforming and hybrid/mixed types) shell finite elements are discussed.

Keywords *shell finite element; degenerated shell; multi-variable finite elements; variational principle*