

# 柔性复合材料及其应用

姚立宁

武汉水利电力大学水力发电工程系 (邮政编码430072)

**提要** 本文综述了目前柔性复合材料的研究。柔性复合材料具有大变形和非线性弹性的特点,基本分析建立在经典的层合理论和非线性弹性力学的基础上。这种材料的应用实例有帘子线/橡胶复合材料,涂层纤维织物,以及含波纹纤维的复合材料等。

**关键词** 曲线纤维; 韧性基体; 柔性复合材料; 层合理论; 非线性弹性

## 1 引言

柔性复合材料是由纤维增强材料和韧性聚合物基体组成。与热固性或热塑性聚合物基体复合材料相比,它有较强的变形范围,有较高的承载能力和良好的疲劳性能。这种材料还有一个明显的特点就是在低应力作用下材料呈低刚度性能,而在高应力作用下却有相当高的强度和刚度。

柔性复合材料的应用十分广泛,从汽车和飞机轮胎,传送带,轻便房屋结构,帐篷,降落伞,飞机的减速器,防弹衣,软管,隔板,到网球拍等,都可用柔性复合材料来制造。柔性复合材料最普通的应用例子是轮胎。轮胎由低弹性模量高延伸率的橡胶材料,和高弹性模量低延伸率的帘子线材料复合而成,这种复合材料明显地表现出高韧性和高强度的特点,特别适应大变形的受力环境。1939年 Martin<sup>[1]</sup>首次用薄壳理论分析了偏轴帘子线铺层的飞机轮胎,但是由于他的分析是建立在假设纤维不可伸长和基体刚度可忽略的基础上,所以存在着不少缺陷。到60年代,这种研究在世界范围内发展,如美国的 Clark<sup>[2]</sup>,英国的 Gough<sup>[3]</sup>,日本的 Akasaka<sup>[4]</sup>,前苏联的 Biderman<sup>[5]</sup>等。这些研究分析基本上都是建立在刚性的层合复合材料各向异性理论的基础上,都以小变形和线弹性行为为研究前提,而忽略不计柔性复合材料的粘弹性、疲劳和大变形非线性行为的影响。这与材料的实际情况存在着较大差距,因而所得成果有较大的局限性。

由于复合材料主要是由基体和增强纤维构成,因此柔性复合材料的高韧性和高强度特点也是通过基体和纤维的配合来实现的。柔性材料需要基体材料具有相当大的弹性来承受材料受力时产生的较大变形,同时需要增强纤维能配合基体的相应变形,使其在高应力作用下达到高强度高刚度的效果。实现这些要求的办法有:使用短纤维,当载荷增加时,允许单向纤

纤维的受力方向旋转，使用编织、针织或其他波纹型纤维增强材料。邹祖炜、罗申逸、Ishikawa 和 Takahashi<sup>[9-11]</sup> 等建立了这种材料的线性和非线性弹性行为的理论分析。

## 2 曲线纤维的几何分析

柔性复合材料的增强纤维常常采用曲线形式排列，以便在低应力时适应基体较大的变形。对于长纤维而言，可以考虑在韧性基体材料中含有具有正弦波型的纤维型式（图 1）

$$y = a \sin(2\pi x/\lambda) \quad (1)$$

其中  $\lambda$  为波长， $a$  为幅值。若  $\theta$  表示纤维曲线的切线夹角，那么

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{2\pi a}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (2)$$

这样纤维的微分长度可以表示为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + c \cos^2(2\pi x/\lambda)} \quad (3)$$

其中  $c = (2\pi a/\lambda)^2$ 。从式 (2) 可知

$$|\theta_{\max}| = \operatorname{tg}^{-1}(2\pi a/\lambda) \quad (4)$$

显然利用式 (3)，可得纤维长度

$$s = \int_0^{\lambda} ds = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + c \cos^2 \alpha} d\alpha \quad (5)$$

利用第 2 类椭圆积分，式 (5) 可以表示为

$$s = \lambda \sqrt{1+c} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 - \dots \right) \quad (6)$$

其中  $k^2 = c/(1+c)$ 。若利用 Taylor 展开式，那么纤维长度与波长的比可以表示为

$$\frac{s}{\lambda} = 1 + 2\left(\frac{k^2}{8}\right) + 13\left(\frac{k^2}{8}\right)^2 + 90\left(\frac{k^2}{8}\right)^3 + 644\left(\frac{k^2}{8}\right)^4 + 4708.5\left(\frac{k^2}{8}\right)^5 + \dots \quad (7)$$

长纤维曲线形式的组合通常可分为等相位组合和随机相位组合两类。纤维的这两种组合模型示于图 2。纤维的局部坐标与材料坐标的转换为

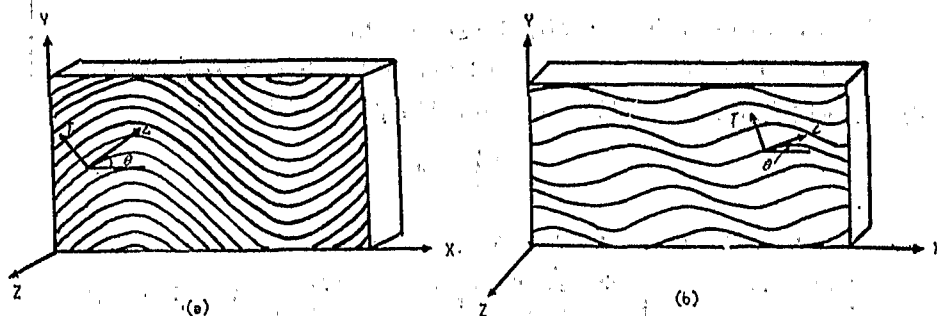


图 2 两种纤维组合模型：(a) 等相位纤维组合模型；(b) 随机相位纤维组合模型<sup>[11]</sup>

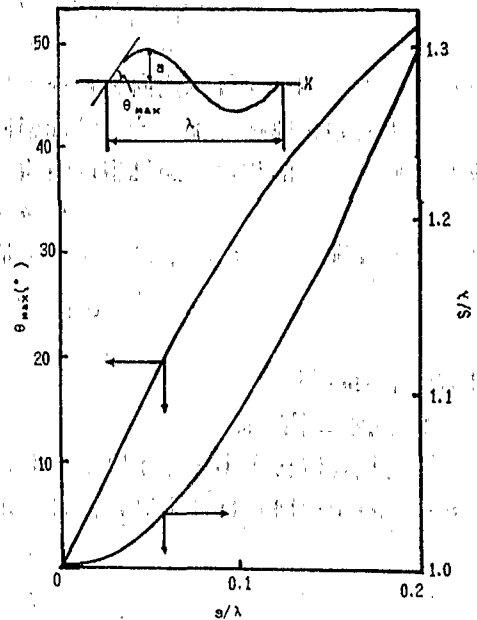


图 1 波纹纤维的几何参数  $\theta_{\max}$ ,  $a/\lambda$  与  $s/\lambda$  的关系<sup>[11]</sup>

$$\begin{pmatrix} L \\ T \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$$

这里  $T$ ,  $L$  分别表示纤维法向和切向矢量。

对于等相位曲线纤维, 若  $x$  坐标相同, 则曲线纤维的  $\theta$  也相同, 而对于随机相位曲线纤维的  $\theta$  值无一定的规律。随机相位的曲线纤维有如下形式:

$$y = a \sin[2\pi(x-d)/\lambda] \quad (9)$$

其中  $d$  为纤维在  $x$  方向的平移系数。于是纤维的方向角可以定义为如下范围:

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \leq \tan \theta \leq \frac{2\pi a}{\lambda} \cos \frac{2\pi(x+dx)}{\lambda} \quad (10)$$

且有概率为  $dx/\lambda$ 。

### 3 线性本构关系

柔性复合材料在小应力作用下变形较小, 属于线弹性范围。因此可以应用层合理论来进行分析。对于单向长直纤维复合材料, 在线弹性范围内有应力应变关系

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中  $S_{11} = 1/E_1$ ,  $S_{22} = 1/E_2$ ,  $S_{12} = -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2$ ,  $S_{66} = 1/G_{12}$ 。这里  $S_{ij}$  表示材料的弹性柔量;  $E_1$  和  $E_2$  表示材料纵向和横向弹性模量;  $\nu_{12}$  和  $\nu_{21}$  表示材料的泊松比;  $G_{12}$  表示材料沿纤维方向的剪切弹性模量。

若考虑图 2 中的含波纹纤维的复合材料, 利用式 (8) 建立的两种坐标之间的关系, 就有

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (12)$$

这里  $\bar{S}_{ij}$  是波纹纤维曲线的切线夹角为  $\theta$  的复合材料的弹性柔量。若在式 (12) 中,  $\sigma_x \neq 0$ ,  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , 那么

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= [\cos^4\theta S_{11} + \sin^4\theta S_{22} + \sin^2\theta \cos^2\theta (2S_{12} + S_{66})] \sigma_x \\ \varepsilon_y &= [S_{12} + \sin^2\theta \cos^2\theta (S_{11} - 2S_{12} + S_{22} - S_{66})] \sigma_x \\ \gamma_{xy} &= [\sin\theta \cos^3\theta (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) + \sin^3\theta \cos\theta (2S_{12} - 2S_{22} + S_{66})] \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

若考虑等相位曲线纤维, 那么材料的应变可以用平均应变来表示:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \varepsilon_x dx \quad (14)$$

利用式 (2) 和式 (13) 可以将式 (14) 表示为

$$\varepsilon_x^0 = \left\{ \frac{1+(e/2)}{\sqrt{(1+e)^3}} S_{11} - \left[ \frac{1+(3/2)e}{\sqrt{(1+e)^3}} - 1 \right] S_{22} + \frac{e/2}{\sqrt{(1+e)^3}} (2S_{12} + S_{66}) \right\} \sigma_x \quad (15)$$

显然, 对于等相位曲线纤维沿  $x$  方向的有效弹性模量为

$$E_x^0 = \frac{\sqrt{(1+c)^3}}{[1+(c/2)]S_{11} - [1+(3/2)c - \sqrt{(1+c)^3}]S_{22} + (c/2)(2S_{12} + S_{00})} \quad (16)$$

考虑从  $x$  到  $(x+dx)$  长度内的变形, 纤维在材料轴向的拉伸应变为

$$\varepsilon_l = \cos^2\theta\varepsilon_x + \sin^2\theta\varepsilon_y + \sin\theta\cos\theta\gamma_{xy} \quad (17)$$

利用式 (13) 和式 (17), 可以得到纤维长度  $s$  内的平均应变

$$\varepsilon_l^0 = \frac{1}{s} \int_0^s \varepsilon_l ds = [(S_{11} - S_{12})F(k) + S_{12}]\sigma_x \quad (18)$$

其中 
$$F(k) = 1 - \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{16}k^4 - \frac{3}{32}k^6 - \frac{111}{2048}k^8 - \frac{141}{4096}k^{10}$$

若柔性复合材料处于小变形范围, 则从层合理论就可写出由曲线纤维组成的柔性层合材料的本构关系

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{10} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{20} \\ \bar{C}_{10} & \bar{C}_{20} & \bar{C}_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (19)$$

其中平均刚度为

$$\bar{C}_{ij} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} Q_{ij}(\theta) dx \quad (20)$$

这里  $Q_{ij}(\theta)$  是纤维偏轴转换刚度系数。从积分式 (20) 就可得到各平均刚度系数

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{11} &= \frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}} \left\{ Q_{11} \left( 1 + \frac{c}{2} \right) + (Q_{12} + 2Q_{00})c + Q_{22} \left[ \sqrt{(1+c)^3} - \left( 1 + \frac{3}{2}c \right) \right] \right\} \\ \bar{C}_{22} &= \frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}} \left\{ Q_{11} \left[ \sqrt{(1+c)^3} - \left( 1 + \frac{3}{2}c \right) \right] + (Q_{12} + 2Q_{00})c + Q_{22} \left( 1 + \frac{c}{2} \right) \right\} \\ \bar{C}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}} \left\{ (Q_{11} - Q_{22}) \frac{c}{2} + Q_{12} \left[ \sqrt{(1+c)^3} - c \right] \right\} \\ \bar{C}_{00} &= \frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}} \left\{ (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{00}) \frac{c}{2} + Q_{00} \left[ \sqrt{(1+c)^3} - c \right] \right\} \\ \bar{C}_{10} &= \bar{C}_{20} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中  $Q_{ij}$  表示材料刚度系数。同理, 对于含有曲线纤维的层合材料, 其平均刚度可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{11} &= \frac{\bar{C}_{22}\bar{C}_{00} - (\bar{C}_{20})^2}{D}, \quad \bar{S}_{22} = \frac{\bar{C}_{11}\bar{C}_{00} - (\bar{C}_{10})^2}{D}, \quad \bar{S}_{12} = \frac{\bar{C}_{10}\bar{C}_{20} - \bar{C}_{12}\bar{C}_{00}}{D} \\ \bar{S}_{00} &= \frac{\bar{C}_{11}\bar{C}_{22} - (\bar{C}_{12})^2}{D}, \quad D = \bar{C}_{11}\bar{C}_{22}\bar{C}_{00} - (\bar{C}_{12})^2\bar{C}_{00} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

类似于上述处理, 可将含随机相位曲线纤维的层合材料  $x$  方向的弹性模量和泊松比表示为

$$\left. \begin{aligned} E_x^r &= 1/\bar{S}_{11} \\ \nu_{xy}^r &= -\bar{S}_{12}/\bar{S}_{11} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

若含有随机相位曲线纤维的层合材料受到单向拉伸, 即仅有  $\sigma_x \neq 0$ , 则其应变分量为

$$\varepsilon_x = \sigma_x/E_x^r, \quad \varepsilon_y = -(\nu_{xy}^r/E_x^r)\sigma_x, \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (24)$$

同理, 随机相位曲线纤维复合材料沿纤维的平均拉伸应变为

$$\varepsilon_l^0 = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)F(k) + \varepsilon_y \quad (25)$$

其中  $F(k)$  与式 (18) 中的意义相同。

#### 4 非线性弹性行为分析

柔性复合材料中的增强纤维往往具有几何非线性的性质, 同时基体材料也往往具有材料非线性的行为。特别是当高应力作用时, 柔性复合材料会出现较大变形, 因此它的弹性行为也出现非线性的性质。有限变形理论和增量分析的办法是解决柔性复合材料非线性问题的有效工具。在有限变形理论中, 通常采用 Lagrange 或者 Green 应变张量以及 Euler 或者 Almansi 应变张量来处理问题。在直角坐标下 Euler 应变可以表示为

$$e_{ij} = (1/2)(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{m,i}u_{m,j}) \quad (26)$$

其中  $u_i$  表示在  $x_i$  方向的位移。根据式 (26), 2 维情况下的 Euler 应变可以写成

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

在 Euler 标架下, 罗申逸和邹祖焯<sup>[9]</sup>构造了平面应力情况下的余能函数

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} S_{11} \sigma_1^2 + \frac{1}{3} S_{111} \sigma_1^3 + \frac{1}{4} S_{1111} \sigma_1^4 + S_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{2} S_{22} \sigma_2^2 + \frac{1}{3} S_{222} \sigma_2^3 \\ &+ \frac{1}{4} S_{2222} \sigma_2^4 + \frac{1}{2} S_{66} \sigma_6^2 + \frac{1}{4} S_{6666} \sigma_6^4 + S_{166} \sigma_1 \sigma_6^2 + S_{2266} \sigma_2^2 \sigma_6^2 \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $\sigma_1 = \sigma_{11}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{22}$ ,  $\sigma_6 = \sigma_{12}$ ,  $S_{ij}$ ,  $S_{ijk}$  和  $S_{ijkl}$  表示层合板的柔量。用余能函数可以表示应变为

$$e_i = \partial W / \partial \sigma_i \quad (29)$$

因此, 可以得到 Euler 体系的应变

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= S_{11} \sigma_1 + S_{111} \sigma_1^2 + S_{1111} \sigma_1^3 + S_{12} \sigma_2 + S_{166} \sigma_6^2 \\ e_2 &= S_{22} \sigma_2 + S_{222} \sigma_2^2 + S_{2222} \sigma_2^3 + S_{12} \sigma_1 + 2S_{2266} \sigma_2 \sigma_6^2 \\ e_6 &= S_{66} \sigma_6 + S_{6666} \sigma_6^3 + 2S_{166} \sigma_1 \sigma_6 + 2S_{2266} \sigma_2^2 \sigma_6 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

其中  $e_1 = e_{11}$ ,  $e_2 = e_{22}$ ,  $e_6 = 2e_{12}$ 。这里  $S_{11}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{12}$  和  $S_{66}$  是线性变形下的层板柔量,  $S_{111}$  和  $S_{222}$  表示双轴的弹性模量的行为,  $S_{1111}$ ,  $S_{2222}$  和  $S_{6666}$  表示非线性变形的影响, 而  $S_{166}$  和  $S_{2266}$  则表示轴向变形和剪切变形的相互作用。这些量均可通过试验来确定。若有  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_6 = 0$ , 则式 (30) 的第 1 式就有

$$e_1 = S_{11} \sigma_1 + S_{111} \sigma_1^2 + S_{1111} \sigma_1^3 \quad (31)$$

从材料的单向拉伸中可以得到  $\sigma_1$ - $e_1$  曲线, 所以  $S_{11}$  即可确定,  $S_{11}$  为 1 方向的材料弹性模量的倒数。  $S_{111}$  和  $S_{1111}$  可以通过双轴拉、压试验来确定, 而  $S_{166}$  则可以通过偏轴拉伸的试验资料来确定。

罗和邹<sup>[9]</sup>用轮胎帘子布和橡胶制成复合材料, 还用 Kevlar-49 和硅橡胶做成试件, 经过试验测试确定了其弹性柔量如表 1<sup>[10]</sup>。

表 71

弹性柔量	帘子线/橡胶	Kevlar-49/硅橡胶 ( $V_f=9\%$ )	弹性柔量	帘子线/橡胶	Kevlar-49/硅橡胶 ( $V_f=9\%$ )
$S_{11}(\text{MPa})^{-1}$	$0.165E-3$	$0.114E-3$	$S_{33}(\text{MPa})^{-1}$	0.408	0.387
$S_{1111}(\text{MPa})^{-3}$	0	0	$S_{3333}(\text{MPa})^{-3}$	0.183	$77.5E-3$
$S_{12}(\text{MPa})^{-1}$	$-65.9E-6$	$-69.9E-6$	$S_{133}(\text{MPa})^{-2}$	$0.131E-3$	$3.43E-6$
$S_{22}(\text{MPa})^{-1}$	0.121	0.306	$S_{2233}(\text{MPa})^{-3}$	0.469	$56.3E-3$
$S_{2222}(\text{MPa})^{-3}$	$51.4E-3$	0.563			

增量分析方法也是解决柔性复合材料非线性问题的一条有效途径。Chou和Takahashi<sup>[11]</sup>利用 Petit 和Waddoups<sup>[12]</sup>的增量分析理论建立了柔性复合材料非线性弹性行为的分析。按照这种分析,材料在  $x$  方向的应力增量可以用线性方程表示:

$$\Delta\sigma_x = \bar{E}_x \Delta e_x \quad (32)$$

其中  $\bar{E}_x$  表示等相位曲线纤维复合材料的  $E_x^0$  或随机相位曲线纤维复合材料的  $E_x^r$ ; 这里  $\Delta e_x = \Delta l/l$ ,  $l$  表示材料的原有长度,  $\Delta l$  为长度增量。根据式 (32) 的意义,  $i$  状态下的应力可以用增量的形式写成

$$(\sigma_x)_i = (\sigma_x)_{i-1} + (\Delta\sigma_x)_i \quad (33)$$

对于等相位曲线纤维复合材料,沿纤维轴向的平均拉伸应变增量为<sup>[9]</sup>

$$\Delta\bar{e}_i = [(S_{11} - S_{12})F(h) + S_{12}] \Delta\sigma_x \quad (34)$$

其中  $F(h)$  的意义与式 (18) 中的相同。对于随机相位曲线纤维复合材料,类似于式 (25) 可表示为<sup>[9]</sup>

$$\Delta\bar{e}_i = (\Delta e_x - \Delta e_y)F(h) + \Delta e_y \quad (35)$$

其中  $\Delta e_y = -\bar{\nu}_{xy} \Delta e_x$ , 这里  $\bar{\nu}_{xy}$  表示  $\nu_{xy}^r$ 。显然,对于所考虑的材料,的总应变为

$$e_x = \sum_{i=1}^n (\Delta e_x)_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta l}{l} \right)_i \quad (36)$$

式 (36) 若用积分形式表示,则为

$$e_x = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon_x) \quad (37)$$

其中  $l_0$  表示材料的初始长度,  $\varepsilon_x = (l - l_0)/l_0$ ,  $l$  是现在长度。从式 (37), 可得  $i$  状态下的应变

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_x)_i &= \exp\left(\sum_1^i \Delta e_x\right) - 1 \\ (\varepsilon_y)_i &= \exp\left(\sum_1^i \Delta e_y\right) - 1 \\ (\varepsilon_y^0)_i &= \exp\left(\sum_1^i \Delta\bar{e}_i\right) - 1 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

柔性复合材料中的曲线纤维在拉伸载荷作用下形状会发生改变,这种变化可用下式来描述:

$$\lambda = \lambda_0(1 + \varepsilon_x) \quad (39)$$

$$s = s_0(1 + \varepsilon_0^0) \quad (40)$$

其中  $\lambda_0$  为曲线纤维的波长初值,  $s_0$  为纤维长度初值。这里  $\varepsilon_x$  和  $\varepsilon_0^0$  可以根据式(38)计算。

对于柔性复合材料的非线性力学行为, 可以用上述三种理论来进行分析。建立在 Lagrange 标架下的分析, 其坐标轴之一与单向增强复合材料中未变形的纤维方向一致; 而 Euler 体系的分析是建立在变形后与纤维方向一致的标架上; 增量分析则是不考虑材料变形的历史来处理柔性复合材料的力学问题。实际上这三种理论分析的结果都比较接近, 与试验的资料也比较符合<sup>[10]</sup>。用三种分析方法对 Kevlar-49/硅橡胶复合材料进行的理论分析和试验结果示于图 3<sup>[10]</sup>, 从图 3 可以看出试验结果与理论分析间有较好的一致性。

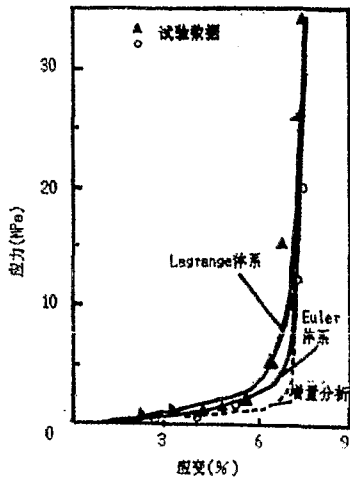


图3 用三种非线性分析理论得出的应力应变关系曲线和试验结果<sup>[10]</sup>,  $a/\lambda=0.09$

好的一致性。

### 5 帘子线/橡胶复合材料

用于轮胎的帘子线/橡胶材料是最早出现的最典型的柔性复合材料。帘子线具有较高的弹性模量, 较低的可延伸性, 而橡胶正好相反, 有较低的弹性模量, 较大的可延伸性。由于轮胎结构的需要, 帘子线的铺设分为环向铺设和偏角铺设两类。若以轮胎的中心线为基准, 可将这两类材料视为  $(+\theta/-\theta)$  和  $(+\theta/0/-\theta)$  层合板。

常用的橡胶材料, 由于某些成分, 比如硫的含量的变化, 使其弹性模量将在较大的范围里变化。因此在制造柔性复合材料时, 可以根据构件所需要的变形程度来进行设计。

轮胎的帘子线可以用很多材料制造。常用的有: 钢丝, 人造丝, 尼龙纤维以及近几年出现的 Kevlar 纤维和聚酯纤维。由于帘子线的材料不同, 因此所形成的帘子布的弹性模量差别也很大。比如, 对于带状铺设的帘子布, 钢丝材料的弹性模量可达到 109.55GPa, 而 Kevlar 纤维材料的弹性模量只有 24.8GPa, 人造丝材料就更低, 只有 11.02GPa。

通常制造帘子布的纤维是加捻过的。虽然加捻纤维的拉伸弹性模量会有所降低, 但是这种纤维构造的轮胎可以增加疲劳寿命。根据 Hearle 等<sup>[13]</sup>的分析, 单股加捻纤维束的弹性模量为无捻纤维束弹性模量的  $1/(1+4\pi^2 R^2 T^2)$ , 这里  $R$  为纤维束的半径,  $T$  是单位长度内加捻螺旋数。纤维束通过加捻还可以改善材料固化后的残余应力状况, 而且可以实现纤维的预应力, 提高材料的使用强度<sup>[14]</sup>。

加捻纤维束与基体材料的界面固化残余应力可以表示为纤维与基体的热弹性性质、纤维束的尺寸、纤维加捻螺旋角、固化的变温以及纤维纵向尺寸的函数, 即<sup>[14]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^f &= \frac{C_1 A_2 - C_2 A_1}{A_2 B_1 - A_1 B_2}, \quad \sigma_z^f = \frac{C_2 B_1 - C_1 B_2}{A_2 B_1 - A_1 B_2} \\ \tau_{rz}^f &= \frac{R^2 \sin \phi \cdot \sigma_z^f}{r_0(m+2)(l_s - k\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

其中 $\sigma_r^i$ 为界面径向残余应力,  $\sigma_z^i$ 为沿材料轴向的界面残余应力,  $\tau_{rz}^i$ 是界面剪切残余应力,  $r_0$ 为纤维半径,

$$A_1 = \frac{2\pi R^2}{m(L_S - k\theta)} \left[ \frac{L_S}{L_S - k\theta} (\gamma_r \cos \phi + \gamma_t \sin \phi) + \sin \phi (kf_0 - \gamma_r \sin \phi \cos \phi + \gamma_t \cos^2 \phi) \right]$$

$$B_1 = \frac{2\pi(m+2)f_1\delta_2 \sin \phi}{m} + \frac{4r_0 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \sin \phi}{\cos \frac{\pi}{m} - \cos \frac{\pi(m-1)}{m}} \cdot \left[ \frac{r_0 \alpha_r^i T_i \pi(m-1)}{2m} - \Delta \rho_0 \sin \frac{\pi(m-1)}{2m} \right]$$

$$C_1 = \frac{G_f J_f k(2R^2 - k^2)}{\sqrt{(R^2 + k^2)^5}} - \frac{3E_f J_f R^2 k}{\sqrt{(R^2 + k^2)^5}} + A_f E_f (\alpha_r^i) [2(T_i \sin \phi + T_i \cos \phi)(T_i \cos \phi - T_i \sin \phi) \cos \phi + (T_i \sin \phi + T_i \cos \phi)^2 \sin \phi]$$

$$A_2 = \frac{2\pi R}{m(L_S - k\theta)} [2k(\gamma_r \cos \phi + \gamma_t \sin \phi) + R \sin \phi (\gamma_r \sin^2 \phi + Rf_0 - \gamma_t \cos \phi \sin \phi)]$$

$$B_2 = \frac{2\pi R \delta_2 f_1 \cos \phi}{m} + \frac{4r_0 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\cos \frac{\pi}{m} - \cos \frac{\pi(m-1)}{m}} \left[ \frac{r_0 \alpha_r^i T_i \pi(m-1)}{2m} - \Delta \rho_0 \sin \frac{\pi(m-1)}{2m} \right] \cos \phi$$

$$C_2 = \frac{E_f I_f R(2k^2 - R^2)}{\sqrt{(R^2 + k^2)^5}} - \frac{3G_f J_f k^2 R}{\sqrt{(R^2 + k^2)^5}} + A_f E_f (\alpha_r^i)^2 [2(T_i \sin \phi + T_i \cos \phi)(T_i \sin \phi - T_i \cos \phi) \sin \phi + (T_i \sin \phi + T_i \cos \phi)^2 \cos \phi]$$

$$f_0 = \frac{\alpha_r^i \alpha_r^i T_i T_i r_0 \theta \sin \phi}{(\alpha_r^i T_i r_0)^2 + (\alpha_r^i T_i \theta)^2 (R^2 + k^2)}, \quad f_1 = r_0 \sin \phi_0$$

其中有关符号的意义以及式(41)中符号的意义详见[14].

偏轴铺设的帘子线/橡胶单层材料的本构方程可以利用层合理论写出为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (42)$$

这里 $\bar{Q}_{i,j}$ 是转换刚度,其意义为

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

其中 $Q_{i,j}$ 为材料轴向刚度,  $\theta$ 为偏轴角.

Akasaka 和 Hirano<sup>[15]</sup>研究了单向偏轴铺设帘子线/橡胶材料,得到式(43)的近似表达式为

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{11} &\approx E_2 + E_1 \cos^4 \theta, & \bar{Q}_{16} &\approx E_1 \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{22} &\approx E_2 + E_1 \sin^4 \theta, & \bar{Q}_{26} &\approx E_1 \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{12} &\approx (E_2/2) + E_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta, & \bar{Q}_{66} &\approx (E_2/4) + E_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

其中  $E_1$  和  $E_2$  分别为单层材料轴向和横向弹性模量。这种近似大大减少了计算工作量，并且能保证达到工程需要的精度。

从 Clark<sup>[16]</sup> 的理论分析中，可以写出  $(+\theta/-\theta)$  帘子布/橡胶层合材料的拉压刚度系数

$$A_{ij} \cdot \frac{2}{h} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(\theta) + \bar{Q}_{11}(-\theta) & \bar{Q}_{12}(\theta) + \bar{Q}_{12}(-\theta) & 0 \\ \bar{Q}_{12}(\theta) + \bar{Q}_{12}(-\theta) & \bar{Q}_{22}(\theta) + \bar{Q}_{22}(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}(\theta) + \bar{Q}_{66}(-\theta) \end{bmatrix} \quad (45)$$

其中  $\bar{Q}_{ij}$  是材料偏轴转换刚度。这样  $(+\theta/-\theta)$  层合材料的弹性常数可以表达为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_f V_f \cos^4 \theta + \frac{4G_m}{1-V_f} - \frac{[E_f V_f \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2G_m/(1-V_f)]^2}{E_f V_f \sin^4 \theta + 4G_m/(1-V_f)} \\ E_y &= E_x [(\pi/2) - \theta] \\ G_{xy} &= E_f V_f \sin^2 \theta \cos^2 \theta + G_m/(1-V_f) \\ \nu_{xy} &= \frac{E_f V_f \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2G_m/(1-V_f)}{E_f V_f \sin^4 \theta + 4G_m/(1-V_f)} \\ \nu_{yx} &= \nu_{xy} [(\pi/2) - \theta] \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

其中  $E_f$  为纤维弹性模量， $V_f$  为纤维体积分数， $G_m$  为橡胶材料的剪切弹性模量。

Walter<sup>[17]</sup> 根据网络理论，假定帘子线的弹性模量  $E_f \rightarrow \infty$ ，即帘子线不可伸长， $(+\theta/-\theta)$  层合材料的弹性常数可以简化为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 4G_m(1-V_f)(\operatorname{ctg}^4 \theta - \operatorname{ctg}^2 \theta + 1) \\ E_y &= E_x [(\pi/2) - \theta] \\ G_{xy} &= E_f V_f \sin^2 \theta \cos^2 \theta + G_m(1-V_f) \\ \nu_{xy} &= \operatorname{ctg}^2 \theta, \quad \nu_{yx} = \operatorname{tg}^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Walter<sup>[17]</sup>，Vinson 和 Chou<sup>[18]</sup> 考虑了  $(+\theta/-\theta)$  双铺层帘子线/橡胶复合材料的层间应力问题。他们假定  $y$  方向的帘子布为有限宽度，载荷主要作用在  $x$  方向。于是由于对称性使  $\gamma_{yz} = 0$ ，同时假定  $\varepsilon_z$  相当小而忽略不计，而剪应变  $\gamma_{xz}$  则在层合材料有限宽的自由边上达到最大值。若将帘子线视为不可伸长，即有  $E_f \rightarrow \infty$ ，那么

$$\gamma_{xz} = \varepsilon_x (2\operatorname{ctg}^2 \theta - 1) \quad (48)$$

从式 (48) 中可知，若  $\theta = \pm \operatorname{ctg}^{-1}(1/2) = \pm 54.7^\circ$ ，则  $\gamma_{xz} = 0$ 。也就是当铺层偏角取  $54.7^\circ$  时，铺层间的正应力和剪应力不发生耦合效应。实验的结果<sup>[19]</sup> 表明铺层层数的增长使得层间的剪应力减小。

在帘子线/橡胶复合材料的分析中，层合理论仍是一个有效的工具，但是这种方法的使用受到很多限制。首先是橡胶材料会出现大变形或非线性应变；其次是层合理论没有考虑层间变形的影响；第三是没有考虑材料的粘弹性行为；第四是轮胎与地接触区域内力情况相当复杂；第五是假定了帘子线与橡胶之间粘接完好；最后一点是难以处理疲劳和湿热载荷产生的影响。

## 6 涂层织物

涂层织物是又一类型的柔性复合材料。它常用在缆绳支撑的房屋结构中，还有帐篷，充气房屋，汽车和火车运输中的篷布等等。这种材料的特点是在较宽的温度范围内保持韧性，有较强的抗拉和抗撕裂强度，有较小的透气性，同时还必须具有较强的形状稳定性。涂层织物实际上是由经向和纬向的纤维纱编织成布，然后浸入韧性的基体材料形成很薄的基体层，最后固化而成。

由于织物成型的性质，涂层织物在受力的情况下通常表现为非线性应变行为。Skelton<sup>[20]</sup>研究了正交编织的涂层织物的双轴应力应变行为，他认为这种应力应变响应主要依赖于经、纬纤维纱编织成型时纤维纱所达到的弯曲程度。也就是说，经、纬纤维的几何形态对涂层织物的应力应变行为有重要的影响。涂层织物涂层材料热固化时，经纱和纬纱的约束程度决定了这两股纤维的卷曲状态，如果只在经纱方向施加一定的拉力，那么纬纱就会变得更加弯曲，这样固化成型的涂层织物就达不到应有的强度。因此在涂层织物固化时，必须在经、纬方向同时加以约束，类似双轴拉伸的受力状态，固化成型后就得到了常用的涂层纤维布。

Skelton<sup>[20]</sup>通过涂层织物的双轴测试，观察了高韧性聚酯树脂基的平纹编织纤维布的力学行为。平纹编织是一种常见的织纹，每一股经纱和纬纱都是从一股纱下穿过并压在另一股纱上。布面平整，但纱的弯曲较大，铺覆性较差，适合制作平坦的纤维布。这种布的特点是基体浸润性好，力学性质可以用等相位正交波纹纤维的方法来进行分析。Skelton测试这种涂层织物时，采用的双轴载荷比（经向/纬向）为1:2。他把涂层织物的力学行为分为机织阶段、热定型阶段和涂层阶段3个阶段并以此来进行分析。图4示出Skelton<sup>[20]</sup>的双轴受力与变形的曲线，可以看出经向纤维在载荷的作用下变形较小，而纬向纤维则发生较大的变形。由于纤维自身弯曲作用的影响，在低载荷作用时，由于纬向纤维受力是经向纤维的2倍，因此经向纤维出现了负变形。

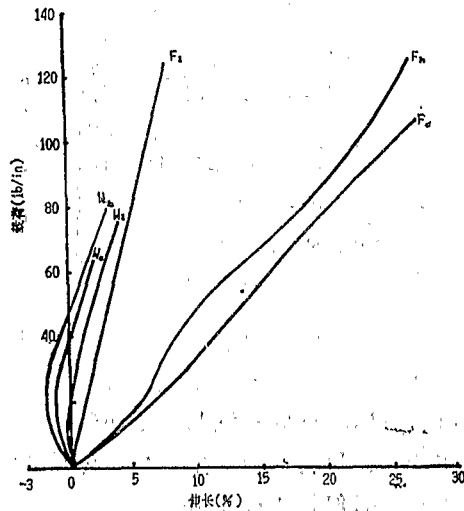


图4 涂层织物双轴测试结果<sup>[20]</sup>。载荷比（经向：纬向）=1:2， $W_I$ 为机织经向， $F_I$ 为机织纬向， $W_h$ 为热定型经向， $F_h$ 为热定型纬向， $W_c$ 为涂层经向， $F_c$ 为涂层纬向

## 7 含波纹纤维的复合材料

含波纹纤维的复合材料也是一种典型的柔性复合材料。平面编织和针织材料都是含有波纹纤维的材料，不过其组合情况更复杂，不像单向波纹纤维材料容易处理。由于复合材料中的纤维有连续弯曲的几何特点，同时结合有韧性基体，因此这种材料可以经受较大的变形，表现出良好的柔性特征。特别是在高应力的作用下，材料由于纤维的作用，还可以有相当高的强度。罗和邹<sup>[1]</sup>分析了这种纤维的特点，如图5所示。他们将基本分析单元分成AB部分、BC部分和CD部分3个区域。这里 $AB + CD = a$ ， $BC = b$ ，在BC段中纤维与x轴的平均夹角为 $\theta_0$ ，于是在x方向的应变可以表示成为

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a [a/(a+b)] + \varepsilon_b [b/(a+b)] \quad (49)$$

其中  $\varepsilon_a$  表示 AB 和 CD 区域的  $x$  方向应变,  $\varepsilon_b$  表示 BC 区域的  $x$  方向平均应变, 类似于偏轴铺层材料的拉伸分析, 可以将  $\varepsilon_b$  定义为

$$\varepsilon_b = \frac{L \cos \theta - L_0 \cos \theta_0}{L_0 \cos \theta_0} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - 2e_{11}(\cos \theta_0 - 1)}} \quad (50)$$

这里  $L$  和  $\theta$  表示相应于  $L_0$  和  $\theta_0$  受载时的瞬时值.  $L_0$  和  $\theta_0$  的意义见图 5.

波纹纤维的  $\theta_0$  通常在  $19^\circ$  到  $28^\circ$  的范围内变化, 若取平均值, 则有  $\theta_0 = 23.5^\circ$ . 图 6<sup>[10]</sup> 示出  $\theta_0 = 19^\circ, 23.5^\circ$  或  $28^\circ$  时的应力应变曲线以及  $\theta_0 = 23.5^\circ$  的试验结果. 从图

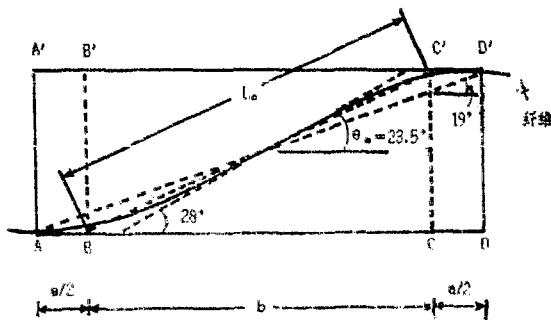


图5 波纹纤维初始状态的几何特征<sup>[10]</sup>

6中可以看出, 试验数据与理论曲线吻合得较好, 同时试验<sup>[10]</sup>还表明, 基本分析单元中  $BB'$  和  $CC'$  在材料受力变形后仍然保持直线并垂直于  $x$  轴. 这就说明, 材料的横截面  $BB'$  和  $CC'$  在变形时保持平面不变.

## 8 结 语

柔性复合材料中最早出现的是帘子线/橡胶材料, 然后是涂层织物材料以及近几年出现的含波纹纤维的复合材料. 它们的力学性能可以从 3 方面分析: ①对于小应变状态, 可以利用层合理论分析其线弹性行为. ②利用微变形叠加原理建立增量分析来处理柔性复合材料的非线性弹性行为, 但这种方法有一定的限制, 在应用时应予以适当的注意. ③建立 Euler 或 Lagrange 系统下的非线性分析是解决柔性复合材料有限变形问题最有效的工具.

柔性复合材料的刚度、破坏变形以及能量吸收能力都可以通过对纤维和基体材料的选择以及对纤维的几何形状的选择来实现. 找到适合某种情况的最佳配合以及最佳的纤维的几何形式设计, 是柔性复合材料研究中的重要问题. 柔性复合材料在实际工程应用中有着广阔的前景, 因此需要进一步深化对其性能的研究; 需要进一步认识材料的损伤和破坏行为; 需要进一步发展对柔性复合材料产生大变形的监测技术以及发展预测材料非线性弹性行为的分析方法.

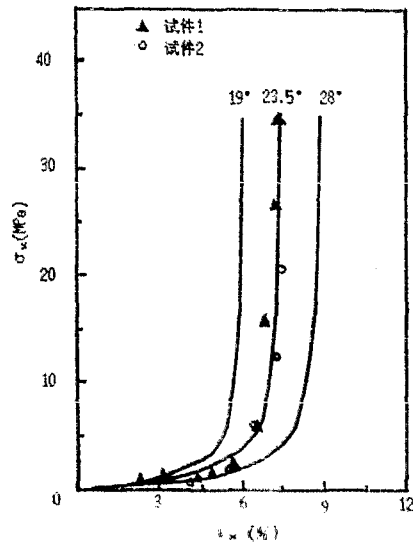


图6 含波纹纤维的复合材料, 当  $\theta_0 = 19^\circ, 23.5^\circ$  和  $28^\circ$  时应力应变曲线与试验结果<sup>[10]</sup>

## 参 考 文 献

- 1 Martin F. *Jahrb. Dtsch. Luftfahrt-Forsch.*, 1 (1939) : 470
- 2 Clark S K. *Rubber Chem. Technol.*, 37 (1964) : 1365
- 3 Gough V E. *ibid*, 41 (1968) : 988
- 4 Akasaka T. Various Reports/Bulletins, Faculty of Sci. & Eng. Chuo University, Tokyo (1959-64)
- 5 Biderman V I, Guslitser R L, Sakharov S P, Nenakhov B V, Seleznev I I, Tsukerberg S M. NASA, TT F-12, 382 (1969)
- 6 Luo S Y (罗申逸), Chou T W (邹祖炜). American Chemical Society Meeting, Anaheim, California (Sept. 1986)
- 7 Ishikawa T, Chou T W. *J. Comp. Mater.*, 17 (1983) : 399
- 8 Chou T W. Proc. 1st European Conf. on Comp. Mater., Bordeaux, France (1985)
- 9 Luo S Y, Chou T W. *J. Appl. Mech.*, 55 (1988) : 149
- 10 Chou T W. *J. Mater. Sci.*, 24 (1989) : 761-783
- 11 —, Takahashi K. *Composites*, 18 (1987) : 25
- 12 Petit P H, Waddoups M E. *J. Comp. Mater.*, 3 (1969) : 2
- 13 Hearle J W S, Grosberg P, Backer S. *Structure Mechanics of Fibers and Fabrics*. John Wiley & Sons Inc., New York (1969)
- 14 姚立宁, 邹祖炜. *中国科学 (A辑)*, 9 (1990) : 999
- 15 Akasaka T, Hirano M. *Comp. Mater. Struct.*, 1 (1972) : 70
- 16 Clark S K. *Textile Res. J.*, 33 (1963) : 295
- 17 Walter J D. *Rubber Chem. Technol.*, 51 (1978) : 524
- 18 Vinson J R, Chou T W. *Composite Materials and Their Use in Structures* (Elsevier-Applied Science), London (1975)
- 19 Lou A Y C, Walter J D. SESA Meeting, Wichita, Kansas (May 1978)
- 20 Skelton J. *J. Mater. J. M. L. S. A.*, 6 (1971) : 656

## FLEXIBLE COMPOSITES AND THEIR APPLICATIONS

Yao Li-ning

Department of Hydroelectric Power Engineering  
Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering

**Abstract** This article focuses on recent researches in flexible composites, which allow large deformation and exhibit nonlinear elastic behaviour. The analytical approaches are based on the classical laminate theory and nonlinear elastic mechanics. Among flexible composites are cord/rubber composites, coated fabrics and composites containing wavy fibers.

**Keywords** wavy fiber; tenacity matrix; flexible composites; laminate theory; nonlinear elasticity