第23卷 第3期 力学进展 Vol. 23 No. 3
1993年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1993

关于力学系统的对称性与不变量*

赵跃宇** 梅凤翔
湘潭大学（邮政编码411105） 北京理工大学（邮政编码100081）

提要 本文综述了近10年来关于力学系统的对称性和不变量的研究所提出的新概念、新理论，主要包括经典 Noether 对称性的微分几何描述、高阶 Noether 对称性、Lie 对称性，拟对称性和伴随对称性以及与之相应的不变量. 关于非保守系统的高阶 Noether 对称性和 Lie 对称性的结果属首次公布.

关键词 力学系统；不变量；对称性；微分流形；形式计算

1 引 言

力学系统的对称性与不变量之间有密切联系. 自1918年 Noether[27] 揭示这种联系以来，数学、物理、力学家们非常重视力学系统的对称性与不变量的理论和应用研究. 最近10多年来，这方面的研究有很大发展.

经典 Noether 定理研究的是在时空无穷小单参数变换群的作用下 Hamilton 作用泛函的不变性，与此对应的对称性称为 Noether 对称性[4]. 70年代，Djukic，Vujanovic[28,29] 等将时空变换扩充为包含速度的变换，继而研究了非保守系统的对称性和不变量. 我国学者[31,37-45] 在非保守系统、非完整系统、高阶非完整系统、连续介质力学系统的对称性和不变量的研究中做出了一些贡献. 最近的研究表明，考虑作用泛函不变的对称性不能包括所有的对称性，Lutzky[19,20]，Prince 和 Eliezer[46] 等曾举出一系列的例子说明不变量所对应的对称性不一定是 Noether 型的，这给经典 Noether 定理带来了很大的冲击，从而促使人们从不同的角度去重新认识对称性，进而提出了一系列新的对称性概念. 首先是1979年 Lutzky 等重新把上世纪末数学家 Sophus Lie 研究微分方程的不变性的扩展群方法引入力学领域加以研究，提出了使运动微分方程不变的 Lie 对称性. Lie 对称性方法发展迅速，已经有人专门讨论过非线性科学中的两个很重要的例子：一是 Lorenz 模型[8]，它的控制方程为三个一阶常微分方程；二是 Hénon-Heiles 模型[9]，它的控制方程为两个二阶常微分方程，给出了它们的一些 Lie 对称性和相应的不变量. 这些结果对于认识混沌的内在性质也许会有帮助.

* 国家自然科学基金、青年科学基金资助课题.
** 现在工作单位：湖南大学工程力学系，长沙（邮政编码410012）.

Lie 对称性研究的是微分方程在无穷小变换群作用下的不变性[18]，它的结果扩大了对称性与不变量的研究领域。

以作用量泛函研究对称性与不变量的方法近年来也得到了较大的发展。Sarlet 和 Cantrijn[6]为削弱经典 Noether 对称性的条件，引入了所谓的高阶Noether 对称性的概念。他们所用的工具是现代微分几何中的流形和微分形式等。如果不使用这一现代工具，似乎很难提出这一概念，从而揭示出新的对称性与不变量的关系。从这里我们也可感受出现代力学研究中现代数学工具的重要性[1,15-17]。Sarlet 等[22]证明了对于 Lagrange 系统，一个高阶 Noether对称可通过一个(1,1)型张量转变为通常的 Noether 对称性。最近几年来，Sarlet 等又接连提出了所谓的拟对称性（pseudosymmetry）[12]和伴随对称性(adjoint symmetry)[13]的概念，他们的目的是通过流形上微分形式的不变性研究确定力学系统的首次积分。这些研究成果具有很大的启发性。

对称性与不变量理论的研究发展，使我们对客观世界的内在规律性有了更加深入的认识。本文将对已有的有关成果，特别是几种新概念、新理论加以评述，并给出我们关于高阶 Noether 对称性和 Lie 对称性研究的几个最近成果。

本文将采用如下记号：$M,N,\cdots$：有限维微分流形；$F\in C^\infty(M)$：流形M上的C^∞实值函数；$X\in\mathscr{X}(M)$：流形M上的 C^∞ 矢量场；$\alpha\in\Omega^p(M)$：流形M上的 p 形式；i_X：内积；Λ：外积：L_X：Lie 导数；d：外微分；$\otimes$：直积。

2 经典 Noether 对称性

对于完整保守的力学系统，其位形空间$(q^1,q^2\cdots,q^n)$为一实 n 维微分流形，记为M。设L为 $R\times TM$ 上满足 Hess 矩阵 $\partial^2L/(\partial\dot q^i\partial\dot q^j)$的余秩为零的条件的 Lagrange函数，定义一个 1 形式

$$\theta=Ldt+\frac{\partial L}{\partial\dot q^i}(dq^i-\dot q^i dt)\tag{2.1}$$

称之为 Cartan 形式，可证 $d\theta$ 的特征矢量场为

$$\Gamma=\frac{\partial}{\partial t}+\dot q^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\ddot q^i\frac{\partial}{\partial\dot q^i}\tag{2.2}$$

其中 $\ddot q^i$ 满足

$$\frac{\partial^2L}{\partial\dot q^i\partial\dot q^j}\ddot q^j+\frac{\partial^2L}{\partial\dot q^i\partial q^j}\dot q^j+\frac{\partial^2L}{\partial\dot q^i\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0\tag{2.3}$$

并可证明

$$i_\Gamma d\theta=0,\quad\langle\Gamma,dt\rangle=1\tag{2.4}$$

设Y是$R\times TM$上的一个任意矢量场，其局部表示为

$$Y=\tau(t,q,\dot q)\frac{\partial}{\partial t}+\xi^i(t,q,\dot q)\frac{\partial}{\partial q^i}+\eta^i(t,q,\dot q)\frac{\partial}{\partial\dot q^i}\tag{2.5}$$

则我们给出如下几种对称性的定义。

定义 1 若矢量场 $Y\in\mathscr{X}(R\times TM)$，存在 $h\in C^\infty(M)$，使得

$$[Y,\Gamma]=h\Gamma\tag{2.6}$$

则称Y为 Γ 的一个动力学对称性，

实际上，一个动力学对称性将矢量场Γ的积分曲线映射为积分曲线.

定义 2 矢量场Y若满足

$$Y = h\Gamma, \quad h \in C^{\infty}(M) \tag{2.7}$$

则称之为Γ的一个平凡对称性. 显然，一个平凡对称性一定是一个动力学对称性.

定义 3 对于 Lagrange 系统Γ，若矢量场Y满足

$$L_Y d\theta = 0 \tag{2.8}$$

则称之为Γ的一个 Noether 对称性.

根据 Lagrange 系统的 Noether 对称性的条件，利用 Poincaré 引理，则有

$$L_Y \theta = df \tag{2.9}$$

其中 f 为一规范函数. 由于

$$L_Y d\theta = d i_Y d\theta + i_Y d\, d\theta = d i_Y d\theta = 0 \tag{2.10}$$

故有

$$i_Y d\theta = dG \tag{2.11}$$

因而有

$$dG + d i_Y \theta = df$$

即

$$G = f - i_Y \theta = f - \left[L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\xi^i - \dot{q}^i \tau) \right] \tag{2.12}$$

此即对应于 Noether 对称性的守恒量.

上述结果的经典论述由德国女科学家 Noether 首先给出，称为 Noether 定理. 它对数理科学的发展起了很大的作用. 它首次揭示了力学系统的积分不变量与其对称性之间的对应关系，但不全面. 近10多年来，人们从不同的角度将 Noether 的思想加以推广，以进一步刻划运动的积分不变量与对称性之间的对应关系.

3 高阶 Noether 对称性

考虑如 (2.2) 定义的 Lagrange 系统Γ，设Y是Γ的一个动力学对称性，动力学 2 形式 $d\theta$ 与Y的内积为 1 形式，记为 α，则有

$$i_\Gamma d\theta = 0 \tag{3.1}$$

$$[Y, \Gamma] = g\Gamma \tag{3.2}$$

$$i_Y d\theta = \alpha \tag{3.3}$$

可以很容易地证明

$$i_\Gamma \alpha = 0 \tag{3.4}$$

$$i_Y \alpha = 0 \tag{3.5}$$

$$L_\Gamma \alpha = 0 \tag{3.6}$$

由 (3.6) 可知 1 形式 α 是Γ的一个不变 1 形式.

若 (3.3) 中的 α 是恰当 1 形式，则可证 Y 为一个 Noether 对称性.

若 (3.3) 中的 α 不是恰当 1 形式，由于

$$L_\Gamma \alpha = i_\Gamma d\alpha + d i_\Gamma \alpha = i_\Gamma d\alpha = 0 \tag{3.7}$$

而

$$[Y, \Gamma] = g\Gamma \tag{3.2'}$$

$$i_Y d\alpha = \beta \tag{3.3'}$$

此处的β具有（3.4）—（3.6）中α相同的性质，因而可对β作同上类似的讨论，直到出现一个恰当1形式γ为止。因而可自然地给出以下定义。

定义 4 若对于 Lagrange 系统Γ，矢量场Y满足

$$L_Y^n d\theta = 0 \tag{3.8}$$

而对于$k<n$，有$L_Y^k d\theta \neq 0$，则称Y为Γ的一个n阶 Noether 对称性。

对于n阶 Noether 对称矢量场Y，Lagrange 系统相应的不变量为

$$G = f - L_Y^n\langle Y, \theta\rangle \tag{3.9}$$

其中规范函数f由

$$L_Y^n\theta = df \tag{3.10}$$

确定。在这里我们证明如下。

由于$L_Y^n d\theta = 0$，故有

$$L_Y^{n-1} L_Y d\theta = L_Y^{n-1}(d i_Y d\theta + i_Y d\, d\theta) = L_Y^{n-1} d i_Y d\theta = 0 \tag{3.11}$$

$$L_Y^{n-1} i_Y d\theta = dG \tag{3.12}$$

而由$L_Y^n d\theta = d(L_Y^n\theta) = 0$，根据 Poincaré 引理故有

$$L_Y^n\theta = df \tag{3.13}$$

$$L_Y^n\theta = L_Y^{n-1} L_Y\theta = L_Y^{n-1}(d i_Y\theta + i_Y d\theta) = L_Y^{n-1} d i_Y\theta + L_Y^{n-1} i_Y d\theta \tag{3.14}$$

$$df = dL_Y^{n-1} i_Y\theta + dG \tag{3.15}$$

因而得

$$G = f - L_Y^{n-1} i_Y\theta = f - L_Y^{n-1}\langle Y, \theta\rangle \tag{3.16}$$

这就证明了（3.9）。

显然，高阶 Noether 对称性同样对应于一个运动积分。当动力学对称性是非 Noether 对称性而满足（3.8）时，上面的结果提供了一种寻求首次积分的方法。这种方法还具有以下一个非常有趣的性质。

定理 设Y为Γ的一个动力学对称性，且在局部域内

$$L_Y^k d\theta = \sum_{l=0}^{k-1} f_l \cdot L_Y^l d\theta \tag{3.17}$$

成立，其中k为上式成立时的最小整数，则函数f_l是Γ的首次积分。

证 对（3.17）两边同求 Lie 导数，有

$$L_\Gamma L_Y^k d\theta = L_\Gamma \sum_{l=0}^{k-1} f_l \cdot L_Y^l d\theta = \sum_{l=0}^{k-1}[L_\Gamma(f_l) L_Y^l d\theta + f_l L_\Gamma L_Y^l d\theta] \tag{3.18}$$

$$L_\Gamma L_Y d\theta = L_Y L_\Gamma d\theta + L_{[Y,\Gamma]}\alpha = L_Y L_\Gamma d\theta + g L_\Gamma d\theta = (L_Y - g) L_\Gamma d\theta = 0$$

……

$$L_\Gamma L_Y^l d\theta = (L_Y - g)^l L_\Gamma d\theta = 0 \tag{3.19}$$

故有

$$\sum_{l=0}^{k-1} \Gamma(f_l) \cdot L_Y^l d\theta = 0 \tag{3.20}$$

又因各个 $L_Y^l d\theta$ 独立，故有 $\Gamma(f_l)=0$ $(l=0,\cdots,k-1)$，因而 f_l 就是力学系统的一个首次积分。

比较一下（2.8）与（3.8）可以发现，高阶 Noether 对称性是在进一步削弱 Noether 对称性的要求下的一种自然延拓。对于完整保守的力学系统，高阶 Noether 对称性可由一个（1,1）型张量转化为一个通常的 Noether 对称性，但我们的研究表明，对于完整非保守的力学系统，高阶 Noether 对称性是全新的。

4 Lie 对称性

Kepler 问题的平面运动的 Lagrange 函数为

$$L=(1/2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\mu(q_1^2+q_2^2)^{-1/2} \tag{4.1}$$

Prince 和 Eliezer[32] 给出了生成 Runge-Lenz 矢量场的一个点对称变换

$$Y^{(0)}=t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2}{3}q_1\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{2}{3}q_2\frac{\partial}{\partial q_2} \tag{4.2}$$

但它不是 Noether 对称性，并且也不是上面 Sarlet 和 Cantrijn 提出的高阶 Noether 对称性。（4.2）可使与（4.1）对应的运动微分方程不变，因而实际上就是我们在引言中介绍的 Lie 对称性。

近年来，关于 Lie 对称性的文献大量出现，用以研究非线性常微分方程、偏微分方程等的首次积分问题，甚至求解微分方程的完全解。利用 Lie 变换求解微分方程的技术在计算机的帮助下应用 REDUCE 已不再有什么困难了。Lie 对称性在连续介质力学中已有很多应用，关于各向异性薄板问题的研究可见[47]，在这里仅就一般力学讨论。

下面简要说明 Lie 对称性的研究思路。Lie 对称性所考虑的无穷小单参数变换群为

$$t\to T=t+\varepsilon\tau(t,q,\dot{q}) \tag{4.3}$$

$$q\to Q=q+\varepsilon\xi(t,q,\dot{q}) \tag{4.4}$$

对于正规形式的 Euler-Lagrange 方程

$$\ddot{q}=\alpha(q) \tag{4.5}$$

相应的不变性条件为

$$\ddot{\xi}-\dot{q}\ddot{\tau}-2\dot{\tau}\alpha=E(\alpha) \tag{4.6}$$

其中

$$E=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial q}+(\dot{\xi}-\dot{\tau}\dot{q})\frac{\partial}{\partial\dot{q}} \tag{4.7}$$

根据（4.6）求得 ξ,τ 后代入

$$E(L)+\dot{\tau}L=\dot{f} \tag{4.8}$$

求得 f，则得运动不变量

$$I=(\tau\dot{q}-\xi)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\tau L+f \tag{4.9}$$

以上结果只适用于保守系统。对于非保守系统的结果由我们最近给出，将在后面介绍。上面的结论适用于多自由度系统。

对于 Hénon-Heiles 模型

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}(Ax^2+By^2)-Dx^2y-\frac{1}{3}Cy^3 \tag{4.10}$$

1° 当 $A=B$，$C=-D$ 时的 Lie 对称矢量场

$$Y_1=k\dot{y}\frac{\partial}{\partial x}+k\dot{x}\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.11}$$

相应的运动不变量为

$$I_1=\dot{x}\dot{y}+Axy+\frac{1}{3}Dx^3+Dxy^2 \tag{4.12}$$

2° 当 A,B 任意，而 $C=-6D$ 时，Lie 对称矢量场为

$$Y_2=[4D(x\dot{y}-2\dot{x}y)+2(4A-B)\dot{x}]\frac{\partial}{\partial x}+4Dx\dot{x}\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.13}$$

相应的运动积分为

$$I_2=-4(y\dot{x}-x\dot{y})\dot{x}+4Ax^2y+x^4+4x^2y^2+(4A-B)(\dot{x}^2+Ax^2) \tag{4.14}$$

3° 当 $16A=B$，$C=-16D$ 时，Lie 对称矢量场为

$$Y_3=\left[4\dot{x}^3+4(A+2Dy)\dot{x}x^2-\frac{4}{3}Dx^3\dot{y}\right]\frac{\partial}{\partial x}-\frac{4}{3}Dx^3\dot{x}\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.15}$$

相应的积分不变量为

$$I_3=\dot{x}^4+2(A+2Dy)x^2\dot{x}^2-\frac{4}{3}Dx^3\dot{x}\dot{y}+A^2x^4-\frac{2}{9}D^2x^6-\frac{4}{3}D(A+Dy)x^4y \tag{4.16}$$

Lorenz 模型的 Lie 对称矢量场及相应的首次积分的较详细的研究可参见[8]. Lie 对称性还可用于系统约化. Olver[33] 的著作对 Lie 对称性作了较详细的讨论.

在研究 Lie 对称性时，(4.6) 是一个很关键的方程. 由它可最终演变成为一组复杂的偏微分方程. 正是由于这种复杂性，致使在 Lie 提出这种方法之后很少有人再进行研究，只在近年由于 Noether 对称性所遇到的困难，才促使人们重新对它加以研究. 从逻辑的角度来说，Noether 对称性应当是 Lie 对称性的一个子集. 近年来，对点变换的情形已有人证明的确如此[14]：若矢量场Y是L的一个 Lie 对称矢量场，则它一定是Γ的 Noether 对称矢量场，反之不然. 此结论仅对完整保守系统成立，对于完整的非保守系统我们在[46]中给出了一个说明性的例子.

5 拟对称性

Sarlet 等在研究自治系统的对称性时提出了拟对称性的概念，后来又进一步提出了伴随对称性的概念. 由于他们在研究非自治系统时也提出了伴随对称性，因而在这一节我们只介绍拟对称性.

对于自治系统，在流形M的切丛TM上定义一个内禀 (1,1) 型张量场S

$$S=\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)\otimes dq^i \tag{5.1}$$

则有 $S^2=0$，且对于 $X\in\mathscr{X}(TM)$，有

$$L_{S(X)}S=L_XS\circ S=-S\circ L_XS \tag{5.2}$$

设矢量场 Γ 为

$$\Gamma = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Lambda^i(q,v) \frac{\partial}{\partial v^i} \tag{5.3}$$

其中 Λ^i 为 $\ddot{q}^i + \Lambda^i(q,v) = 0$ 所确定.

设 Δ 为矢量场 $v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$，则有

$$S(\Gamma) = \Delta \tag{5.4}$$

$$(L_\Gamma S) \circ S = -S, \qquad S \circ (L_\Gamma S) = S \tag{5.5}$$

$$(L_\Gamma S)^2 = I \tag{5.6}$$

其中 I 为单位矢量场.

对于每一个 $\Gamma \in \mathscr{X}(TM)$，定义一个 1 形式 $\mathscr{X}^*_\Gamma$ 为

$$\mathscr{X}^*_\Gamma = \{\phi \in \mathscr{X}^*(TM) \mid L_\Gamma(S(\phi)) = \phi\} \tag{5.7}$$

而 $\mathscr{X}^*_\Gamma$ 上的元素可表示为

$$\phi = \alpha_i(q,v) dv^i + \Gamma(\alpha_i) dq^i \tag{5.8}$$

定义 5 若 $dS(\phi)$ 是一个辛形式，则 $\phi \in \mathscr{X}^*_\Gamma$ 称为非奇异的.

定义 6 若矢量场 $Y \in \mathscr{X}(TM)$ 对应于 ϕ 满足

$$L_Y(S(\phi)) = df, \ f \in C^\infty(M) \tag{5.9}$$

$$i_Y(\phi - d\langle \Delta, \phi \rangle) = 0 \tag{5.10}$$

则称Y为对应于ϕ的一个 Noether 型拟对称矢量场.

对于一个 Noether 型拟对称矢量场 Y，由于

$$L_Y(S(\phi)) = d i_Y S(\phi) + i_Y dS(\phi) \tag{5.11}$$

故有

$$i_Y dS(\phi) = d(f - i_Y S(\phi)) \tag{5.12}$$

而由于 $L_\Gamma i_Y dS(\phi) = 0$ 对于拟对称矢量恒成立，因而有

$$\Gamma(f - i_Y S(\phi)) = 0 \tag{5.13}$$

故对应于 Noether 型拟对称矢量场Y的相应不变量为

$$F = f - i_Y S(\phi) = f - \langle Y, S(\phi) \rangle \tag{5.14}$$

应当注意，由 (5.9)，(5.10) 所定义的矢量场并不是经典的 Noether 矢量场，但当取 $\phi = dL$ 时才有 $[Y, \Gamma] = 0$，故上述结果包括了对于 Lagrange 系统的 Noether 定理.

当取 $\phi = dL + Q_i dq^i$ 时，Y不是Γ的 Noether 对称性，以上结论导致耗散力为 Q_i 的非保守系统的广义 Noether 定理.

综上所述，拟对称性给出了保守系统和非保守系统的对称性与不变量之间关系的统一描述. 下面我们来看一个例子. 对于方程

$$\ddot{q} = -q\dot{q}^2 \tag{5.15}$$

取 $Q = -qv^2$，$L = (1/2)v^2$，则

$$\phi = dL + Qdq = vdv - qv^2 dq \tag{5.16}$$

显然 $dS(\phi) = dv \wedge dq$ 是一个辛形式，且矢量场

$$Y = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial q} + q\frac{\partial}{\partial v} \tag{5.17}$$

为对应于ϕ的一个 Noether 型拟对称性，其相应的首次积分为

$$F=(1/2)q^2+\ln v \tag{5.18}$$

6 伴随对称性

1984 年 Sarlet 和 Cantrijn 引进了生成首次积分的拟对称矢量场的概念，1987 年又引入了自治系统的伴随对称性的概念，并在1990年将其进一步推广到非自治系统. 下面我们对此作一简要介绍.

首先在 $R\times TM$ 上引入一个内禀 (1,1) 型张量场

$$S=\frac{\partial}{\partial v^i}\otimes(dq^i-v^i dt) \tag{6.1}$$

则对于矢量场 $\Gamma\in R\times TM$ 有

$$\Gamma=\frac{\partial}{\partial t}+v^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\Lambda^i\frac{\partial}{\partial v^i} \tag{6.2}$$

其中 Λ^i 满足 $\ddot{q}^i+\Lambda^i(t,q,v)=0$，并有 $S(\Gamma)=0$ 和

$$S\circ L_\Gamma S=S \qquad L_\Gamma S\cdot S=-S \tag{6.3}$$

对于每一个矢量场 Γ，定义

$$\mathscr{X}_\Gamma=\{X\in\mathscr{X}(R\times TM)\,|\,S([\Gamma,X])=0\} \tag{6.4}$$

$$\mathscr{X}_\Gamma^*=\{\phi\in\mathscr{X}^*(R\times TM)\,|\,L_\Gamma(S(\phi))=\phi-\langle\Gamma,\phi\rangle dt\} \tag{6.5}$$

则用基 $\{\Gamma,\ \partial/\partial q^i,\ \partial/\partial v^i\}$ 表示一个矢量场 $X\in\mathscr{X}_\Gamma$，有

$$X=\tau\Gamma+\mu^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\Gamma(\mu^i)\frac{\partial}{\partial v^i} \tag{6.6}$$

而一个 1 形式 $\alpha\in\mathscr{X}_\Gamma^*$ 用对偶基 $\{dt,\ \theta^i=dq^i-v^i dt,\ \phi^i=dv^i-\Lambda^i dt\}$ 表示为

$$\alpha=\alpha_i\phi^i+\Gamma(\alpha_i)\theta^i+\tau dt \tag{6.7}$$

定义 7 若对于 1 形式 $\alpha\in\mathscr{X}_\Gamma^*$ 有$L_\Gamma\alpha\in\mathscr{X}_\Gamma^*$，则称此 1 形式 $\alpha\in\mathscr{X}_\Gamma^*$ 为 $R\times TM$ 上的矢量场 Γ 的一个伴随对称性.

从这个定义可以看出，Sarlet 等是希望从对偶空间的某种不变性导致运动积分. 经典的 Lie 对称性、Noether 对称性等都是考虑的矢量场的对称性，而 Sarlet 等提出的伴随对称性考虑的是流形上微分形式的不变性，因而是传统对称性研究上的一个突破，为研究对称性注入了新的思想.

根据伴随对称性的定义和 $\mathscr{X}_\Gamma^*$ 上 1 形式的表达式 (6.7)，有

$$L_\Gamma\alpha=\left(2\Gamma(\alpha_i)+\alpha_j\frac{\partial\Lambda^j}{\partial v^i}\right)\phi^i+\left(\Gamma\Gamma(\alpha_i)+\alpha_j\frac{\partial\Lambda^j}{\partial q^i}\right)\theta^i+\Gamma(\tau)dt \tag{6.8}$$

故要 $L_\Gamma\alpha\in\mathscr{X}_\Gamma^*$，则充分必要条件是

$$\Gamma\Gamma(\alpha_i)+\Gamma\left(\alpha_j\frac{\partial\Lambda^j}{\partial v^i}\right)-\alpha_j\frac{\partial\Lambda^j}{\partial q^i}=0 \tag{6.9}$$

因此，一个 1 形式 $\alpha\in\mathscr{X}_\Gamma^*$ 为 Γ 的伴随对称性必须满足上面这组关于 α_i 的二阶偏微分方程组，我们称 (6.9) 为伴随方程组. 通过求解 (6.9) 可确定Γ的一个伴随对称性，特殊的伴随对称性与其他对称性类似地可导致力学系统的积分不变量，对此我们有如下定理.

定理 设 $\alpha\in\mathscr{X}_\Gamma^*$ 是 Γ 的伴随对称性，且满足

$$L_\Gamma S(\alpha)=dF \tag{6.10}$$

其中 $F\in C^\infty(M)$，则 F 是力学系统的一个首次积分。

证明这个定理要用到一些较深知识，在此略去，下面我们看一个例子。

考虑著名的 Emden 方程

$$\ddot{q}=-\frac{2}{t}\dot{q}-q^5 \tag{6.11}$$

用 a 表示 1 形式 α 中 dv 前的系数，则相应的伴随方程为

$$\Gamma^2(a)+\Gamma\left(-\frac{2}{t}a\right)+5aq^4=0 \tag{6.12}$$

则可求得

$$a=2t^3v+t^2q \tag{6.13}$$

且有

$$L_\Gamma S(\alpha)=d\left[t^3\left(v^2+\frac{1}{3}q^6\right)+t^2qv\right] \tag{6.14}$$

由首次积分存在定理知

$$F=t^3\left(v^2+\frac{1}{3}q^6\right)+t^2qv \tag{6.15}$$

(6.15) 是著名的 Emden 方程的一个众所周知的首次积分。

伴随对称性对系统是否为保守系统没有要求，也不要求系统有 Lagrange 函数，因而具有广泛的适用性。应当注意，在一般情况下，对于矢量场 Γ，伴随对称性通常不能导致动力学对称性，但对 Lagrange 系统是一个例外。

7 几种对称性概念关于非保守系统的推广

在上面讨论的 5 种对称性中，拟对称性和伴随对称性均适用于非保守系统。在这里我们给出前 3 种在非保守系统中的推广，其中高阶 Noether 对称性和 Lie 对称性的推广是我们得到的，我们也是首次在这里报告。

7.1 Noether 对称性的推广　Cantrijn[5] 用现代微分几何方法讨论了非保守力学系统的不变量。首先定义一个动力学 2 形式 Ω 为

$$\Omega=d\theta+Q_i dq^i\wedge dt \tag{7.1}$$

其中 θ 为 (2.1) 表示的 Cartan 形式，Q_i 为非保守的广义力。

定义 8　若对于矢量场 $Y\in\mathscr{X}(R\times TM)$ 满足

$$d(i_Y\Omega)=0 \tag{7.2}$$

则称 Y 为 Γ 的一个广义 Noether 对称性。对于广义 Noether 对称性，有

$$L_Y d\theta=-di_Y\mu \tag{7.3}$$

因而由 Poincaré 引理有

$$L_Y\theta=-i_Y\mu+dg \tag{7.4}$$

其中 $\mu=Q_idq^i\wedge dt$。上式写成显式即为广义 Killing 方程组。

相应于广义 Noether 对称矢量场 Y，力学系统的积分不变量为

$$G=g-i_Y\theta=g-\left[\tau L+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}(\xi^i-\dot{q}^i\tau)\right] \tag{7.5}$$

应当注意，广义 Noether 对称矢量场的要求 $d(i_Y\Omega)=0$ 与 Noether 对称性的要求 $L_Y d\theta=0$ 类似地可以进一步地削弱，从而可给出高阶 Noether 对称性对非保守系统的推广。

7.2 高阶 Noether 对称性的推广

定义 9 若矢量场 $Y\in\mathscr{X}(R\times TM)$ 满足

$$d(L_Y^k i_Y\Omega)=0 \tag{7.6}$$

而对于 $l<k$ 有 $d(L_Y^l i_Y\Omega)\neq 0$，则称矢量场Y为Γ的一个广义的 $k+1$ 阶 Noether 对称矢量场（其中 $L_Y^k=L_Y L_Y^{k-1}$）。

定理 对于满足（7.6）的每一个 $k+1$ 阶 Noether 矢量场 Y，当微分流形M具有足够好的拓扑性质时，若满足

$$L_Y^k i_Y\Omega=dG \tag{7.7}$$

则G为动力学系统Γ的一个首次积分。

此定理的证明可类似于 Poincaré 引理的逆命题的证明[15]。下面我们给出G的形式。

由公式，我们有

$$L_Y\Omega=i_Y d\Omega+di_Y\Omega=i_Y d\mu+di_Y\Omega$$

$$L_Y L_Y\Omega=L_Y i_Y d\mu+L_Y di_Y\Omega=L_Y i_Y d\mu+d(L_Y i_Y\Omega)$$

$$\cdots\cdots$$

$$L_Y^{k+1}\Omega=L_Y^k i_Y d\mu+d(L_Y^k i_Y\Omega) \tag{7.8}$$

考虑到（7.5），则有

$$L_Y^{k+1}\Omega=L_Y^k i_Y d\mu \tag{7.9}$$

又由于

$$L_Y^{k+1}\Omega=L_Y^{k+1}(d\theta+\mu)=L_Y^{k+1}d\theta+L_Y^k(di_Y\mu+i_Y d\mu) \tag{7.10}$$

故有

$$L_Y^{k+1}d\theta=-L_Y^k di_Y\mu \tag{7.11}$$

利用 Poincaré 引理，有

$$L_Y^{k+1}\theta=-L_Y^k i_Y\mu+dg \tag{7.12}$$

其中 $g\in C^\infty(R\times TM)$。

定理 若Y是一个广义 $k+1$ 阶 Noether 对称矢量场，则Γ的首次积分

$$G=g-L_Y^k\langle Y,\theta\rangle \tag{7.13}$$

其中 g 由（7.12）确定。

证 由公式易得

$$i_Y dL_Y^k\theta+di_Y L_Y^k\theta=-L_Y^k i_Y\mu+dg \tag{7.14}$$

因而有

$$di_Y L_Y^k\theta=-L_Y^k i_Y\Omega+dg \tag{7.15}$$

综合（7.7）和（7.15）有

$$di_Y L_Y^k\theta=-dG+dg \tag{7.16}$$

因而（7.13）成立。证毕。

前面我们曾经说过，高阶 Noether 对称性可通过一个（1,1）型张量场转化为一个通常的 Noether 对称性，但这一结论只对于完整保守的力学系统成立。对于完整非保守系统，相应

于广义 $k+1$ 阶 Noether 对称矢量场 Y，给出一个（1,1）型张量场 $R_Y^{(k)}$，

$$i_{R_Y(X)}\,d\theta = i_X(L_Y^k d\theta) \tag{7.17}$$

$$\langle R_Y^{(k)}(X), dt\rangle = 0 \tag{7.18}$$

由于

$$L_{R_Y^{(k)}(Y)}d\theta = L_Y^{k+1}d\theta \tag{7.19}$$

考虑（7.11）后可得

$$L_{R_Y^{(k)}(Y)}d\theta = -L_Y^k\, d i_Y\mu \neq -d i_Y\mu \tag{7.20}$$

故对于非保守系统，上面的（1,1）型张量场不能把一个广义 $k+1$ 阶对称性进行转化.

7.3 Lie 对称性的推广　假设无穷小单参数变换群为

$$t \to T = t + \varepsilon\tau(t,q,\dot q) \tag{7.21}$$

$$q^i \to Q^i = q^i + \varepsilon\xi^i(t,q,\dot q) \tag{7.22}$$

而非保守系统的运动微分方程为

$$\ddot q^i = \alpha^i(t,q,\dot q) \tag{7.23}$$

若无穷小变换的生成子满足

$$\ddot\xi^i - \dot q^i\ddot\tau - 2\dot\tau\alpha^i = E(\alpha^i) \tag{7.24}$$

其中矢量场 E 仍由（4.5）确定，则对应的矢量场

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i\frac{\partial}{\partial q^i} + (\dot\xi^i - \dot\tau\dot q)\frac{\partial}{\partial \dot q^i} \tag{7.25}$$

称为广义 Lie 对称矢量场.

由（7.24）解得 ξ^i,τ 后，代入结构方程

$$E(L) + \dot\tau L + Q_i(\xi^i - \tau\dot q^i) = \dot f \tag{7.26}$$

求得规范函数 f 后，则对应于 Lie 对称矢量场 Y 的力学系统的积分不变量为

$$\Phi = f - \left[\tau L + \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}(\xi^i - \dot q^i\tau)\right] \tag{7.27}$$

其中 L 为非保守系统对应于保守部分的 Lagrange 函数，Q_i 为非保守广义力.

8 非完整系统 Noether 对称性概述

李子平[37]讨论了线性非完整约束下的 Noether 对称性问题，非完整系统的对称性研究也就从此开始. 赵跃宇[38]研究了变质量非完整系统的 Noether 定理，他的作法是把变质量系统的作用量泛函归结为常质量系统的泛函形式；赵世腾[40]从几何角度研究了非完整系统的微分几何结构，得到了约束嵌入型的非完整系统的 Noether 定理，并给出了 Appell 问题的一个守恒量；罗勇和赵跃宇[35,39]研究了非保守的非线性完整约束系统的 Noether 定理；Bahar 和 Kwatny[30]也研究了非完整非保守系统的 Noether 定理，他们的结果首次给出了非变分形式的 Noether 守恒量. 以上结果对非完整系统 Noether 对称性研究起了较大的推动作用，但所得结论并非十分完美.

刘端[44]研究了非完整非保守系统的 Noether 对称性，给出了一个比较好的结果；赵跃宇[43]发表了一个更为一般的结果，得到了高阶非完整非保守力学系统的 Noether 定理，这也是首次揭示高阶非完整系统的守恒量的存在性，并得到了 Appell 例子的四个独立的第一积分；刘端[45]通过引进准对称性的概念研究了一般非完整非保守动力学系统的 Noether 定

理及逆定理. 至此，关于非完整系统的 Noether 对称性研究中的基本问题可以说已经基本解决.

纵观非完整系统守恒量的研究，可以发现，只要有非保守问题的守恒量的结果，则其相应结果从理论上说是不难推广到非完整系统的，推广到变质量动力学系统或相对论性动力学系统的结果就更为简单. 因而问题的关键在于非保守，而从保守到非保守的推广看来简单，实则有较大的困难. 有的非完整系统的其他积分理论的研究也有类似的情形. 关于非完整系统的积分理论研究的详细情况可参见最近梅凤翔[36]的综述文章.

9 结 语

力学系统的对称性和守恒量的研究对运动的物理解释起着重要的作用. 随着认识的不断深入，各种对称性概念也接连涌现，现在已是我们深入讨论各种对称性概念的时候了.

从上面的综述可见，对称性的研究经历了从作用量泛函的不变性到运动微分方程的不变性、从流形上矢量场的不变性到微分形式的不变性的过程，并且可以看出，对于完整保守系统和非完整非保守系统，不论是 Noether 对称性、广义 Noether 对称性还是 Lie 对称性，尽管得到 Noether 守恒量的条件有些差异，但最终表达式都是

$$G=f-\left[L\tau+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{i}}(\xi^{i}-\dot{q}^{i}\tau)\right]$$

这是很有趣的也是令人费解的一点.

参 考 文 献

1 Abraham R, Marsden J E. Foundations of Mechanics. Benjamin/Cummings (1978)
2 Caviglia G. *J. Math. Phys.*, **27** (1986) : 972—978
3 Katzin G H, Levine J. *ibid*, **26** (1985) : 3080—3099
4 Sarlet W, Cantrijn F. *SIAM Rev.*, **23** (1981) : 467—494
5 Cantrijn F. *J. Math. Phys.*, **23** (1982) : 1589—1595
6 Sarlet W, Cantrijn F. *J. Phys. A: Math.* Gen., **14** (1981) : 479—492
7 Tamizhmani K. M, Annamalai A. *ibid*, **23** (1990) : 2835—2845
8 Sen T, Tabor M. *Physica D*, **44** (1990) : 313—339
9 Sahadeven R, Lakshmanan M. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **19** (1986) : 949—954
10 Lakshmanan M, Sahadeven R. *J. Math. Phys.*, **32** (1991) : 75—83
11 Soares Neto J J, Vianna J D M. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21** (1988) : 2487—2490
12 Sarlet W, Cantrijn F, Crampin M. *ibid*, **20** (1987) : 1365—1376
13 ——, Prince G E, Crampin M. *ibid*, **23** (1990) : 1335—1347
14 Thompson G. *ibid*, **19** (1986) : 105—110
15 Westenholz C von. Differential Forms in Mathematical Physics. North-Holland (1981)
16 Arnold V I. Mathematical Methods in Classical Mechanics. S-V (1978)
17 Curtis W D, Miller F R. Differential Manifolds and Theoretical Physics. Academic Press (1985)
18 Meinhardt J. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **14** (1981) : 1893—1914
19 Lutzky M. *ibid*, **11** (1978) : 249—258
20 ——. *ibid*, **12** (1979) : 973—981
21 Crampin M. *ibid*, **16** (1983) : 3755—3772
22 Sarlet W, Crampin M. *ibid*, **18** (1985) : 563—565
23 Lutzky M. *ibid*, **15** (1982) : 87—91
24 Sarlet W, Cantrijn F, Crampin M. *ibid*, **17** (1984) : 1999—2009
25 Leach P G L, Gorringe V M. *ibid*, **23** (1990) : 2765—2774
26 Ferrario C, Passerini A. *ibid*, **24** (1991) : 261—267
27 Noether E. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Gottigen, *Math. Phys.*, *K*1 (1918) : 235—257
28 Djukic Dj S, Vujanovic B Dj. *Acta Mechanica*, **23** (1975) : 17—27

29 Vujanovic B D. *ibid*, **65** (1986) : 8
30 Bahar L K, Kwatny H G. *Int. J. Non-linear Mech.*, **22** ((1987) : 125—138
31 Li Ziping, Li Xin. *Int. J. of Theor. Phys.*, **29** (1990) : 765—772
32 Prince G E, Eliezer C J. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **14** (1981) : 587—596
33 Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equation. Springer (1986)
34 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京工业学院出版社 (1985)
35 ——. 非完整动力学研究. 北京工业学院出版社 (1987)
36 ——. 力学进展, **21** (1991) : 83—95
37 李子平. 物理学报, 12 (1981) : 1659—1671
38 赵跃宇. 变质量非完整系统的 Noether 定理, 湖南省力学学会首届年会 (1984)
39 罗勇, 赵跃宇. 北京工业学院学报, 3 (1986) : 41—47
40 赵世鹰. 应用数学与力学, 7 (1986) : 847—860
41 赵跃宇. 湘潭大学自然科学学报, 2 (1989) : 26—30
42 ——. 湘潭大学自然科学学报, 1 (1991) : 43—50
43 ——. 黄淮学刊, 1 (1990)
44 刘端. 力学学报, **21** (1989) : 75—83
45 刘端. 中国科学 (A) , 11 (1990) : 1189—1197
46 赵跃宇. 非保守力学系统的 Lie 对称性与守恒量 (待发表)
47 曹大卫, 何华灿, 张国旗. 中国科学 (A) , 6 (1991) : 653—672

ON SYMMETRY AND INVARIANT OF DYNAMICAL SYSTEMS

Zhao Yue-yu
Xiangtan University

Mei Feng-xiang
Beijing Institute of Technology

Abstract In this paper, we review the research results published in recent ten years on symmetry and invariant of dynamical systems, including generalized Noether symmetries, higher-order Noether symmetries, Lie symmetries, pseudo-symmetries and adjoint symmetries. We also present here for the first time our research results on higher-order Noether symmetries and Lie symmetries for nonconservative dynamical systems.

Keywords *dynamical system; invariant; symmetry; differential manifold; form calculus*