第23卷 第2期 力学进展 Vol. 23 №. 2
1993年5月25日 ADVANCES IN MECHANICS May 25, 1993

四元数方法及其应用*

肖尚彬
西北工业大学，西安（邮政编码710072）

提要 本文全面地评述了四元数方法及其在现代科学技术中的应用，指出四元数具有其他定位参数和变换算子的综合优点和综合功能，不仅在刚体动力学中有广泛的用途，而且在一般多体系统的力学分析和控制中也有极其广阔的应用前景．

关键词 四元数；定位参数；变换算子；多体系统

1 引言——古典方法的新发展

四元数的数学概念是1843年首先由Hamilton提出的．1833年起Hamilton开始研究他所建立的四元数理论，目的是为研究空间矢量找到类似解决平面问题中使用的复数方法．但是，四元数最初只是在刚体定位问题中得到某些简单应用，未能解决任何工程技术中的实际问题，因而在整整一个世纪中基本上没有得到发展．本世纪中叶以来，由于现代科学技术的发展，如现代控制理论、计算机科学、高速车辆、运载工具、复杂机械等工业技术，尤其是航天技术和机器人工业的飞速发展，作为研究刚体和多刚体系统运动最有效的工具，四元数才重新被人们所重视．

四元数既代表一个转动，又可作为变换算子，一身二任．它不仅具有其他定位参数的综合优点，比如方程无奇性，线性程度高，计算时间省，计算误差小，乘法可交换等许多优点，而且由于其表达形式的多样性，它还具有其他变换算法的综合功能，比如矢量算法、复数算法、指数算法、矩阵算法、对偶数算法等．因而它在陀螺实用理论、捷联式惯性导航、机器与机构、机器人技术、多体系统力学、人造卫星姿态控制等领域中的应用越来越广．从近20年来国外公开发表的文献看，绝大多数是用于位置和姿态的计算和控制的，而用于运动分析特别是线运动分析的极少[1,7-10]；至于如何将四元数方法引进刚体动力学，则更为罕见[2-5]．国内的研究主要在80年代，始于几个航空院校，特点是将四元数用于多体力学方面有突破性进展，发表的论文在大型国际学术会议和著名国际科技文摘上受到重视[17,18,20]．

2 四元数作为定位参数的优越性

确定一个刚体在空间的位置和姿态的方法很多，基本的数学工具是矢径（位置描述）和

* 航空航天部科学基金资助课题，

方位矩阵（姿态描述），常用的定位参数有方向余弦、欧拉角、欧拉参数、四元数、齐次坐标、旋量等．用方向余弦和欧拉角只能确定刚体的姿态，前者需用 9 个参数 C_{ij}（$i,j=1,2,3$），后者只需 3 个独立参数 ϕ,θ,φ 或 α,β,γ．与 9 参数的方向余弦不同，四元数所用参数是 4 个，它们之间只有 1 个约束方程，而方向余弦之间则有 6 个约束方程；与 3 参数的欧拉角不同，四元数不论刚体处于任何状态都不会退化，所得到的方程组线性化程度高，而欧拉角则出现三角函数项且存在奇点．

四元数是由 1 个实数单位 I 和 3 个虚数单位 $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3$ 组成的包含 4 个实元的超复数，其表达形式多种多样，基本形式是解析式

$$A=\lambda_0 I+\lambda_1\mathbf{i}_1+\lambda_2\mathbf{i}_2+\lambda_3\mathbf{i}_3 \tag{2.1}$$

这里，$I,\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3$ 统称四元数的单位数，其中，I 具有普通标量的性质，可以省去不写；$\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3$ 既具有复数的性质，又具有矢量的性质．如果将 $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3$ 看成某个正交基的基矢量，则（2.1）中的后 3 项可以合成为一个矢量 $\boldsymbol{\lambda}$，于是，四元数又可记作一个标量与一个矢量之和的形式：

$$A=\lambda_0+\boldsymbol{\lambda} \tag{2.2}$$

为了便于确定刚体的姿态，常采用 Rodrigues-Hamilton 参数作为四元数的 4 个实元．R-H 参数 λ_0,λ_j（$j=1,2,3$）与欧拉参数 θ,n_j（$j=1,2,3$）之间有如下关系：

$$\lambda_0=\cos(\theta/2),\quad \lambda_j=n_j\sin(\theta/2)\quad (j=1,2,3) \tag{2.3}$$

于是四元数又可记作复数式

$$A=\cos(\theta/2)+\mathbf{n}\sin(\theta/2) \tag{2.4}$$

其中，$\mathbf{n}$ 是沿欧拉转轴（瞬时轴）的单位矢，其 3 个方向余弦即为 $n_j(j=1,2,3)$，θ 则是绕欧拉转轴的角位移．根据著名的欧拉公式，上式可写为指数式

$$A=\exp(\mathbf{n}\,\theta/2) \tag{2.5}$$

由 Rodrigues-Hamilton 参数组成的四元数称为特征四元数，其 4 个元满足归一化条件

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1 \tag{2.6}$$

为了便于计算，四元数还可表示为 4×1 列阵和 4×4 方阵形式

$$\{A\}=[\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]^T \tag{2.7}$$

$$[A]=\begin{bmatrix}\lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3\\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1\\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

普通矢量可看成是 $\lambda_0=0$ 时四元数的特例，比如确定点位置的矢径 $\mathbf{R}$，其四元数映像记作

$$R=0+\mathbf{R} \tag{2.9}$$

于是四元数不仅可以确定姿态，而且可以确定位置．方向余弦和欧拉角则只能确定姿态．

四元数的加法以及同标量的乘法均服从一般代数运算规则，同普通矢量的算法完全一样，遵循交换律、结合律和分配律．但四元数乘法则遵循特殊的运算规则，以单位数的自乘和交乘规则为基础：

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{i}_1\circ\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_2\circ\mathbf{i}_2=\mathbf{i}_3\circ\mathbf{i}_3=-1, & \mathbf{i}_2\circ\mathbf{i}_3=-\mathbf{i}_3\circ\mathbf{i}_2=\mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_3\circ\mathbf{i}_1=-\mathbf{i}_1\circ\mathbf{i}_3=\mathbf{i}_2, & \mathbf{i}_1\circ\mathbf{i}_2=-\mathbf{i}_2\circ\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_3 \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

设有两个四元数

$$\left.\begin{array}{l} P=p_0+p_1\mathbf{i}_1+p_2\mathbf{i}_2+p_3\mathbf{i}_3=p_0+\mathbf{p} \\ Q=q_0+q_1\mathbf{i}_1+q_2\mathbf{i}_2+q_3\mathbf{i}_3=q_0+\mathbf{q} \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

其乘积按单位数的自乘和交乘规则计算，结果仍为四元数，经合并后简写为

$$\Lambda=P\circ Q=(p_0q_0-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})+(p_0\mathbf{q}+q_0\mathbf{p}+\mathbf{p}\times\mathbf{q}) \tag{2.12}$$

上式也可写为矩阵式

$$\{\Lambda\}=[P]\{Q\} \tag{2.13}$$

由此可见，四元数乘法具有下列重要性质：①四元数乘法综合了4种乘法：标量与标量，标量与矢量，矢量的点乘，矢量的叉乘。②四元数乘法服从结合律和对加法的分配律。③四元数乘法不服从交换律，因为乘积中包含矢积部分，而矢积是不可交换的。④当因子循环置换时，四元数乘积的标量部分不变。

普通矢量可看成零标量四元数，当然也服从四元数的乘法规则。我们来作两个矢量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 的四元数乘积，为此只须在（2.12）中令 $p_0=0$，$q_0=0$，立即得到

$$\mathbf{p}\circ\mathbf{q}=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{p}\times\mathbf{q} \tag{2.14}$$

可见，普通矢量空间对四元数乘法不封闭，两个矢量的四元数乘积已不再是矢量，而是一个新的四元数。

综上所述，四元数作为定位参数，其表达形式变化多端，有解析式（2.1），矢量式（2.2），复数式（2.4），指数式（2.5），列阵式（2.7），方阵式（2.8）等。不像其他参数，表达形式基本上是单一的。四元数本身代表转动，又能表示移动，如再引进对偶数记法，则四元数也具有齐次坐标的特点，将转动和移动融为一体。四元数代数与普通代数运算不同之处在于，它巧妙而成功地规定了其特殊的乘法规则，由于有了这种规则，四元数代数便包括实数代数、复数代数以及3维矢量代数。因此可以说，四元数作为定位参数，综合了其他参数的优点，形成了自己独特的性质。

3 四元数作为变换算子的多功能

与四元数表达形式的多样性相对应，四元数作为变换算子，综合了其他变换算法的多种功能。四元数特定的乘法规则使我们能够以简便的形式来表示空间中的有限转动及其变换，这种表示是以如下基本定理为依据。

旋转变换定理 令 Λ 和 R 均为非标量四元数，设以 Λ 对 R 进行变换，有关系式

$$R'=\Lambda\circ R\circ\Lambda^{-1} \tag{3.1}$$

变换后的 R' 仍为四元数，其范数（大小）和标量部分 $S(R')$ 仍等于变换前 R 的范数和标量部分 $S(R)$；变换算子为 $\Lambda\circ(\ )\circ\Lambda^{-1}$，它使 R 的矢量部分 $\mathbf{V}(R)$ 绕轴 $\mathbf{V}(\Lambda)$ 沿锥面旋转2倍角 Λ，便得到 R' 的矢量部分 $\mathbf{V}(R')$。

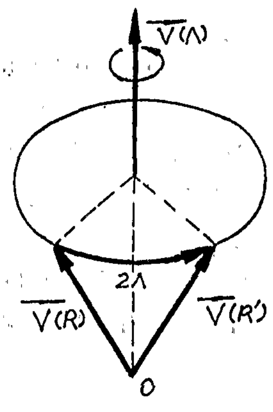

图 1

对于特征四元数，其逆 Λ^{-1} 等于其共轭 $\tilde{\Lambda}$，因而（3.1）

变为

$$R' = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda} \tag{3.2}$$

以上变换算子由四元数 Λ 及其共轭 $\tilde{\Lambda}$ 从 R 的左、右两边夹乘而构成，是四元数变换算子的基本形式，称为双边算子．双边算子可以用下列全角算子构成：

$$\Lambda = \cos\theta + (\boldsymbol{\lambda}/|\lambda|)\sin\theta, \qquad \tilde{\Lambda} = \cos\theta - (\boldsymbol{\lambda}/|\lambda|)\sin\theta \tag{3.3}$$

一般常用半角算子

$$\Lambda = \cos(\theta/2) + (\boldsymbol{\lambda}/|\lambda|)\sin(\theta/2), \quad \tilde{\Lambda} = \cos(\theta/2) - (\boldsymbol{\lambda}/|\lambda|)\sin(\theta/2) \tag{3.4}$$

全角算子使 R 绕轴 $\mathrm{V}(\Lambda) = \boldsymbol{\lambda}$ 沿锥面旋转 2 倍角 2θ 到达 R'；半角算子使 R 绕 $\boldsymbol{\lambda}$ 旋转 2 倍角 $2(\theta/2) = \theta$ 到达 R'，可见半角算子具有优越性．为了便于上机，可将（3.2）写成矩阵形式，为此再引进

$$[\tilde{\Lambda}]^* = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

则得从 I 系到 J 系的矩阵形式的变换式

$$\{R^J\} = [\Lambda][\tilde{\Lambda}]^*\{R^I\} \tag{3.6}$$

上面我们已经引进了两个四元数方阵 $[\Lambda]$，$[\tilde{\Lambda}]^*$．为求逆变换，尚需再引进两个方阵 $[\tilde{\Lambda}]$，$[\Lambda]^*$，这里从略．其中不带 * 号的称为四元数（共轭四元数）矩阵，带 * 号的称为对应四元数（共轭四元数）的蜕变矩阵．二者不同之处仅在于右下角的 3 阶子矩阵，其非对角元素的符号相反．比较（3.6）与（3.2）右端相乘因子的次序，可以看出，引进带 * 号的蜕变矩阵使四元数的乘法具有可易性，而其他参数则不具有此种特性．

一般说来，四元数的乘法不服从交换律，但如采用四元数矩阵乘法则可以交换，当然，这种可易性是有条件的．不难直接从上述 4 种四元数方阵验证如下可易性条件[10]：

①均带 * 号或均不带 * 号的同名矩阵相乘，其次序不可交换，即有不等式

$$[P][Q] \neq [Q][P], \quad [P]^*[Q]^* \neq [Q]^*[P]^* \tag{3.7}$$

②一带 * 号一不带 * 号的异名矩阵相乘，其次序可以交换，即有等式

$$[P][Q]^* = [Q]^*[P] \tag{3.8}$$

③互为共轭的同名矩阵相乘，其积为单位矩阵，次序可以交换，即有等式

$$[\Lambda][\tilde{\Lambda}] = [\tilde{\Lambda}][\Lambda], \quad [\Lambda]^*[\tilde{\Lambda}]^* = [\tilde{\Lambda}]^*[\Lambda]^* \tag{3.9}$$

为了节省机时，最好将相乘的四元数因子中的最后一个取为列阵形式，前面的因子均取方阵形式．这样一来，就更能显示四元数矩阵乘法的优越性：它可将服从乘法次序的四元数改变其相乘顺序，将变化最大的因子隔离出来，以列阵形式放在最后，而将其他不变化或变化较小的因子以方阵形式加以存储．

现在我们介绍四元数单边变换算子[9,10]．为此首先作两个单位矢量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 的四元数乘积

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\cos\theta - \mathbf{s}\sin\theta) \tag{3.10}$$

$$\mathbf{b}\circ\mathbf{a} = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\cos\theta + \mathbf{s}\sin\theta) \tag{3.11}$$

构成四元数单边旋转算子

$$D = \cos\theta + \mathrm{s}\sin\theta, \quad \tilde{D} = \cos\theta - \mathrm{s}\sin\theta \tag{3.12}$$

旋转算子的变换式为

$$\mathrm{b} = D \circ \mathrm{a} = \mathrm{a} \circ \tilde{D} \tag{3.13}$$

$$\mathrm{a} = \mathrm{b} \circ D = \tilde{D} \circ \mathrm{b} \tag{3.14}$$

适用于平面情形，转轴 $\mathrm{s} \parallel \mathrm{a} \times \mathrm{b}$。

再作两个单位旋量 $\hat{\mathrm{a}} = \mathrm{a} + \epsilon \mathrm{a}^0$， $\hat{\mathrm{b}} = \mathrm{b} + \epsilon \mathrm{b}^0$ （$\mathrm{a}^0 = \mathrm{r}_a \times \mathrm{a}$， $\mathrm{b}^0 = \mathrm{r}_b \times \mathrm{b}$）的四元数乘积

$$\hat{\mathrm{a}} \circ \hat{\mathrm{b}} = -\hat{\mathrm{a}} \cdot \hat{\mathrm{b}} + \hat{\mathrm{a}} \times \hat{\mathrm{b}} = -(\cos\hat{\theta} - \hat{\mathrm{s}}\sin\hat{\theta}) \tag{3.15}$$

$$\hat{\mathrm{b}} \circ \hat{\mathrm{a}} = -\hat{\mathrm{b}} \cdot \hat{\mathrm{a}} + \hat{\mathrm{b}} \times \hat{\mathrm{a}} = -(\cos\hat{\theta} + \hat{\mathrm{s}}\sin\hat{\theta}) \tag{3.16}$$

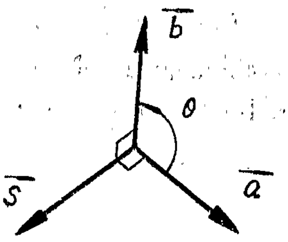

图 2

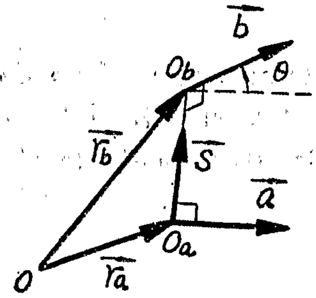

图 3

构成四元数单边螺旋算子

$$\hat{D} = \cos\hat{\theta} + \hat{\mathrm{s}}\sin\hat{\theta}, \quad \tilde{\hat{D}} = \cos\hat{\theta} - \hat{\mathrm{s}}\sin\hat{\theta} \tag{3.17}$$

螺旋算子的变换式为

$$\hat{\mathrm{b}} = \hat{D} \circ \hat{\mathrm{a}} = \hat{\mathrm{a}} \circ \tilde{\hat{D}} \tag{3.18}$$

$$\hat{\mathrm{a}} = \hat{\mathrm{b}} \circ \hat{D} = \tilde{\hat{D}} \circ \hat{\mathrm{b}} \tag{3.19}$$

螺旋算子融平移变换和旋转变换为一体，适用于刚体的一般运动。(3.18)，(3.19) 从形式和算法上统一了多刚体系统的各种变换，由此可以方便地导出其他一切形式的变换式。

综上所述，四元数变换算子形式多样，功能齐全，计有半角算子与全角算子、单边算子与双边算子、旋转算子与螺旋算子、矢量算子与矩阵算子，等等。

4 四元数在多体系统运动学中的应用

首先介绍刚性开链系统运动学。为简单起见，设刚体 J 在参考系 I 中绕基点转动，四元数形式的运动学方程可写为

$$\omega = 2\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} \tag{4.1}$$

其矩阵形式记为

$$\{\omega\} = 2[\tilde{\Lambda}]^*\{\dot{\Lambda}\} \tag{4.2}$$

式中，$\{\omega\}$ 是 4×1 列阵，其第一元素为 0；$[\dot{\tilde{A}}]^*$ 由（3.5）确定．为了便于求角加速度，去掉 $\{\omega\}$ 中第一个 0 元素和 $[\dot{\tilde{A}}]^*$ 中第一行，便得运动学方程的截短式

$$\{\boldsymbol{\omega}\}=2[\tilde{\bar{A}}]^*\{\dot{A}\} \tag{4.3}$$

这样一来，角加速度即可方便地求得如下：

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\{\dot{\boldsymbol{\omega}}\}=2[\widetilde{\bar{A}}]^*\{\ddot{A}\} \tag{4.4}$$

亦即在求导过程认为截短变换矩阵 $[\bar{A}]^*$ 是常值，而其他形式的运动学方程则无此优点．

刚体上固结点的线速度和线加速度可以如此求得：首先引进变换矩阵 $[B]$，令

$$[B]=[A][\tilde{A}]^* \tag{4.5}$$

（3.6）简写如下：

$$\{R^I\}=[B]\{R^J\} \tag{4.6}$$

然后采用两种变换观点以简化求导过程[18]．一种观点是，变换 $[B]$ 仅仅施行于坐标系，而连体矢量 R^J 只是跟随坐标系旋转，这就是被动变换．当采用此种变换对（4.6）求导时，认为变换矩阵 $[B]$ 是变化的，而 R^J 相对于 J 系的相对大小不变，于是得到

$$\{V^I\}=\{\dot{R}^I\}=[\dot{B}]\{R^J\} \tag{4.7}$$

$$\{a^I\}=\{\ddot{R}^I\}=[\ddot{B}]\{R^J\} \tag{4.8}$$

式中

$$[\dot{B}]=[\dot{A}][\tilde{A}]^*+[A][\dot{\tilde{A}}]^*=[B][\Omega^J] \tag{4.9}$$

$$[\ddot{B}]=[B][\dot{\Omega}^J]+[\dot{B}][\Omega^J]=[B]([\varepsilon^J]+[\Omega^J]^2) \tag{4.10}$$

另一种观点是，变换 $[B]$ 直接施行于矢量 R^J，而由 R^J 带动坐标系同步旋转，这就是主动变换．当采用此种变换对（4.6）求导时，认为变换矩阵 $[B]$ 不变，而 R^J 相对于 I 系的绝对大小是变化的，于是得到

$$\{V^I\}=\{\dot{R}^I\}=[B]\{\dot{R}^J\} \tag{4.11}$$

$$\{a^I\}=\{\ddot{R}^I\}=[B]\{\ddot{R}^J\} \tag{4.12}$$

式中

$$\{\dot{R}^J\}=\{V^J\}=[\Omega^J]\{R^J\} \tag{4.13}$$

$$\{\ddot{R}^J\}=\{a^J\}=[\dot{\Omega}^J]\{R^J\}+[\Omega^J]\{\dot{R}^J\}=([\varepsilon^J]+[\Omega^J]^2)\{R^J\} \tag{4.14}$$

刚性开链系统的速度和加速度分析可以如此进行：首先写出递推公式

$$\{R_i\}=[B_{ii}]\{R_i^{O_{i+1}}\}+[B_{i(i+1)}]\{R_{i+1}\} \tag{4.15}$$

式中，$[B_{ii}]$ 是 4×4 单位矩阵．

直接微分（4.15），便得构件上任一点（不限于固结点）的速度和加速度递推公式[20]

$$\{\dot{R}_i\}=[B_{ii}]\{\dot{R}_i^{O_{i+1}}\}+[\dot{B}_{i(i+1)}]\{R_{i+1}\}+[B_{i(i+1)}]\{\dot{R}_{i+1}\} \tag{4.16}$$

$$\{\ddot{R}_i\}=[B_{ii}]\{\ddot{R}_i^{O_{i+1}}\}+[\ddot{B}_{i(i+1)}]\{R_{i+1}\}+2[\dot{B}_{i(i+1)}]\{\dot{R}_{i+1}\}+[B_{i(i+1)}]\{\ddot{R}_{i+1}\} \tag{4.17}$$

式中

$$[\dot{B}_{i(i+1)}]=[B_{i(i+1)}][\Omega_{i+1}^{(i+1)i}]=[\Omega_{i}^{(i+1)i}][\dot{B}_{i(i+1)}] \tag{4.18}$$

$$[\ddot{B}_{i(i+1)}]=[B_{i(i+1)}]([\varepsilon_{i+1}^{(i+1)i}]+[\Omega_{i+1}^{(i+1)i}]^2)=([\varepsilon_{i}^{(i+1)i}]+[\Omega_{i}^{(i+1)i}]^2)[B_{i(i+1)}] \tag{4.19}$$

对于包括 O 刚体在内的 $n+1$ 构件开链系统，末端刚体 n 上任一点的位置、速度和加速度可根据上述递推公式分别写出如下：

$$\{R_o\}=\sum_{i=0}^{n-1}[B_{oi}]\{R_i^{O_{i+1}}\}+[B_{on}]\{R_n\} \tag{4.20}$$

$$\{\dot{R}_o\}=\sum_{i=0}^{n-1}([\dot{B}_{oi}]\{R_i^{O_{i+1}}\}+[B_{oi}]\{\dot{R}_i^{O_{i+1}}\})+[\dot{B}_{on}]\{R_n\}+[B_{on}]\{\dot{R}_n\} \tag{4.21}$$

$$\{\ddot{R}_o\}=\sum_{i=0}^{n-1}([\ddot{B}_{oi}]\{R_i^{O_{i+1}}\}+2[\dot{B}_{oi}]\{\dot{R}_i^{O_{i+1}}\}+[B_{oi}]\{\ddot{R}_i^{O_{i+1}}\})$$
$$+[\ddot{B}_{on}]\{R_n\}+2[\dot{B}_{on}]\{\dot{R}_n\}+[B_{on}]\{\ddot{R}_n\} \tag{4.22}$$

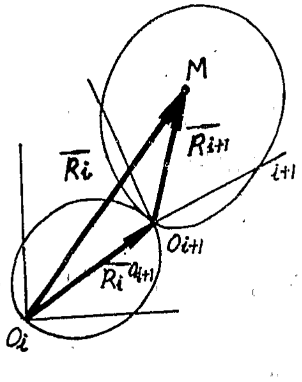

图 4

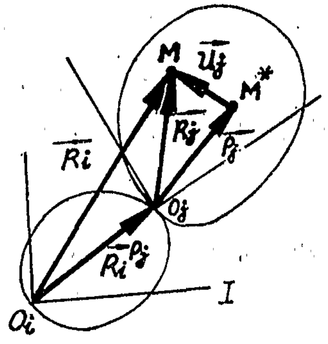

图 5

具体应用时，上式可以得到简化。如对于全回转副的机械手运动链，当选取 Denavit 坐标系求固结点的速度和加速度时，宜采用被动变换对（4.20）求导，此时 $\{\dot{R}\}=0$，$\{\ddot{R}\}=0$；对于带移动副的机械手运动链，宜采用主动变换对（4.20）求导，此时 $[\dot{B}]=0$，$[\ddot{B}]=0$。

现在来研究柔性系统。为简单起见，设关节是刚性的，构件是弹性的。首先写出弹性体 J 上任一点 M 在相邻两套坐标系中坐标之间的关系

$$\mathrm{R}_i=\mathrm{R}_i^{O_j}+\mathrm{R}_j=\mathrm{R}_i^{O_j}+\rho_j+\mathrm{u}_j \tag{4.23}$$

其中，ρ_j 是 M 点对应的未变形点 M^* 在 J 系中的位置矢，u_j 是 M^* 处的变形位移，这里变形是弹性变形。根据模态分析理论，u_j 可表示为

$$\mathrm{u}_j=\underline{\Psi}_j\underline{q}_j \tag{4.24}$$

令 ρ_j 在 J 系中的四元数映像为 R_{rj}，$\underline{\Psi}_j$ 在 J 系中的四元数映像为 R_{uj}，并令下标 $j=i+1$，

（4.23）可写为如下递推公式[22]：

$$\{R_i\}=[B_{ii}]\{R_i^{O_{i+1}}\}+[B_{i(i+1)}](\{R_{r(i+1)}\}+\{R_{u(i+1)}\}\underline{q}_{i+1}) \tag{4.25}$$

直接微分上式，便得物体 $i+1$ 上一点的速度和加速度递推公式

$$\begin{aligned}\{\dot{R}_i\}=&[B_{ii}]\{\dot{R}_i^{O_{i+1}}\}+[\dot{B}_{i(i+1)}](\{R_{r(i+1)}\}+\{R_{u(i+1)}\}\underline{q}_{i+1})\\&+[B_{i(i+1)}]\{R_{u(i+1)}\}\underline{\dot{q}}_{i+1}\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\{\ddot{R}_i\}=&[B_{ii}]\{\ddot{R}_i^{O_{i+1}}\}+[\ddot{B}_{i(i+1)}](\{R_{r(i+1)}\}+\{R_{u(i+1)}\}\underline{q}_{i+1})\\&+2[\dot{B}_{i(i+1)}]\{R_{u(i+1)}\}\underline{\dot{q}}_{i+1}+[B_{i(i+1)}]\{R_{u(i+1)}\}\underline{\ddot{q}}_{i+1}\end{aligned} \tag{4.27}$$

柔性机械链末端物体 n 上任一点的位置、速度和加速度可根据上述递推公式写出．

5　四元数在多体系统动力学中的应用

欧拉动力学方程适用于单刚体，是研究多刚体的基础．取连体主轴坐标系，具有如下循环置换形式：

$$I_1\dot{\omega}_1+(I_3-I_2)\omega_2\omega_3=M_1 \quad (1,2,3) \tag{5.1}$$

引进复合四元数

$$W=\Lambda\circ\dot{\Lambda}=(1/2)\omega' \tag{5.2}$$

这里的 ω' 是刚体角速度 ω 在连体主轴坐标系中的四元数映像，有 $\omega'=[0\ \omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^T$．取四元数矩阵截短式并代入（5.1）便得欧拉动力学方程的四元数形式

$$\dot{w}_i+k_1w_2w_3=m_i \quad (1,2,3) \tag{5.3}$$

推广欧拉动力学方程适用于框架陀螺，是一种简单的多刚体系统，其四元数形式为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{w}_1+\frac{2I_3}{I_1}w_2w_3-\frac{2I_2}{I_1}w'_3w_2=m_1\\&\dot{w}_2+\frac{2I_1}{I_2}w'_3w_1-\frac{2I_3}{I_2}w_1w_3=m_2\\&\dot{w}_3+\frac{2I_2}{I_3}w_1w_2-\frac{2I_1}{I_3}w_2w_1=m_3\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

式中，w'_3，$w'_2=w_2$，$w'_1=w_1$ 是赖柴轴系角速度分量所对应的复合四元数．这里只考虑了陀螺转子的质量，而略去了框架环的质量．

现在讨论由一个刚性卫星主体和沿主轴安装的 3 个飞轮组成的多刚体卫星模型．设 I_1，I_2，I_3 是卫星主体的主惯量矩；J_1，J_2，J_3 是 3 个飞轮的极惯量矩；h_1，h_2，h_3 是 3 个飞轮的极角动量；Ω_1，Ω_2，Ω_3 是主体角速度在主体主轴系上的投影．主体主轴坐标系 $x\,y\,z$ 与轨道坐标系 $x_r\,y_r\,z_r$ 之间的相对位置由偏差四元数 Λ 决定：

$$\Lambda=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\mathbf{n}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{5.5}$$

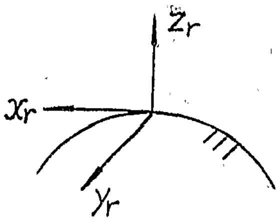

图 6

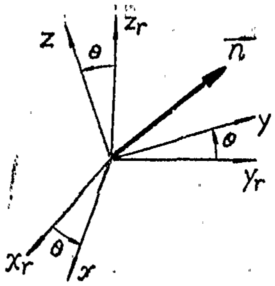

图 7

设系统不受外力矩作用，根据角动量定理

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{H}_b+\mathrm{H}_w)=0 \tag{5.6}$$

式中，H_b，H_w 分别是主体与飞轮的角动量．投影至主体主轴系，

$$I_1\dot{\Omega}_1+(I_3-I_2)\Omega_3\Omega_2+\dot{h}_1+h_3\Omega_2-h_2\Omega_3=0 \quad (1,2,3) \tag{5.7}$$

再由飞轮相对主体的角动量定理，

$$\dot{h}_i=u_i-J_i\dot{\Omega}_i \quad (i=1,2,3) \tag{5.8}$$

上式右端第 1 项是驱动马达作用于飞轮的力矩，第 2 项是主体运动产生的牵连惯性力矩．将上式代入（5.7），便得

$$(I_1-J_1)\dot{\Omega}_1+(I_3-I_2)\Omega_3\Omega_2+h_3\Omega_2-h_2\Omega_3=-u_1 \quad (1,2,3) \tag{5.9}$$

主体绝对角速度 $\mathbf{\Omega}=\boldsymbol{\omega}'+\boldsymbol{\omega}_0$，其中，主体相对轨道的角速度 $\boldsymbol{\omega}'$ 在主体主轴系上的投影为 ω'_1，ω'_2，ω'_3；轨道角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 即主体的牵连角速度在主体主轴系上的投影为

$$\begin{Bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)\\ 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2-\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1)\\ 2(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_3^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ -\omega_0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

系统角动量 $\mathbf{H}$ 守恒，其在主体主轴系上的投影，

$$H_i=I_i\Omega_i+h_i \quad (i=1,2,3) \tag{5.11}$$

于是，（5.11）最后可以写成如下形式：

$$(I_1-J_1)\dot{\Omega}_1=-H_3\Omega_2+H_2\Omega_3-u_1 \quad (1,2,3) \tag{5.12}$$

（5.12）和（5.8）即是所讨论的多刚体卫星的动力学方程组．

根据系统的结构型式，构造四元数关联矩阵和通路矩阵，容易将四元数方法用于一般树形多刚体系统的运动学分析和动力学建模[14,15]．再引进变形四元数即可研究柔性多体系统的力学问题．关于这一方面的研究尚待进一步发展．

6 四元数在惯性导航系统中的应用

在惯性导航系统中，四元数是多种姿态变换和控制算法中最佳的工具．

引进四套坐标系：$o_1\xi_s\eta_s\zeta_s$ 为惯性坐标系 I（不转），$o_1\xi\eta\zeta$ 为地球坐标系E（自转），$OENZ$为地理坐标系 F，$oxyz$为平台坐标系 P。现在来求地理坐标系的角速度变换。先求地理坐标系 F 对惯性坐标系 I 的绝对角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在地球坐标系 E 中的表现，并用角速度变换式将它转换至地理坐标系 F。$\boldsymbol{\omega}$ 在 E 中的投影为

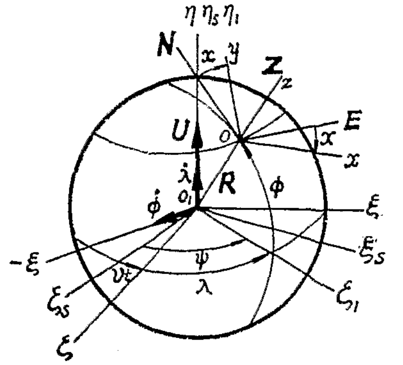

图 8

$$\left.\begin{aligned}\omega_\xi &= -\dot{\phi}\cos\lambda\\ \omega_\eta &= U+\dot{\lambda}\\ \omega_\zeta &= \dot{\phi}\sin\lambda\end{aligned}\right\}\tag{6.1}$$

式中，$\dot{\lambda}$，$\dot{\phi}$ 是经度、纬度变化率；U 是地球自转角速度。从 E 系至 F 系，经两个转动 λ 和 ϕ，其四元数为

$$\left.\begin{aligned}\{Q\} &= [c(\lambda/2) \quad 0 \quad s(\lambda/2) \quad 0\ ]^T\\ \{R\} &= [c(\phi/2) \quad -s(\phi/2) \quad 0 \quad 0\ ]^T\end{aligned}\right\}\tag{6.2}$$

合成转动四元数为

$$\{P\} = \{Q\circ R\} = [Q]\{R\}\tag{6.3}$$

现在将 $\boldsymbol{\omega}$ 从 E 系变换至 F 系：

$$\{\omega^F\} = \{\tilde{P}\circ\omega^E\circ P\} = [\tilde{P}][P]^*\{\omega^E\}\tag{6.4}$$

最后求得 $\boldsymbol{\omega}^F$ 的 3 个分量

$$\left.\begin{aligned}\omega_E &= -\dot{\phi}\\ \omega_N &= (U+\dot{\lambda})\cos\phi\\ \omega_Z &= (U+\dot{\lambda})\sin\phi\end{aligned}\right\}\tag{6.5}$$

我们来写出惯性导航的基本微分方程。设将平台稳定在水平面内，恒垂直于当地垂线。用 χ 表示平台方位角，平台相对 F 系的角速度 $\dot{\chi}$ 沿垂线 OZ 负向。平台绝对角速度在自身各轴上的投影如此求得：先将 F 系的角速度转换至 P 系，用 $\boldsymbol{\omega}^P(0,\ \omega'_x,\ \omega'_y,\ \omega'_z)$ 表示；再在所求得的 ω'_z 中加上 $-\dot{\chi}$ 即得。将 $\boldsymbol{\omega}^F$ 变换为 $\boldsymbol{\omega}^P$：

$$\begin{Bmatrix}0\\ \omega'_x\\ \omega'_y\\ \omega'_z\end{Bmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\chi & -\sin\chi & 0\\ 0 & \sin\chi & \cos\chi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ \omega_E\\ \omega_N\\ \omega_Z\end{Bmatrix}\tag{6.6}$$

平台绝对角速度投影为

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \omega'_x\\ \omega_y &= \omega'_y\\ \omega_z &= \omega'_z - \dot{\chi}\end{aligned}\right\}\tag{6.7}$$

将（6.6），（6.5）代入（6.7），最后得惯性导航的基本微分方程组

$$\left.\begin{aligned}&-\dot{\phi}\cos\chi-(U+\dot{\lambda})\cos\phi\sin\chi=\omega_x(t)\\ &-\dot{\phi}\sin\chi+(U+\dot{\lambda})\cos\phi\cos\chi=\omega_y(t)\\ &(U+\dot{\lambda})\sin\phi-\dot{\chi}=\omega_z(t)\end{aligned}\right\}\tag{6.8}$$

引进惯性Ⅰ系，其各轴在初始时分别与E系各轴重合．显然，这两套坐标系之间的转角为 Ut，于是角 $\phi = Ut + \lambda$，平台坐标系P相对Ⅰ系的位置由3个欧拉角 ϕ，ϕ，χ 确定．(6.8) 又可改写为

$$\left.\begin{aligned}&-\dot{\phi}\cos\chi-\dot{\phi}\cos\phi\ \sin\chi=\omega_x(t)\\&-\dot{\phi}\sin\chi+\dot{\phi}\cos\phi\ \cos\chi=\omega_y(t)\\&\dot{\phi}\sin\phi-\dot{\chi}=\omega_z(t)\end{aligned}\right\}\qquad(6.9)$$

对于平台式惯导系统，宜将平台绝对角速度分解为随地球的自转和相对地球的旋转，即有 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega}$．于是，(6.8) 可分解为两组方程

$$\left.\begin{aligned}U_x&=-U\cos\phi\sin\chi\\U_y&=U\cos\phi\cos\chi\\U_z&=U\sin\phi\end{aligned}\right\}\qquad(6.10)$$

$$\left.\begin{aligned}\Omega_x&=-\dot{\phi}\cos\chi-\dot{\lambda}\cos\phi\sin\chi\\\Omega_y&=-\dot{\phi}\sin\chi+\dot{\lambda}\cos\phi\cos\chi\\\Omega_z&=\dot{\lambda}\sin\phi-\dot{\chi}\end{aligned}\right\}\qquad(6.11)$$

为使平台维持当地水平，必须使它相对地球的旋转角速度分量 Ω_x，Ω_y 满足 (6.11) 中前两式，而 Ω_z，从而 $\dot{\chi}$ 则可任意选择．例如指北平台，应使平台的 x 轴跟随地理北极，平台的旋转规律可从 (6.11) 中令 $\chi = \dot{\chi} = 0$ 而获得，即有

$$\left.\begin{aligned}\Omega_x&=-\dot{\phi}=-v_N/R\\\Omega_y&=\dot{\lambda}\cos\phi=v_E/R\\\Omega_z&=\dot{\lambda}\sin\phi=\mathrm{tg}\phi v_E/R\end{aligned}\right\}\qquad(6.12)$$

而必须给平台的进动指令与地理系的角速度相同．比力 $\mathbf{f} = \mathbf{g} - \mathbf{a}$ 在指北平台系统的表现为

$$\left.\begin{aligned}f_E&=-2\dot{R}\ (U+\dot{\lambda})\cos\phi-R\ddot{\lambda}\cos\phi+2R(U+\dot{\lambda})\ \dot{\phi}\sin\phi\\f_N&=-2\dot{R}\ \dot{\phi}-R(U+\dot{\lambda})^2\cos\phi\sin\phi-R\ddot{\phi}\\f_Z&=-g-\ddot{R}+R(U+\dot{\lambda})^2\cos^2\phi+R\dot{\phi}^2\end{aligned}\right\}\qquad(6.13)$$

对于捷联式惯性导航系统，如按惯性系导航，则应用基本方程的改写形式 (6.9)．

7 结束语——四元数的应用仍在不断开发

综上所述，四元数是由一个标量和一个矢量构成的超复数，具有实数和复数的双重性质，综合了实数和复数的运算功能．它作为定位参数，既可确定刚体的姿态，又可确定刚体的位置，还可同时确定刚体的位姿．它作为变换算子，既可构成双边算子，又可构成单边算子；对于每一种算子，不仅可用半角，而且可用全角，而又均可构成可逆的矩阵算子．四元数已成功地用于位姿计算和变换，并不断用来解决运动学和动力学的分析与控制问题；用四元数作为控制信号，不仅容易得到刚体角运动的稳定控制，而且在许多情形下都能得到十分接近于最佳的控制．目前，四元数的应用领域已从单个刚体扩展至多刚体系统，并正在向柔性多体系统逐渐渗透，涉及现代科技中许多重要领域．可以这样断言，四元数的用途仍在继续拓宽，四元数的功能仍在不断开发．

参 考 文 献

1 Бранец В Н, Шмыглевский И П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Изв. 《Наука》, Москва (1973) (有中译本)
2 Кошляков В Н. Изв. АН СССР, МТТ, 6 (1969): 3—9
3 ——. *ibid*, 2 (1975): 32—38
4 Жбанов Ю К. *ibid*, 2 (1980): 11—18
5 Челноков Ю Н. *ibid*, 2 (1983): 20—29
6 Whittaker E T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th ed. Cambridge University Press (1937)
7 Ickes B P. *AIAA J.*, **8**, 1 (1970): 1—8
8 Halijak C A. Quaternions applied to missile system. DRDMJ, Technical Report T78-19, AD-A052232
9 Yang A T, Freudenstein F. *J. Appl. Mech.*, 6 (1964): 300—308
10 Pennock G R, Yang A T. *ASME Trans., J. Mech., Transm. and Auto. in Design*, **107**, 2 (1985): 201—208
11 王庆贵. 力学学报, **15**, 1 (1983): 54—61
12 ——. 同上, **21**, 1 (1989): 122—126
13 张光枢. 同上, **14**, 4 (1982): 363—368
14 ——. 树形多刚体系统运动的四元数分析法. 第3届中国力学学会一般力学学术讨论会论文 (1984)
15 ——. 树形多刚体系统力学方程的四元数描述. 同上 (1984)
16 肖尚彬. 力学学报, **16**, 2 (1984): 159—166
17 ——. 用复合四元数求解欧拉动力学方程. 中国力学学会编, 第十六届国际理论和应用力学大会中国学者论文集锦 (1986): 126—137
18 ——. 刚性开链系统运动的两种变换算法. 中国力学学会编, 第十七届国际理论和应用力学大会中国学者论文集锦 (1990)
19 ——. 固体力学学报, **9**, 1 (1989): 83—89
20 ——. 西北工业大学学报, **6**, 2 (1988): 129—137
21 ——. 理论与应用力学学报, 1 (1988): 1—12
22 李军强, 肖尚彬. 同上, 1 (1990): 32—36

THE METHOD OF QUATERNION AND ITS APPLICATION

Xiao Shang-bin

Northwestern Polytechnical University

Abstract In this paper, the application of quaternion in modern science and technology is extensively reviewed. It is shown that quaternion has combined the advantages and functions of other positional parameters and transformation algorithms. It can be applied not only to the dynamics of a rigid body, but also more generally to the mechanical analysis and the control for multi-body systems.

Keywords *quaternion; positional parameter; transformation algorithm; multi-body system*