对边界元若干基本概念和重要文献的综述

C A Brebbia

20世纪60年代这10年是大型计算机发展的起点，这种大型计算机使很多工程问题能够用数值方法加以解决．计算机硬件从那时起开始以不断增长的速度发展，这是促成有限元法作为工程工具出现的最为重要的因素．虽然其他一些数值方法，尤其是有限差分法，以及一系列以变分方法为基础的方法，在那时也得到了研究，但这些方法都没有有限元所具有的通用性，从而不少这类方法很快为人们所忘记．所有这种努力的综合结果对工程力学的发展具有重大意义，因为它来源于大量针对基本物理原理的研究工作，诸如变分法、混合法和加权残值方法．20世纪60年代这10年还是出现一些有效数值工具的起点．这些数值工具适用于新型硬件而并不适用于手工式的计算或机械式的计算．回顾起来，这10年对于工程分析来说，大概是最出成果的时期，因为它迎来了新时代的曙光．

当时，有限元开始成为最方便、最通用的数值方法．初期人们抱怨这种方法在计算机应用中速度缓慢，但随着硬件能力的快速发展，这类抱怨不再存在．新的计算机硬件和新的有限单元的面世和相互配合，加强了有限元方法，使之能够应用于各种各样的问题．特别是工程师们很快就赞赏有限元，这种方法迅速得到了发展．从研究的观点看，有两所大学的校园关系到这种方法的发展：一是加利福尼亚大学伯克利分校，该校是有限元的“诞生地”；另一是位于斯旺西的威尔士大学，该校提出很多新的应用．麻省理工学院所进行的工作虽然没有在大范围发表，但也有同等的重大意义．该校有两个系开拓了不同型式有限元在工程中的应用．航空系将混合型方法用于有限元，这对数值分析有深远的影响；土木工程系则对精巧的壳体分析理论，复杂的非线性解，以及混合型方法作了试验．这两个系还首创两种最早的高级有限元计算机系统(NASTRAN 和 STRUDL)，从而对有限元方法的应用及其理论发展都作出了巨大的贡献．混合有限元方法应归功于麻省理工学院的Eric Reissner 的工作[1,2]，他是公认的先驱者．他的工作由卞学璜[3]和Connor[4]用于解决实际的工程问题．不过，令人有点不可思议的是，人们并没有完全认识到当时麻省理工学院取得的成就．当伯克利和斯旺西两地在不断扩大有限元法的应用范围的时候，麻省理工学院却在数值分析领域处理更加理论性的问题，他们的成就具有更加持久的特点．

虽说有限元因其通用性以及有可能以更加符合实际的方式描述工程问题而被工程专业人员很快接受，但从注重实际工作的工程师的观点看，主要困难总在于必须提供复杂的几何定义，例如节点的坐标，单元体的连接，等等．大量的信息需要编码，而且所得的大量输出使有限元系统不便使用，它的解难以分析．试图克服这一困难而研制的前处理程序模块和后处理程序模块，70年代末和80年代已成为精巧的软件．这些前处理和后处理程序模块的主要缺点在于它们本身包含大量编码，并且需要特殊的附加训练，对于确定3维形状尤为如此．于

是使用者必须学会使用两种不同的软件而不是原来的一种.

70年代初，由于上述困难，一些研究小组开始寻找问题的其他理论解. 基本思想是发展分析方法，以便能够较好地解决大型的，主要是3维的问题. 有些研究人员提出一些简化方法，这些方法可以追溯到计算机前的时代，但实践证明这些方法难以推广. 然而有趣的是这些方法仍然时不时出现，并且在某些应用中很有用. 以这些方法为基础，出现了用于桥梁或高层建筑的有限条法，任意有限差分法与配置法的结合，某种矩阵级数或矩阵传递法等数值方法. 同时，对混合原理的研究(主要与有限元结合起来)是以麻省理工学院的工作为出发点的. 在Washizu[5]的工作中能够找到对这些方法在结构力学中的解释. 这些方法的发展与边界积分方程方法应用方面的新进展相平行地进行. 在那以前，边界积分方程方法应当认为是不同类型的解析法，与工程中使用的近似法没有多大关系. 在西欧，人们是通过一系列俄国学者的工作而了解积分方法的，例如 Muskhelishvili[6]，Mikhlin[7]，Kupradze[8]和 Smirnov[9]等人的工作，但此法难以解释，从而工程人员对此并不十分欢迎. 这方面工作的先驱者是 Kellogg[10]，他把积分方程用于求解 Laplace 型问题.

现代边界积分方程法也与Fredholm[11]的工作有直接关系. 他基于离散化的程式讨论了方程的解. 积分方程法在某些流体力学问题和位势问题中一直是受人喜爱的，这方面的专家称之为源法，现在则称之为“间接”边界元法，即它的未知量不是问题的物理变量. 这一方法的工作是通过60年代 Jaswon[12]，Hess[13]，Symm[14]和 Massonnet[15]等开创性的工作完成的. Hass & Smith[16]在1962年的工作的重要性在于把 Fredholm 型的第2类积分方程用数值形式表示了出来，且以此法计算了在均匀势流中轴对称体所引起的扰动. 要准确地指出谁第一个提出“直接”分析法是困难的. 在 Kupradze 的著作[8]中已经提到“直接”方法，但形式不同. 然而，很多先驱工作是由 Tom Cruse 作出的. 他应用边界积分方程求解弹性动力学问题[17,18]. 而在位势波传播的领域里，Richard Shaw是较早的先驱者之一，他的有创见的贡献开始于他在哥伦比亚大学的一篇博士论文(1960)[19]. 这项工作牵涉到任意形状障碍物引起声脉冲暂态散射（transient scattering）问题. 为此，他写了两篇重要的文章[20,21]，给出了暂态波散射问题的边界积分解. 这些论文和 John Hess 同年（1962）撰写的论文，看来是首批用数值法求解边界积分方程的工作. Shaw 的另一些重要工作包括用间接边界积分公式求解弹性动力学问题[22]（该文先于 Cruse 的直接边界积分公式[17]），以及3维散射问题[23]，流体与结构的交互作用[24]，本征值问题[25]，扩散问题[26]和渐近展开解[27]等论文. 对边界元领域有贡献的这些工作连同后面述及的其他工作是很突出的，我们对此理应有较好的了解.

边界元的另一位先驱者是 Maurice Jaswon，他的贡献在他学生的许多工作中可以查到. Jaswon & Ponter[28] 1963 年在皇家学会会报（Proc. Royal Soc.）上发表了一篇关于扭转问题的积分方程解法的文章. 他们利用第2类积分方程把该问题用翘曲函数表示出来，并用数值法求解了问题，得到了抗扭刚度和边界剪应力. 这是有效利用边值和法向导数之间的积分关系的最早的论文之一. 此外，在1963年，Jaswon[12]用第1类 Fredholm 积分描述了静电电容问题（Jaswon 指出[12]，这种描述方法曾为 Volterra 所提到，但又被放弃了）. George Symm[14,31,32]用数值法求解了这个方程，他[33-35]和其他人[30,37]对此又加以修正，以便用保角映射来求解该问题.

Jaswon et al [38,39] 还用两个调和函数把平面弹性静力学问题描写成Airy应力函数问题，从而得到了两个单层密度的，有耦合的积分方程。这种方法提供了用数值方法求解问题的一种有效手段，尽管这种方法没有引起人们足够注意，但它毕竟引出了利用边界积分方程求解平板弯曲问题的第一篇论文。

Jaswon 的这项早期的工作 [28] 是用"直接"法表示位势问题的基础，且为Frank Rizzo论文 [40] 的先驱者，[40]用导得 Betti-Somigliana 公式所用的类似的方法描写了弹性静力学问题。这项工作提供了边界上的位移和拉力之间的函数关系。虽然Rizzo公式的数学理论大多可在 Kupradze 的著作 [8] 中找得，但他的论文以清楚的形式介绍了现在边界元所通用的一类表述方法。

继 Rizzo 的工作之后，Cruse [18] 在 1968 年发表的一篇论文中论述了弹性动力学中的间接位势法和直接位势法之间的差别。Rizzo 的公式由 Rizzo & Shippy [41] 及 Cruse [42] 作了数值解。

如前所述，Symm 接着 Jaswon [12] 的工作发表的一篇论文在应用边界积分方程求解位势问题时，既利用了直接法也利用了间接法 [14]，Symm 以单层对数位势为基础，利用边界积分方程作保角映射的工作 [33]，尤为重要。早在1969年他就进一步把这一套方法用于含有热传导分析的位势问题 [30]。

在60年代，南安普顿大学的一个小组就开始了应用积分方程求解应力分析问题的工作。某些成果在 Watson 的博士论文 [43] 中报告过。边界积分方程的进一步工作在 1972 年也是在南安普顿大学召开的第 1 届国际工程中的变分方法会议 [44] 上报道过。这项工作通过在 Carlos Brebbia 指导下的一系列主要研究弹性静力学问题的学位论文继续了下去。南安普顿大学Lachat的工作最早把高阶元用于弹性静力学 [45]。这种解决问题的能力标志着一个重要的进展，因为在这之前，积分方程型的公式限于处理常数源的问题，而且假定集中在物体的外表面上的一系列点上。常数源法对于许多实际应用（如弯曲等）都给出粗劣的结果，这是原来的边界积分公式不受科技人员欢迎的原因之一。

70年代在边界积分的研究与应用方面活动日益频繁。在70年代中叶，我们已可以明显看到，边界积分法在求解很多实际问题方面已可以代替有限元法，结果良好。南安普顿大学提出的利用曲线元的思想，由Cruse [46] 针对 3 维弹性应力分析加以发展。Cruse 还提出根据表面力如何求得表面应力的方法 [47]，而且指出把内部的体积载荷转化成边界载荷的方法 [48,49]。他在断裂力学方面的工作也从70年代开始 [47,50]，他提出用特殊的 Green 函数处理带特殊几何形状裂纹的问题 [51]。

Symm 在 70 年代期间继续研究 2 维位势问题中奇异性的处理问题 [52,53]，并研制了通用计算机软件 [54]。他还是最早把直接边界元法用于含有界面的多相介质问题中的人之一 [55]。

70 年代这 10 年中，Ligget 及其合作者利用边界积分方程处理多孔介质和其他流体问题的工作也很有用 [56-60]。

70年代已开始召开专门讨论边界积分或者更专门讨论边界元法的会议。1977年组织了一次边界积分方程法在应用力学中的计算应用的研讨会。此会在纽约举行，会议文集由美国土木工程师协会（ASCE）出版 [61]。1977 年 Jaswon & Symm [62] 还出版了一本关于位势理论和弹性静力学中积分方程方法的书，其中包括 Rizzo 的弹性静力学公式 [40] 与 Kupradze 的

早期公式[8]之间等价证明的颇有独创性的资料.

1978年由C Brebbia所著的第一本以边界元作为书名的专著问世[63].这本书的重要性在于指出了边界元法与其他工程方法(特别是有限元法)的相互关系. 而且 Brebbia 还首先指出如何利用加权残值法推出边界积分方程. 从那时起, 人们对边界元法与其他数值方法之间的关系开始理解得更加清楚了. 第1届国际边界元会议是在南安普顿大学召开的, 但当时给边界元下的定义是在该大学研究中心工作的影响下作出的, 即主要是边界积分方程的准变分公式及其与利用Lagrange型乘子的其他近似方法之间的关系[63,64]. 在南安普顿大学所进行的进一步工作是关于边界元方法的数学方面的问题, 工作的结果是1979年出版的另一本书[65].

到70年代末, 边界元法的一些较重要的特点以及它与经典的边界积分公式之间的差别, 已为人们清楚地了解[66].

① 边界元中的重点是通过混合型变分原理或加权残值表示式推出"直接"积分方程. 加权残值法是从问题的控制方程出发的, 从而对于非线性的或者与时间有关的问题(其起始积分提法也许是未知的)极为方便. 通过这方法我们可以在边界上采用不同类型的使误差为最小的方法, 例如配置法(这是人们常用的). Galerkin 法, 最小二乘法, 等等. 这种表示式具有普遍的性质, 并不限于利用 Green 函数作为基本解的情况.

② 边界元着重于对高阶元, 特别是"曲线"元的研究. 这类单元适于表示一般物体的表面. 高阶元对很多实际情况都很重要. 如果想在应力分析中描写刚体模态, 以及获得解的收敛性, 那就必须对高阶元有恰当的了解.

这些概念及其数学表示式的全面综述评论, 可以在[67]中找到.

从1978年以来, 差不多每年举行的国际边界元会议, 都把边界元的新的工作汇集在一起, 有助于对边界元方法的更好了解. 有关非线性的, 与时间有关的问题和新型应用的大批论文在这些会议上宣读, 为边界元方法的发展创造了条件. 会议编印的文集成为边界元新思想的重要宝库. 在1978年的第1次会议[6]以后, 现已在全世界又开了8次会议, 即1980年(Southampton)[69], 1981年(Irvine)[70], 1982年(Southampton)[71], 1983年(广岛)[72], 1984年(Queen Elizabeth 2)[73], 1985年(Como)[74], 1986年(东京)[75]和1987年(Stuttgart)[76].

80年代边界元法得到了巩固和进一步的工程应用. 特别有兴趣的是, 继1978年出版的 Brebbia 的第一本边界元专著之后已有一系列关于边界元的书籍问世. 由于这一领域的迅速发展, 很需要总结一下其现状, 因此, 一部内容更全面, 更有权威性的著作于1984年由 Brebbia, Telles & Wrobe[77] 执笔问世. 已出版的还有另一些关于边界元论题的书. 有关边界元的全面书目可见本手册的第2部分1).

虽然边界元领域在80年代发展得很快, 但是, 它的某些应用已臻完善, 因此发表了一系列关于边界元现状的文章, 这也包括在本手册的第2部分里. 1984年出版了第一本差不多是专门刊登边界元文章的国际性杂志[即工程分析杂志(Engineering Analysis Journal)], 这个季刊为边界元研究中新进展的传播作出了贡献.

1) 指 J Mackerle & C A Brebbia 合著《The Boundary Element Reference Book》一书的第2部分. ——译者

边界元计算机程序的重要性再强调也不为过分．如果没有清楚优良的程序，边界元方法就可能变成仅仅是精巧的数学技术．一当第一个边界元程序可以广泛地提供给人们使用，并附有适当的使用说明，工程师们就开始认识到边界元是能很容易地用来解决他们很多问题的另外一种数值方法．为了强调边界元方法的应用和研制边界元计算机系统的进展，产生了另一种形式的国际会议．这就是边界元技术会议．这些会议致力于把关于边界元的研究、开发和应用结合起来．该系列的会议在世界各地定期举行：第一次会议于1985年在澳大利亚的Adelaide市举行[78]，接着的一次于1986年在麻省理工学院召开[79]，而最近一次会议则是在里约热内卢举行的[80]．这些会议的鲜明特点是集中研究实际问题，也就是计算技术和边界元编码在工业环境中的实际利用．

在70年代后期和80年代，边界元方法被推广到解决材料非线性和与时间有依从关系的问题，其中包括双曲型的和抛物型的问题．这些应用中的某些可以追溯到边界元的起源，但大多数是完全新的．

早在70年代初，边界元法就开始用于求解弹性力学问题，这方面，它一直是特别成功的．对于轴对称体情况，因为基本解中有Bessel函数而有特殊困难．轴对称问题最先由Kermanidis[81]，Mayr[82]，还有Cruse et al[83]研究过．Mayr, Drexler, Kuhn & Mohrmann[84,85]最近的几篇文章提出了推广的公式，这些公式也为Brebbia et al[86]用于含有高阶曲线元计算机编码．

把体力化为边界力的工作，对实际边界元编码是一个重要的突破．将某个区域的积分变换为边界积分最先由Rizzo, Shippy & Stippes[87,88]提出．Danson[89]对2维问题、3维问题和轴对称问题中的重力、离心力和温度应力的情况所需的方程，给出了完整的推导．

在早期阶段，因为边界积分方程的表示方法能达到很高的数值精确度．所以它们对求解断裂力学和应力集中问题变得很有吸引力．首次利用边界积分方程作弹性断裂力学分析的，看来是Cruse和Van Buren在1971年的工作[47]，他们以张开缺口来模拟裂纹．对于这种情况，由于当两个裂纹表面接近时，方程组变成奇异的，所以边界元的结果一般不很精确．

Blandford, Ingraffea & Liggett[90]在1981年建议再细分区域以避开奇异性．这种方法仅要求各个表面在彼此接近时处于不同的子区域内．

Snyder & Cruse[91]看来是首先提出应用计及裂纹表面无应力条件的特殊基本解．这种方法的优点是不需要离散裂纹表面．

另一种方法是所谓位错表示法[92-95]．这种方法用积分式子描写裂纹表面上的内部应力，从而产生高阶奇异性．这使得在实际中难以应用位错表示法．

断裂力学的另外一些重要论文为[96—98]，而对断裂力学中边界元法的综述，在Atkinson[99]执笔的一章中作了介绍．

弹性静力学中关于应力强度因子计算的工作，最近由Sato, Tanaka & Nakamura[100]作了报道，而Martinez & Dominguez[101]则发表了用四分之一节点元来表示裂纹顶端的奇异性，最近又把它推广到计算动态应力集中因子[102]．范天佑和Hahn[103]最近报道了边界元在动态断裂力学中的应用．

利用边界积分方程解决非弹性问题始于70年代．这个主题的第一篇论文，看来应归于Swedlow & Cruse[104]．该文提出了含有塑性应变项的Somigliana恒等式的推广形式．这

个表示法是以直接法作为基础的，由此得出了3维问题的表达式. 不过，那些作者既没有列出任何数值例子，也没有得到内部应力的表达式.

上述工作由Ricardella[105]继续下去. 他在1973年发表的一篇报告[105]，首次利用边界元法给出了弹塑性问题的数值结果. 他对2维问题采用了von Mises屈服准则. Ricardella认识到当寻找内点应力时在塑性应变积分中会出现奇异性，并在数值模拟中先用解析法积分塑性应变项然后以闭合形式计算导数，从而避免了奇异性引起的问题，不过这种方法有一定的局限性，只能用于常值分段插值函数. Ricardella工作的意义比人们想象的要大，因为它是后来的许多工作的数值依据. 看起来，他也是第一次得到了线性边界元的表达式，并很早给出了正确结果，虽然说这个表达式多少有一定的局限性.

也在1973年，Mendelson[106]发表了一篇美国国家宇航局（NASA）的报告，讨论了弹塑性问题的不同积分公式，即直接公式、间接公式和报告中称为半直接法的直接双调和公式. 报告给出了包括圆轴受扭情况的某些简单问题的解. Mendelson还给出了2维和3维情况下的内应力表达式，不过这些式子后来证明因塑性应变项有奇异性而不正确. Mendelson的工作于1975年[107]作了推广，利用直接表示式给出了方形横截面杆扭转的数值结果. 他研究了理想塑性和应变硬化的情况，并把所得结果与有限差分的解进行了比较.

1977年Mukherjee[108]部分地纠正了[106]和[107]中所提出的2维弹塑性问题的表示式的错误，并推导出塑性应变积分的本征核. 他的公式采用了塑性应变不可压缩的假定，对许多塑性势公式并不有效. Kumar & Mukherjee[109]利用同一表示式对一些简单问题给出了闭合形式的解.

把边界元首次应用于粘塑性应归功于Chaudonneret[110]，他也在1977年利用直接公式来研究带缺口的平板，并把所得结果与实验值进行比较. 所提出的积分方程具有“初始应力”的形式，他利用线性边界元和常值矩形元来作数值计算. 对于这种常值元看来可以利用Ricardella公式作内应力的计算，因为论文中提出的相应的积分表示式是不正确的.

1978年Bui[111]对奇异非弹性项积分的导数提出过一个恰当的表示式. Bui证明了与求导有关的自由项的存在，该项被以前的那些作者忽略了. 这工作终于求得了非弹性应力的正确表示式，从而是一项重大突破. 继此工作之后，Mukherjee & Kumar[112]成功地完成了与时间相关的非弹性幂律蠕变分析，他们对于边界未知量和非弹性应变运用了预校正时间积分格式和常值插值.

1979年Telles & Brebbia[113]对3维和2维弹塑性问题得到了完整的边界元表示式. 他们给出了内应力的正确表达式以及奇异域积分的恰当导数. 在他们的工作中，重点是积分方程的数值计算方法，他们给出了数值计算塑性应变积分主值（连同修正的自由项）的简单方法. 该方法把均匀塑性应变场用于离散化的积分方程，从而可以采用高阶内部元. 这项工作没有提出任何数值解，但是首次证明了正确使用非弹性应变的高阶表达式的可能性.

70年代所完成的工作奠定了对于非弹性问题正确使用边界元的基础，同时也为80年代初期完成的，更复杂的数值解算技术奠定了基础. Telles & Brebbia[114]于1980年把直接表示式用于解2维(平面应力和平面应变)问题. 该式以von Mises屈服准则为基础，可以具有应变硬化、理想塑性和应变软化等材料性能. 对边界元和内部元都使用线性插值，还将结果与有限元的解作了比较. 在日本Kobayashi & Nishimura[115]将间接表示式求解3维弹塑性

问题，以确定圆形隧道周围的位移和应力．他们用2维解析解作对比，检验了他们的公式的精确度．

1980年Brebbia & Tellcs[116]还利用一种“初始应力”方法把他们先前提出的公式作了推广，而且采用了4个不同的屈服准则作了计算，其中一些屈服准则能够考虑塑性膨胀(Drucke-Prager和Mohr-Coulomb)．此外，讨论了3种不同的边界元表示式：初始应力、初始应变以及虚面力与体力法．提出的一些应用强调了边界元优于有限元的特点，特别是对于非弹性无限介质问题．

1978年Banerjee & Mustoe[117]曾提出虚面力法与体力法，但用了一种错误的表示式．他们在1980年的论文[118]中改正了这个错误，但还是用了一种不正确的方法来计算内应力．根据他们的方法，先计算内部位移，然后应用有限差分或有限元中采用的那种数值微分方法．这种方法降低了解的精度而且需要较长的计算机时间．1981年Cathie[119]试图对每一个迭代周期优化运算的次数，但是即使这样做了，上述方法计算起来仍是效率低的[120]．

1981年Mukherjee & Moriaria[121]以及Moriaria & Mukherjee[122]提出了重大改进．他们把Mukherjee & Kumar[112]先前的表示式推广，求解与时间有关的非弹性断裂力学问题．该方法的主要优点在于把裁断影响反映在积分核内，从而不需要在数值解中模拟裁断边界，他们采用了一种以双调和表示式作为基础的间接边界元方法．

1981年Telles & Brebbia[120]把弹塑性体的半平面基本解用于边界元而求解了半无限问题．这时，在半平面的自由表面上的面力无需进行边界离散．此外，1981年他们还利用Peryzna的本构模型成功地引进了可以统一处理塑性、蠕变和粘塑性的粘塑性准则[123]．

另一项令人感兴趣的研究是Brunet[124]的工作．他处理了循环塑性，并表明用边界元法求解承受任意载荷史的弹塑性硬化问题结果很好．他用的是带有应变记忆效应的线性和非线性硬化的本构定律．

粘弹性问题的边界元法，早期是用Laplace变换以及在变换平面内用相应的准弹性原理求解的[125]．1985年Tanaka[126]提出了利用时空倒易原理以及利用时空变量表示的基本解．他的结论是，依赖于时间的方法很可以代替变换方法．

Mukherjee的研究小组把边界元用于包含粘塑性变形在内的大应变和大变形问题，做了一系列工作[127]，而且在1983年把这些思路推广到解决金属成型问题[128-130]．

最近，Mukherjee & Poddar[131]对承受任意载荷的任意形状壳体提出了非弹性表示式，但仅对弹性情况有数值结果．

直接表示式首次应用于求解与时间相关的扩散问题，看来应该是Rizzo & Shippy[132]的工作，他们在1970年用直接表示式求解了热传导问题．他们首先利用Laplace变换使方程与时间无关，然后求解一系列实正值的变换参量．采用数值反演过程计算时域内的变量．使用这种方法的优点是使原来的抛物型方程变换成易于求解的椭圆型方程．不过，这种方法的主要缺点是当边界条件或载荷是时间的复合函数（这是很多工程应用的情况）时，回代变换以得到真解很困难．

Butterfild & Tomlin[133]把扩散分析应用于土工技术工程中带有区域正交各向异性介质的研究上．他们利用间接表示式又利用沿着分界面的协调条件考虑了层状介质的情况．在

初始时间把瞬时源分配到问题区域上以再现时间为零的条件以及把时间连续源分配到区域和分界面上，从而求得暂态解．该解满足给定的边界条件和界面条件．这种方法很吸引人，但用起来有点麻烦．

1973年Chang[134]的工作是一项重大的进展．他使用与时间有关的基本解和直接边界元表示式，求解了各向异性介质和各向同性介质中的暂态扩散问题．在时间和空间上全部用常值离散．类似的方法为Shaw在1974年[20]所提出，他推广求解了3维问题，侧重于解析方面而不是计算方面．

Chang & Shaw 的方法似乎一直到1979年才为 Wrobel & Brebbia 所注意[135,136]，他们采用了高阶空间和时间的插值函数．这是一个重要的发展，因为由此可以分析更实际的问题，特别是，当边界条件或载荷随时间变化时，分段常值函数是不能用的．Wrobel & Brebbia 在1981年[137]将此方法推广到求解轴对称暂态问题，把解展开成级数，从而某些积分能用解析法求出．

1980年 Brebbia & Walker[66] 提出另一种方法求解了暂态扩散问题，即同时利用边界元和有限差分方法，这里的时间导数是以有限差分的形式加以近似，以在时间域上求解．

1981年 Onishi[138] 为了求解2维 Neumann 型热传导方程而研究了边界元的配置法，并证明了某些有意义的数学定理．他发现，在边界上利用双线性试探函数，可以得到2阶的收敛性和稳定性．

1980年 Tanaka[139] 利用他的“边界体积”元法研究了暂态热传导问题．这种方法除了要用与边界元有关的方程外，对于内部区域还要用附加方程．之后，这种方法应当用来求解线性[140]和非线性[141]的热传导问题．

在很多情况下，对于位势问题中的非线性都采用把区域细分成一系列内部单元的方法．由于热导率是位势的函数而造成的非线性，在很多情况下均可用Kirchhoff变换，把问题转换成线性问题来作分析[142]．对于仅有自然边界条件和必要边界条件的问题，上面的运算就产生一些线性方程组．对于混合边界条件的问题，应用 Kirchhoff 变换，会得出非线性边界积分．但利用简单的迭代方法往往就能求解出来．可是，辐射条件导致积分方程的强非线性，必须特别小心才能使解收敛[143]．Skerget & Brebbia[144] 把 Kirchhoff 变换方法推广处理与时间有关的问题．具有非线性热导率的、与时间有关的扩散方程可用 Kirchhoff 变换表示为积分形式，然后就能采用标准时间求积方法求解．

1985年 Nardini & Brebbia[145] 提出把他们用以解动力问题的新的方法加以推广以求解抛物型问题．这个方法现在称为双互易法，在本书中本章的弹性动力学部分要再讨论．这个表示式通过对时间有关的域内的积分引入一种近似，使这些积分可以变换成边界上的表达式，这样就把问题化到边界上去了．这种变换是再次利用互易原理实现的，因此其名称为双互易法．1986年该法被用来求解了一些实际的工程问题[146]．

边界元法在暂态地下水流问题中的应用，是 Liggett[147]，Liu & Liggett[148] 以及 Lennon et al[149,150] 的工作所完成的．在多孔介质中两种流体之间的移动界面，在假设不计混合的条件下（即轮廓分明的交界面模型），由 Liu et al[151] 所讨论．

积分形式的双曲型微分方程的直接解可以追溯到 Shaw 的先行工作，其中的一些工作前面已经谈到过[19,20]．以后发表的文章强调了早期工作的重要性[152-156]．Shaw和他的同事

运用3维Kirchhoff积分表示式以及时间步长方法，把2维问题看作具有任意轴长的3维圆柱体问题进行求解。这样，通过人为地引入起时间变量那样作用的第3个空间坐标，就能够使用3维Kirchhoff表示式了。用这种方法可以避免2维问题所需要的时间积分，其代价是引入一个补充的空间维数。

与Kirchhoff积分方程有关的进一步研究是由Mitzner[157]完成的。他提出一个通用的数值程式以分析来自固体表面的暂态散射。过了很多年之后，Groenenboom et al[158,159]利用一种类似于Mitzner的方法，提出了通用的边界元迟滞位势技术，求解了3维的非定常势流问题。

到目前为止，很少有人利用2维与时间有关的基本解，以数值方法求解波的传播问题。Cole et al[160]把标量波方程的2维时域积分方程[161]应用于求解暂态弹性动力的反平面运动。在那篇文章中，他们用时间步长方法获得了由集中源所激励的两个焊接半平面问题的数值解。他们得到了交界面处的极为精确的位移。不过，他们的表示式限于含有位势（位移）的边界积分为零的情况，这意味着使用这种方法不能计算出内部位移。尽管这样，他们论文第一次利用2维与时间有关的基本解得到了一般的表示式。标量波方程的本征值问题，也由Tai & Shaw[25]，De Mey[162]和Hutchinson[163]研究过。

Mansur & Brebbia[164,165]应用边界元法分析了遵从2维标量波方程的暂态问题。他们从加权残值出发，利用Green定理先推出了由Morse & Feshbach[161]所获得的相同积分方程。接着，作进一步的变换消去积分方程中出现的Heaviside函数的导数，从而得出一个能用于数值解的通用方法。他们采用类似于Cole等人提出的时间步长方法来获得时域解。现在列举几个例子来说明这种方法的数值特点（所有例子的结果都具有很高的精确度）。在[164,165]中推出的方法，后来推广到求解2维暂态弹性动力学问题[166]，所得结果在[167]中有评述。

Cruse & Rizzo[17]最早利用Laplace变换来消除问题中对时间的依赖关系，把边界积分法用来求解弹性动力学问题。Manols & Beskos[168]推广了Cruse的工作，利用Fourier变换代替Laplace变换，结果是他们的表示式给出比Cruse和Rizzo所得结果更好的数值结果。

时间步长法也被Niwa et al[169]用于求解2维弹性动力学问题。他们采用较简单的3维基本解来求解2维问题。正如前面讨论暂态波方程那样，这里求解时使用第3个空间坐标，它起相关的时间变量的作用。

弹性动力学问题的稳态解，在日本为Kobayashi，Niwa，Nishimura等人所研究。他们在频域内获得暂态响应的解。他们的研究集中于地质力学和孔洞周围应力状态方面[170-172]。在[173]中，Kobayashi & Nishimura讨论了利用Laplace变换推导Green张量的形式，还得到了稳态弹性动力学的Mindlin解。1983年他们[174]应用半无限元对2维的土与结构相互作用问题作了研究。

Kobayashi及其同事的另一个重要贡献是关于平板弯曲问题的弹性动力学的间接边界元表示式[175]。在[176]中他们介绍了表示式的数值过程以及圆板和矩形板的一些结果。在弹性动力学和平板振动方面，平板振动的本征值问题也为Vivoli & Fillipi[177]及Niwa et al[178-180]所研究。

Dominguez[181]把与频率相关的解用于土与结构相互作用问题，并且对不同类型的地基

提出了一些很有意义的数值结果.

Nardini & Brebbia[182] 提出了本征值和暂态动力问题的边界元解的一种有创见的新方法. 这种方法可以把质量矩阵表示为仅仅是边界节点的函数. 这样，弹性动力学问题就可以用类似于有限元或有限差分中的方法来处理，即把问题化为矩阵形式的与时间有关的微分方程组. 例如，自由振动问题就能够化为求解一个代数本征值问题. 新方法的主要优点是边界积分与频率无关，因而只需要计算一次. 与以前所述方法相比，这个方法处理自由振动问题是极为经济的. 对于一般的弹性动力学情况采用该方法也可以通过弹性静力学的简单基本解，在时域内而不是转换域内求解. 该方法现在称为双互易法，在[183]中作了详细的介绍.

一般流体的流动规律是由 Navier-Stokes 方程所描写，它考虑了流体粘性，能描写不可压缩流动，也能描写可压缩流动. 有许多有限差分的解和有限元的解是以所谓"原始"方法作为基础的，也就是说，Navier-Stokes 方程用速度和压力来表示出来，不过这种表示式常常不稳定，特别对于不可压缩流体. 因此，对于许多 2 维问题，人们采用守恒的表示式，也就是说，用流函数和涡量来表示或仅用流函数来表示.

Lighthill[184] 提出，利用速度和涡量作为因变量可以获得 Navier-Stokes 方程的另一种方便的形式. 这样，有可能把方程组分离成运动学部分和动力学部分. 后者把任一给定时刻的速度场通过一个积分关系与该时刻的涡量场联系起来. 在[185—189]中用这种形式提出了几种有限差分法或有限元法的表示式. 因为这些表示式把速度用涡量表示出来，从而把问题的运动学部分重写成一个积分方程，因此能够用显式逐点计算速度. 采用上述方法的结果是，流动中任何处的速度计算仅与流动粘性区域的涡量分布有关. 因为在很多情况下粘性区域外面有一个大得多的无粘性区域，从而直接计算的区域尺寸大为减小了. 这个对 Wu 及其同事[189-193]广泛研究的外部流动问题尤为重要.

Wu & Wahbah[190] 也采用了上述表示式，利用线性单元和三角形线性单元解决了定常封闭流动问题. [191]中介绍了非定常情况. 把涡量-速度表示式推广到湍流的工作[192,193]也是 Wu 及其合作者所完成的.

Brebbia & Wrobel[194] 基于 Laplace 型方程，讨论了直接边界元方法在粘性流动问题中的应用. Skerget, Alujevic & Brebbia[195,196] 使用了 Wu 的涡量-速度表示式，把它推广，使其包含压力这个变量，得到了更稳定的结果.

Onishi,Kuroki & Tanaka[197] 对自然对流问题，提出了一个以流函数、涡量和温度作为变量的表示式. Bush & Tanner[198,199] 以弹性力学的 Navier 方程作为基础，即利用"准体力"的表示方法，导得了一个表达式. 他们的表示式经过推广，利用 Oseen 的线性化方法，解决了外部流动问题. 继此工作之后，Tosaka & Kakuda 把一个罚函数表示式应用于非定常分析[200]，接着利用 Newton-Raphson 方法成功地获得了高 Reynolds 数下的收敛解[201]. 此外，Tosaka & Fukushima[201] 把该公式加以推广，分析了自然对流的问题.

最近，Kitagawa, Brebbia, Wrobel & Tanaka[202,203] 曾建议用积分形式计算对流项中的导数以改进基于罚函数的速度-压力表示式.

Onishi, Rukoki & Tanaka[204] 把边界元法应用于以流函数和涡量表示的不可压缩粘性流体的 2 维暂态流动问题，同时将其推广到也是 2 维的暂态热流体流动的分析[205].

对于定常缓慢蠕行的不可压缩粘性流动情况（即所谓的 Stokes 流动），Youngren & Acrivos[206] 以速度和压力作为自变量，利用弹性力学的基本解，获得了 3 维问题和轴对称问题的精确结果．该表示式还被Bush & Tanner[207]用来分析球体的蠕行运动，被Okabe & Kikuchi[208]用于研究矩形域内部的 2 维流动问题．

Kelmanson[209-211] 以流函数和涡量作为自变量提出了另一种表示式，将其用于诸如奇异流动、尖角附近流动和自由面流动这样一些复杂问题的分析．最近 Ingham & Kelmanson[212] 将这种方法加以推广，用于润滑技术的分析．

关于边界元法在粘性流体流动问题方面应用的评述，可参见[213]．

平板弯曲的边界元表示式源于 Jaswon, Maiti & Symm[38] 1967 年先驱性的论文，该文利用位势理论给出 2 维弹性静力学双调和方程的解．后来（1968年）Jaswon & Maiti[39] 把同一表示式应用于薄板的横向挠曲．

从那时起，很多论文都讨论了边界元法在平板弯曲中的应用．这方面的重要贡献应归功于Niwa, Kobayashi & Fukui[214]，他们采用辅助边界和常值元求解了简支边和固支边的圆板和矩形板．后来，[174] 把他们的表示式推广到弹性动力学，并讨论了数值过程，计算得到的本征频率与圆板和矩形板的已知解作了比较．

Maiti & Chakrabarti 也在 1974 年求解了多边形简支板[215]．Bezine[216-218] 对这个论题发表了若干重要的文章，而 Segedin & Brickell[219] 于 1968 年对具有凹角的平板提出了一种积分解法．

1979 年 Stern 更完整地提出了平板弯曲的边界积分方程．他的工作阐明了平板弯曲时角点所引起的问题和积分方程的收敛性．这些问题在《边界元进展》一书的第 2 卷的第 6 章中得到了更深入的讨论．书中他在很一般的形式下处理了角点的奇异性，而且对薄板裂纹的应力强度因子给出了显式基本解[220]．他还认识到对于直接方法而言，选择内点还是边界点作为参考点，对基本解提出的要求有原则的差别．由此丰富了边界积分方程各种可采纳的基本解，从而又产生了一些新的表示式．这项工作在北约组织高级研究所的会议录上被首次描述过（[221]中的论文"论基本解的选择"），而且美国机械工程师协会于 1985 年在迈阿密召开的冬季会议上作过更详细的讨论[222]．

Van Weeën[223,224] 对平板弯曲应用了 Reissner 理论．这个理论考虑了板横向弯曲时的剪切变形，由此可以得到以弯矩和剪应力合量表示的偏微分方程组．这种方法比起薄板理论来，主要优点在于可以满足 3 个原来的边界条件而用不到像薄板理论中所做的那样，把它们化为 2 个边界条件．Long, Brebbia & Telles[225] 证明，即使对薄板而言，这个表示式还是相当精确的．他们还指出，通过使用双重结点上述表示式能够用于拉应力间断的情况，通过使用简单的间断元甚至可以处理有奇异性存在的情况．

Kamiya et al[226] 求解了夹层板的弯曲问题．Tanaka[227] 处理了若干薄板大挠度问题．Kim[228] 研究了板的应力集中问题．Tanaka & Miyazaki[229] 分析了承受弯曲和薄膜载荷的平板问题，而且研究了装配板结构的情况．Costa & Brebbia[230] 针对平板的屈曲分析提出了一种边界元表示式，并指出该法对这一类问题可以得到极为精确的结果．

壳体分析的第一个边界元表示式可以追溯到 Autes[231] 的工作，他于1981年对圆柱壳提出了一种新的互易原理，并且利用应力函数去满足平衡方程．Kamiya et al[232] 研究了平

板和扁壳在热载作用下的有限变形和屈曲后的变形。Tosaka & Miyake 于 1983 年提出了弹性扁壳的边界积分方程表示式[233]。接着，他们把他们的表示式推广到非线性分析的情况[234]。

有限元的显著缺点之一，是该法不能很好地处理无限大的区域。另一方面，边界元倒是常常用于无限域的问题，因为边界元满足辐射条件，这是其他方法难以满足的。有鉴于此，有一些作者把注意力集中于边界元和有限元之间的联合上。

关于有限元和边界积分方程联合的最早论文之一应该是 McDonald & Wexler[235]，他们把这种方法应用于电磁场。Shaw & Falby[236]及 Osias et al[237]于1977年发表了关于联合法的论文。Zienkiewicz et al[238]试图利用能量法把边界元矩阵转换成等价的有限元矩阵而且使之对称化。遗憾的是，因为他们对于变分概念作了错误的解释，从而他们的论点是错误的。利用边界元所获得的有限元型矩阵的对称化，常常包括某种误差，正如 Brebbia[63]于1978年所指出的那样。Brebbia & Georgiou[239]于1979年讨论了能够使用的两种联合形式：一是把边界元区域作为有限元区域来处理；另一是把有限元区域转变为边界元区域。两种方法，如果没有像在矩阵对称化时所引起的那种数值误差或近似，就会给出同样的结果。1981年Margulies提出了另外一种方法，利用双重积分把有限元和边界元联合起来[240]。Beer & Meek 于 1981年[241]把两种方法联合起来处理了弹塑性力学的无限域问题。边界元和有限元的联合现已相当成熟，并且用于许多计算机的编码之中。

在近海工程中，重要的是精确地确定表面波与固定物体或漂浮物体之间的相互作用。这包括对流体建立模型，往往要把流体扩大到无限大并计及其与结构的耦合效应。

关于波绕射的最早的边界积分表示式，可以引出下面的文献：Garrison[242] (1972)，Hogben & Standing[243] (1974)，Eatock Taylar[244] (1977)，以及 Isaacson[245] (1978)。高阶元在 2 维结构和 3 维结构中的利用，是 Au & Brebbia[246,247]所提出的。他们还有一篇综述性的文章[248]。[249]中给出了用边界元研究表面波的最新评述。

Mei[250] 和 Au & Brebbia[246] 以及最近 Georgiadis & Hartz[251] 利用辐射条件或 Sommerfeld条件，得到了 2 维Helmholtz方程的极精确的解，该方程代表的一个典型情况是任意截面的水平圆柱体上受的力。

非线性分析应归于 Masuda & Kato[252] 的工作。他们把 2 阶项引入表示式中。还有 Faltinsen[253] 的工作，他在假定自由面为运动边界的条件下提出了完整的非线性表示式。值得指出的是，非线性自由面流动早在 1978 年就已由 Liu[254] 利用边界元分析过。有关问题的其他文献见 Nakagawa[255] 和 Kim[256]。

边界积分的解在采矿工程中应用的最早文献，似乎是 Salamon[257-260] 的工作。他早在60年代初就利用现在称为常值元的方法求解了这些问题。这项工作由 Starfield & Crouch[261] 继续下去，他们将其推广，并用以求解了不同类型的问题。还有 Diest[262] 的工作，他利用这种方法分析了采掘问题。

Brady & Bray[263]于1978年提出了位移连续法，而Hocking[264]和Warle & Crotty[265] 则利用该方法与常规边界元法相结合，分析了滑移与间断问题。Beer & Meek[266,267] 报道过一些重要的成果，其中包括边界元与有限元的联合在采矿工程中的应用。他们的最近工作在[268] 中作了介绍，

Venturini & Brebbia[269] 证明，上述方法可以用来模拟多层材料，特别是具有特殊界面条件的薄层。Rudolphi[270]在应用边界元法时，采用二次元处理含有间断应力分量的分区2维物体。

用边界元法研究接触问题这一重要的非线性问题有独特的优点，但是出人意料的是直到目前为止对这问题的研究还很少。首次应用是 Andersson 作出的，他的工作刊在1981年出版的《边界元进展》丛书的第5章[271]。他利用增量法，按照问题的提法一个节点一个节点地进行。1984年 Bezine & Fortune[272]发表过一篇平板弯曲的文章，也用类似的方式处理了接触问题。Abdul-Mihsein, Bakr & Parker于1986年[273]利用二次元把这个方法推广到轴对称问题，而 Paris & Garrido 则利用间断的线性元做了同样的事情[274]。以前的全部文献都是以类似于 Andersson 所提出的方法作为基础的，但是1986年 Kuich[275]提出另一种采用柔度矩阵的方法。在此表示式中，先对构件形成柔度矩阵，然后利用特殊的程式找到接触中的实际表面。

在很多有限元编码中流行的"间隙"元法，似乎还没有应用到边界元中，尽管它的原理同 Venturini & Brebbia[269]所提出的界面系数的测定相同，但后者在地质力学中得到了满意的结果。

边界元法的某些优点，早已用于求解复位势型问题，尤其是静电学问题[31,32]。它们在电力工程中的一些有趣的应用包括研究近海结构的阴极保护系统，而这是现在在工程实践中已被人们认可的功能齐全的计算机编码的早期发展的起点[267,277]。

把经典积分方程用于电磁理论虽始于 Green，但只是在70年代末才研究出有效的数值方法[278]。边界元法在求解电磁问题方面另外两项较早的应用是Ancelle & Sabonnadiere[279]以及 Salon et al[280] 作出的。之后，该方法发展成为一种强有力的工程工具。最近发表的一些文章强调该法在各种电力工程中的应用，如同步电机[281]，3维问题[282,283]和非线性的研究[284]。

关于边界元结果的精确度和收敛性以及对这种方法发展十分重要的其他一些数学课题，Wolfgang Wendland无疑是主要的研究者。他在边界元和数值积分的渐近误差分析[285-291]方面发表了很多篇论文。在最近发表的文章中研究了边界元和有限元耦合造成的误差[292]。除此之外，早在1981年[293]他就研究过边界元解的调整和稳定性，特别用于2维边界元配置法[294,295]。尤为重要的是他对边界积分法的配置法与Galerkin法作出了比较的分析[296]。他致力于研究对工程师和其他科学家有实际意义的重要问题，其中包括与弹性力学和流体力学中的边界元的正确表示式有关的数学概念[297]。他和他的合作者们还研究了用边界元处理角点和裂纹引起的奇异性问题，找到了相应的误差估值，他的结果发表于从1979年开始的一系列论文之中[298-301]。

随同功能强大的超级计算机的出现，最近研制出的新的优化算法重新对形状优化发生了兴趣。边界元法在这方面是理想的工具。利用边界元优化的首篇著作，似乎应归于 Mota Soares et al[302]。他们利用 Pshenichny线性化方法求解了非线性问题。[303]利用 Powell 算法把这种方法应用于2维问题。利用边界元进行优化的最新的工作，可见于[304]，那里 Jim Kane 把灵敏度分析程序同 Vanderplaats 提出的数值优化步骤耦合了起来。

（下转第121页）

人们也已经将撞击力作为破裂可食坚果的一种方法[141]。基本的依据是，突然施加在坚果上的载荷将引起壳体破裂而只有比较小的变形。这种变形较小的生产方法是有利的，因为在果仁和壳体之间的空间很小。此外，高速撞击坚果方法还可能有这样的优点，冲击波沿壳体传播可能使壳体碎裂成许多小块而易于果仁回收。一台试验用的破碎机试验已证实，薄壳山核桃壳体用自由飞行的高速质量撞击，壳体被击碎，果仁几乎没有损伤。在所进行的试验中，定量计数方案证明，以 22m/s 飞行的 6.8g 质量给出最好的结果。

撞击能量的其他应用包括利用脉冲压实进行棉花打包，通过下落质量的撞击进行打桩[142]，以及使用撞击振摇机作为一种水果机械收获方法使水果脱落[143]。一个很容易受忽略的有关撞击的领域是液滴对叶子撞击作用的研究。随着费用的增加和对环境污染的关心，对这种撞击和沉积物的形成进行研究就变得非常重要。有人使用高速摄影术来记录液滴对叶子的撞击，研究影响喷淋液滴在不同植物叶面上沉积的可能因素（液滴大小和速度，表面活化剂的浓度和类型）[144]。

5 结 论

本综述并不准备包罗所有农产品撞击起支配作用的课题。理论分析主要集中于连续介质力学模型和较简单的弹性行为情况，虽然大家公认大部分农产品表现为粘弹性材料。在我们的综述中，忽略了波传播的影响，主要着眼点放在接触现象上。

甚至在经典的应用力学领域内，撞击问题的成功分析也还限于十分简单的基本上为弹性变形的过程。农产品的撞击代表着还要更加复杂的领域，因为农产品的生物学特性是处于不断的变化之中。因此，还需要更多的工作，共同努力发展控制农产品在撞击下的行为的基本定律。更符合实际的体现撞击过程的分析要求提出非各向同性、非均匀和非线性粘弹性问题，这样才能更精确反映农产品的行为。应当考虑更宽的速度范围和更复杂的几何形状，同时还要完成有权威性的试验，以检验所提出的模型的正确性。虽然已经做了大量的重要工作，主要是实验工作，但已有的理论工具还不足以描述涉及农业中实际遇到的撞击的详细机理。

由于农业中撞击载荷的重要作用，以上这些问题要求引起紧急注意，并贡献出更多的努力以得到必要的解决办法。

参 考 文 献（150篇，略）

100083北京农业工程大学华云龙 译自：*Int. J. Impact Engng*, 11, 3 (1991)：251—275. （董务民校）

（上接第134页）

关于几何非线性问题的应用，除已述及的特殊问题外，是很少的。Novati & Brebbia[306]似乎是目前对几何非线性弹性静力学作一般描述的仅有的作者。

参考文献（305篇，略）

410012长沙中南工业大学数力系 王嘉新译自：Mackerle J, Brebbia C A. The Boundary Element Reference Book. Computational Mechanics Pub. (1988)：3—52.

（王克仁 董务民校）