

层流和湍流中的螺旋度

H. K. Moffatt

英国剑桥大学应用数学和理论物理系

A. Tsinober

以色列 Tel-Aviv 大学工程系

关键词 Euler 方程; 湍流; 弛豫; 拓扑约束

1 引言

限于 3 维欧氏空间 R^3 的域 \mathcal{D} (有界或无界) 中的流体流动, 其螺旋度 (helicity) 是速度场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 与涡量场 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \text{curl } \mathbf{u}$ 的标量积的积分

$$\mathcal{H}(t) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV \quad (1.1)$$

量 $h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ 是流动的螺旋度密度。 h 和 \mathcal{H} 二者都是伪标量的量, 也就是它们在从右旋参考标架变到左旋参考标架时将改变符号 [宇称变换 (parity transformation)]。因此, 重要的是明确规定所应用的标架; 除非另有说明, 我们将总是利用右旋的笛卡儿 (或正交曲线) 标架。最简单的 (原型) 螺旋流动是

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + (1/2)\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}$$

其中 \mathbf{U} 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 是常数。于是

$$\boldsymbol{\omega} = \text{curl } \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}$$

并且螺旋度密度 $h(\mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ 是均匀的。如果 $\boldsymbol{\Omega}$ 平行于 \mathbf{U} (因此 $h > 0$), 则流线相对于 z 轴是右旋的螺旋线, 它们具有间隔 $p = 4\pi U / \Omega = 4\pi h / \Omega^2$ 。因此就有了由 Moffatt (1969) 引进流体力学文献中的“螺旋度”这个术语的起源。

就流动运动学来讲, 螺旋度从根本上来讲是重要的, 因为它承认了关于流动中涡线的单环绕 (linkage) 或多环绕 (linkages) 的拓扑解释。例如, 假设在两根环接的 (linked) 封闭管子 \mathcal{F}_1 和 \mathcal{F}_2 中的 (图 1) 除外, $\boldsymbol{\omega}$ 恒等于零。我们假设 \mathcal{F}_1 和 \mathcal{F}_2 是不打结的 (unknotted), 并且假设涡线在每根管内是不扭曲的 (untwisted), 即每根涡线是一根环绕着管子一次穿过的封闭曲线, 并且与同一根管子内它的那些相邻涡线不环接。如果管子有小到等于零的横截面, 则积分 (1.1) 退化成各自绕着 \mathcal{F}_1 管及 \mathcal{F}_2 管的 C_1 及 C_2 轴的两个线积分之和:

$$\mathcal{H} = \kappa_1 \oint_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} + \kappa_2 \oint_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.2)$$

其中 κ_1, κ_2 是与每根管有关的环量, 现在, 根据 Stokes 定理,

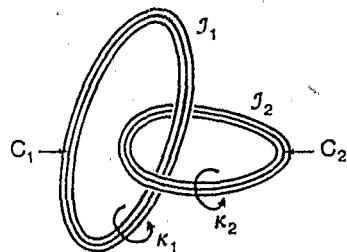


图 1 给出非零螺旋度的环接涡管的原型构形

第一个积分等于穿过张成 C_1 的那个表面的涡量通量。这个通量等于 $\pm n\kappa_2$ ，这里 n 是 $\{C_1, C_2\}$ 的环绕 (linking) [或缠绕 (winding)] 数，而 + 或 - 则根据是右旋还是左旋环绕 (linkage) 来选择。对于第二个积分可得到类似的结果。因此

$$\mathcal{H} = \pm 2n\kappa_1\kappa_2 \quad (1.3)$$

于是， \mathcal{H} 直接与两根环接曲线的最基本的拓扑不变量有关。

当然，一般地一个涡量分布 $\omega(x)$ 不可能简单地分解成一组非交叠的涡管 (nonoverlapping vortex tubes)；事实上可以预料，一般 3 维流动的涡线是以具有混沌轨线的 3 阶动态系统所特有的方式指数式地发散。然而，总有一种办法把 ω 简单地分解成 3 个交叠场的和，对于这 3 个交叠场，螺旋度的上述解释仍然有意义 (图 2)。如果

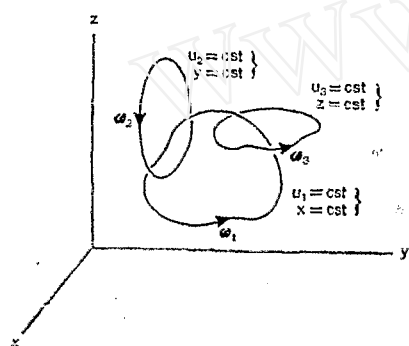


图 2 任意涡量场分解为 3 个环涡场，其中每一个都有平庸拓扑 (trivial topology)

$\mathbf{u} = [u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z)]$ ，则我们定义

$$\omega_1 = (0, \partial u_1 / \partial z, -\partial u_1 / \partial y) \quad (1.4)$$

并且 (根据轮换) 对 ω_2 和 ω_3 有类似的情况，所以 $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 。场 $\omega_1(x)$ 的涡线是一些封闭曲线 $u_1 = \text{常数}$ ， $x = \text{常数}$ 并且连带“自螺旋度” (associated “self-helicity”) 为零； ω_2 和 ω_3 的情况与 ω_1 类似。螺旋度为

$$\mathcal{H} = \sum_{n \neq m} \mathcal{H}_{nm}, \quad \mathcal{H}_{nm} = \int \mathbf{u}_n \cdot \omega_m dV = \int \mathbf{u}_m \cdot \omega_n dV \quad (1.5)$$

并且 \mathcal{H}_{nm} 是两个涡量场 ω_n 和 ω_m 的“环绕度 (degree of linkage)”

尽管螺旋度的概念在流体力学范畴内是比较新的，但它的根源可以追溯到 Helmholtz (1858) 和 Kelvin (1869) 的创新贡献。Kelvin 认识到，在理想流体的 Euler 支配方程的发展情况下，涡线的行为就像一些实质线 (material lines)，或用现代的说法，它们是“冻结在流体中的”。这种结果是以下事实的后果，即通过随流体而运动的曲线围成的任一开曲面的涡量通量是守恒的 [还是在 Euler 发展方程 (evolution equations) 下]。如果选运动的曲线为它本身是封闭的涡线，那末就有，由这条涡线所环接的涡量是守恒的。正是 Helmholtz-Kelvin 定理的这种双重应用蕴涵着螺旋度的“无粘性不变量”，即直接使螺旋度具有类似于理想流体动力学中能量的情况的结果。

螺旋度守恒定理可以叙述如下。考虑在保守体力作用下流动的无粘性正压 [$p = p(\rho)$] 流体的速度场 $\mathbf{u}(x, t)$ (注意，这些恰好就是 Kelvin 环量定理成立的条件)。令 $S(t)$ 是任意封闭曲面，它随着流体运动，在这个曲面上 $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$ (根据涡线被冻结在流体中的事实，如果某一条件在 $t = 0$ 时成立，则它对于所有的 t 仍然成立)。令 $\mathcal{H}_S(t) = \int_V \mathbf{u} \cdot \omega dV$ 是 S 内部体积 V 里的螺旋度。于是 $d\mathcal{H}_S(t)/dt = 0$ ，因此 $\mathcal{H}_S(t) = \text{常数}$ 。

这个结果是 Moreau (1961) 发现的，不过 Woltjer (1958) 在磁流体动力学方面 (看下面) 与此密切相关的更早的结果已预示过这个结果。这个结果连同其拓扑解释一起由 Moffatt (1969) 重新发现，使定理成立的那些条件很重要，却又常常被误解，因此，这里

以它的最简单形式重复这种证明是有用的。支配方程 (governing equations) 为

$$D\mathbf{u}/Dt = - (1/\rho)\nabla p + \mathbf{F} \quad (1.6)$$

因此 (适当考虑质量守恒)

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.7)$$

其中 ρ 是流体密度, $p = p(\rho)$ 是压强, $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ 是体力分布, 而 $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ 是随体导数 (material derivative) (或 Lagrange 导数). 把 \mathcal{E}_s 写成以下形式:

$$\mathcal{E}_s = \int_V \left(\frac{h}{\rho}\right) \rho dV \quad (1.8)$$

于是我们有

$$\frac{d\mathcal{E}_s}{dt} = \int_V \frac{D}{Dt}\left(\frac{h}{\rho}\right) \cdot \rho dV \quad (1.9)$$

现在

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{h}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla\right)Q = \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}Q) \quad (1.10)$$

其中

$$Q = (1/2)\mathbf{u}^2 - e - \varphi \quad (1.11)$$

而 $e = \int \frac{dp}{\rho}$ 是每单位质量的焓. 因此从 (1.7),

$$\frac{d\mathcal{E}_s}{dt} = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}Q) dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega})Q dS = 0 \quad (1.12)$$

由此即得上述结果.

在流体是不可压缩的和 $\rho = \text{常数}$ 的特殊情况下, 上述论证仍然正确. 于是方程 (1.8) 表明

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}h - \boldsymbol{\omega}Q) = 0 \quad (1.13)$$

这样, 螺旋度的通量由下式给出:

$$\mathbf{F}_h = \mathbf{u}h - \boldsymbol{\omega}Q \quad (1.14)$$

指出以下一点是重要的, 即对于每一个涡量曲面 S (在此曲面上 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$) 都有一个螺旋度不变量与之相对应. 如果流动的那些涡线位于一族 (嵌套的) 曲面上, 那末就有对应的一族螺旋度不变量. 然而一般地说, 正如上面所述, 一个完全 3 维的流动, 其涡线并不位于这些曲面上, 但以浑沌方式在整个流动域中曲折地流动 (例如参考 Dombre et al 1986, Bajer & Moffatt 1990); 在这种情况下, 对那些涡线是浑沌的每一个子域内只有一个螺旋度不变量. 然而要注意, 如果在域的边界 $\partial\mathcal{D}$ 上 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, 则流动的总螺旋度就不是不变量, 因为不满足基本的曲面条件. 因此在 $\partial\mathcal{D}$ 上的边界层内螺旋度不是产生就是消灭 (参看 Moffatt 1969 第 3 节的讨论). 当然粘性是造成涡线重新连接的原因, 并且相应地是造成螺旋度演变 (evolution) 的原因, 这就是 Kida & Takaoka (1988) 和最近 Aref & Zawadski (1991) 的计算中明显地揭示出来的效应.

如果流体充满了所有空间 (也就是 $\mathcal{D} = \mathbf{R}^3$), 以及如果当 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时, $|\boldsymbol{\omega}|$ 指数式地

变小, 那末螺旋度的积分显然是收敛的, 并且是常数, 因为 (1.10) 中的曲面积分 (在无穷远的曲面上) 等于零. 如果 ω 是 x 的平稳随机函数, 例如适合于均匀湍流场情况的, 那末我们可以定义平均螺旋度为

$$\mathcal{H} = \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle \quad (1.15)$$

这里尖角括号表示或者是系综平均, 或者 (等价地) 是空间平均. 于是我们的结果是, 又在 3 个 Kelvin 条件 (无粘性流体, 正压流动和保守体力) 下, $\mathcal{H} = \text{常数}$. 如果 $\mathcal{H} \neq 0$, 则湍流将“没有反射对称性”. 相反地, 对于任一反射对称的湍流场 (即在宇称变换下是不变的), 则必然有 $\mathcal{H} = 0$.

在后面这种情况中, 仍然可能会发生螺旋度分布的高阶矩为常数的情况 (Levich & Tsinober 1983), 以及会对流动的统计性质发生影响. 例如假设空间被分成由曲面 S_i (它们随流体而运动) 围成的一些元胞 V_i , 在这些曲面 S_i 的每一个上都满足条件 $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ (对于所有的 t), 以及令 $h^{(i)} = \int_{V_i} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV$ 是元胞 V_i 中流动的螺旋度. 于是每个 $h^{(i)}$ 是流动的一个无粘性不变量. 现在考虑包含许多这种元胞的一个大体积 V , 我们可以定义矩

$$\mathcal{H}_n = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_i h^{(i)n}$$

并且它们全都是无粘性不变量. \mathcal{H}_1 如前所定义是流动的平均螺旋度. 如果 $h^{(i)}$ 是以相等的正值和负值概率随机地分布的, 则

$$\sum_i h^{(i)} \sim V^{1/2}$$

并且 $\mathcal{H}_2 = 0$. 然而, 所有的偶矩 (尤其是 \mathcal{H}_2) 是有限的和非零的, 并且尽管此平均螺旋度为零, 但在平均值附近的涨落却是常数方差.

以上的论证关键地取决于涡量场的元胞分解法. 它不可能容易地推广到 $\langle (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega})^n \rangle$ 形式的矩, 这种形式的矩看来一般地不是不变量 ($n=1$ 的情况除外).

2 螺旋度不变量的拓扑性质

以上我们已经利用流动中涡管的环绕提到了螺旋度不变量的解释. 这种螺旋度的不变性于是直接与涡量场的拓扑不变性有关.

类似地, 无扩散的流动对流的任一螺旋线矢量场都将有守恒的拓扑和一个连带螺旋度不变量 (associated helicity invariant). 这种原型是完全导电流体中的磁场 \mathbf{B} , 它满足冻结场方程

$$2\mathbf{B}/\partial t = \text{curl}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

其中 \mathbf{u} 是对流速度场. 在这个方程与无粘性流体动力学的涡量方程之间形式上的类似是众所周知的. 然而, 不同处在于在方程 (2.1) 情况下, \mathbf{B} 不再限定等于 $\text{curl} \mathbf{u}$. 换句话说, 方程 (2.1) 允许考虑类型广泛得多的初始条件.

如果 $\mathbf{B} = \text{curl} \mathbf{A}$, 以及如果在含体积 V 的运动曲面 S 上 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$, 则磁螺旋度不变量为

$$\mathcal{H}_M = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \quad (2.2)$$

注意, 这个量是规范不变量, 即用 $\mathbf{A} + \nabla \psi$ 取代 \mathbf{A} 情况下的不变量, 其中 ψ 是任一单值的标量场. 这种类型的不变性不应该与根据方程 (2.1) 得到的 \mathcal{H}_M 的时间不变性相混淆. 后一

种不变性由 Woltjer (1958) 发现。以前 Whitehead (1947) 在研究从 S^3 拓扑映射到 S^2 的著名的 Hopf 不变量时遇到过具有这种结构的积分。Arnold (1974) 把积分 (2.2) 称为“渐近的 Hopf 不变量”，在 B 线不是简单闭合曲线，但例如可能是浑沌地曲折蜿蜒的时这种称呼是合适的 [参看本书 (*Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 24) Arnold & Khesin 1992]。

如果每一根 B 线都是一根不打结的封闭曲线，在收缩过程中它可能缩成一点而无需切断任一其他 B 线，则 B 场就具有“密着”拓扑 (trivial topology)。根据前节中进行的论证，这样一个场的螺旋度显然是零。然而，由这样一个场开始，我们可能通过如下的“外科手术”来构造一个在拓扑上非密着的场 (nontrivial field)。

让我们由小截面的圆形通量管开始，在这根管中每一根 B 线都是平行于管轴而绕行的圆。这种初始状态中的螺旋度是零。假设，磁通量 (也就是横断管截面的 B 的积分) 是 Φ 。设想我们现在在任一截面处切割管子，把它扭转一个 $2\pi\gamma$ 角度，并且重新接上。如果 γ 是一个有理数 p/q ，其中 p 与 q 是互素的 (coprime)，那末除了中心轴以外，在此管中的每根 B 线都是环面纽结 (torus knot)，以 $K_{p,q}$ 表示。而且，每一对 B 线现在都是环接的，也就是拓扑一定是非密着的。

如果 $\gamma=1$ ，那末每一对 B 线都是简单地环接的，并且螺旋度可以由每对元管 (elemental tubes) 的贡献的简单相加来计算：

$$\mathcal{H} = 2 \int_0^\Phi \phi \, d\phi = \Phi^2 \quad (2.3)$$

更一般地，对任意的 γ 值， $\mathcal{H} = \gamma\Phi^2$ 。显然，通过这种类型的外科手术 (也就是在管中引进扭转)，我们可以根据任一希望的值来改变螺旋度。

如果初始通量管的轴是打结的封闭曲线 C ，则场的螺旋度将部分地通过纽结的非密着拓扑以及部分地通过管内场的扭转而产生。然而，因为后者的贡献可以根据与上面指出的同类型的外科手术以任意值而变化，所以场的总螺旋度可以调整到取 $\gamma\Phi^2$ 形式的任何值。这解释了 Moffatt (1969) 与 Berger & Field (1984) 对三叶形纽结 (trefoil knot) 这种特殊例子所作的 \mathcal{H} 的估计中的差别，他们对打结的管子中场的扭转沿用了一个特殊的约定。最自然的约定可能是选用使 $\mathcal{H} = 0$ 的扭转，即通过与纽结管内的扭转有关的螺旋度来补偿与纽结的扭矩 (torsion) 有关的螺旋度。对于扭转的这种选择 [在拓扑文献中称为“零设计 (zero-framing)”]，管中的任意两根 B 线的环绕数是零，尽管这是不合理的，但它们一般仍是环接的 (如同 Whitehead 环接，其中一个圆在每个方向上一次地环接一个“8”字图形)。

3 螺旋度和湍流发电机

在发电机理论 [也就是涉及导电流体中磁场增大的理论，这是在许多研究专著 (Moffatt 1978, Parker 1979, Krause & Rädler 1980, Zeldovich et al 1983) 中一直在广泛地研究的课题] 中螺旋度起着中心的作用。湍流发电机的现代研究可以说是从 Steenbeck et al (1966) 发现 α 效应开始一直至今 (参看 Roberts & Stix 1971)，尽管还要再说一次，这种发现的根源可追究到更早的工作，特别是 Parker (1955) 和 Braginskii (1964) 的工作。这个发现是非常重要的，并且完全转变了我们对发电机机理的了解。它提供了有序 (以大尺度磁场的形式) 如何可以由浑沌 (以具有零平均的小尺度湍流的形式) 而引起的一些最值得注意的例子中的一个。然而，其实质性要素是，湍流的统计性质理应有反射对称性，最简

单表示就是非零平均螺旋度。

这里我们以其最简单的形式来描述 α 效应的机理。考虑到介质的有限电导率，磁场方程为

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{curl}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.1)$$

这里 η 是介质的磁扩散率（与电导率成反比），而 \mathbf{u} 是湍流速度场。我们把 \mathbf{B} 分解或以下形式：

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

其中 \mathbf{B}_0 是在远大于湍流尺度 l 的尺度 L 上变化的“平均”场， \mathbf{b} 是由湍流产生的涨落场。于是方程 (3.1) 的平均部分和涨落部分分别为

$$\partial \mathbf{B}_0 / \partial t = \text{curl} \mathcal{E} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_0 \quad (3.3)$$

$$\partial \mathbf{b} / \partial t = \text{curl}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}_0) + \text{curl} \mathbf{G} + \eta \nabla^2 \mathbf{b} \quad (3.4)$$

其中 $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \rangle$ 和 $\mathbf{G} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} - \mathcal{E}$ 。

方程 (3.4) 在 \mathbf{b} 和 \mathbf{B}_0 之间建立了一个线性关系，从而在 \mathcal{E} 和 \mathbf{B}_0 之间也建立了一个线性关系。这种关系一般有以下形式的展开式：

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} (\partial B_{0j} / \partial x_k) + \dots \quad (3.5)$$

其中（伪）张量系数 α_{ij} , β_{ijk} 等等由湍流的统计性质和参量 η 来确定。这些系数的显式确定需要涨落方程 (3.4) 的解。

最简单的情况是湍流的磁 Reynolds 数 $R_m = u_0 l / \eta$ 是小量（ u_0 是均方根速度）的情况。在这种情况下，(3.4) 中难处理的项 $\text{curl} \mathbf{G}$ 可以忽略，并且所得出的线性方程可以通过标准的 Fourier 技术求解。其首项系数 α_{ij} 为

$$\alpha_{ij} = -\eta \int \frac{k_i k_j H(\mathbf{k}, \omega)}{\omega^2 + \eta^2 k^4} d\mathbf{k} d\omega \quad (3.6)$$

（例如参看 Moffatt & Proctor 1982），其中 $H(\mathbf{k}, \omega)$ 是湍流的“螺旋度谱”，即是量

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle \quad (3.7)$$

的 Fourier 变换。这个谱显然具有性质

$$\mathcal{H}' = \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle = \iint H(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega \quad (3.8)$$

于是我们在螺旋度谱函数与重要的展开式 (3.5) 中的首阶项之间有了直接的和有启发性的关系。

如果湍流是各向同性的（并且这里我们是在弱的意义上使用这个术语来指出在参考标架旋转情况下，但不一定要在宇称变换下的不变量），那末张量 α_{ij} , β_{ijk} 等等就必须同样是各向同性的，即

$$\alpha_{ij} = \alpha \beta_{ij}, \quad \beta_{ijk} = -\beta \varepsilon_{ijk}, \quad \dots \quad (3.9)$$

其中 α 是伪标量而 β 是纯标量。在这种情况下，螺旋度谱函数仅是波数的量 k 和 ω 的函数，并且表达式 (3.6) 给出

$$\alpha = -\frac{\eta}{3} \iint \frac{k^2 H(\mathbf{k}, \omega)}{\omega^2 + \eta^2 k^4} \cdot 4\pi k^2 d\mathbf{k} d\omega \quad (3.10)$$

类似地， β 可以表达成能谱函数 $E(k, \omega)$ 的加权积分，

现在把平均场方程 (3.3) 取下面形式以适合于均匀的和统计上平稳的湍流:

$$\partial \mathbf{B}_0 / \partial t = \alpha \nabla \wedge \mathbf{B}_0 + (\eta + \beta) \nabla^2 \mathbf{B}_0. \quad (3.11)$$

其中我们假设了 α 和 β 是均匀的且是常数. 容易看出, 这个方程允许有不稳定的解. 例如, 考虑满足“无力”条件

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_0 = K \mathbf{B}_0. \quad (3.12)$$

的场结构, 其中 K 是常数; 于是显然 (3.11) 变成

$$\partial \mathbf{B}_0 / \partial t = [\alpha K - (\eta + \beta) K^2] \mathbf{B}_0. \quad (3.13)$$

并且如果

$$|\alpha K| > (\eta + \beta) K^2 \quad (3.14)$$

即如果平均场 \mathbf{B}_0 的尺度 K^{-1} 足够大, 则我们将有按指数规律增大的行为. 实质上, 这就是平均场电动力学的 α 效应.

指出下面一点是重要的, 即满足 (3.12) 的增长的平均场结构本身具有螺旋度, 并且事实上是最大的螺旋度, 因为它是一个 Beltrami 场有关的 Lorentz 力是零 (因此有“无力”这一术语), 从而在这种理想化情况下没有任何大尺度平均场产生. 尽管如此, 还是有与以下事实有关的饱和效应, 即增长的平均场最终必然会减弱小尺度湍流 (Moffatt 1970, 1972; Soward 1975).

在天体物理或行星范畴内, 增长场结构受流动域整体几何形状的约束, 并因此无力条件 (3.12) 不可能满足. 在这些场合, 与平均场有关的 Lorentz 力是非零的, 并产生了大尺度平均流动. 这提供了另一种饱和机理 (Malkus & Proctor 1975). 无论哪种饱和机理起作用, 由于能量转换成磁场, 磁场的增长最终会受到湍流可以得到的能量的限制. 用某种哲学术语来说, 可以把磁场看作一种工具, 用这种工具最方便地将系统的能量予以耗散.

关于目前讨论的重点是, 在背景湍流中非零平均螺旋度的出现是提供非零 α 效应所需要的, 并因此是使介质对大尺度磁场的增长不稳定所需要的. 尽管 25 年前已经发现了这种效应, 但它的许多细节, 尤其是在大磁 Reynolds 数 (天体物理范围内更有关的) 这种极其困难情况下它的本质, 仍然是继续研究和不断地争论的课题.

4 在弛豫到平衡时作为拓扑约束的螺旋度

螺旋度也在弛豫到静磁平衡的问题中起着关键作用, 这是在热核聚变等离子体情况下重要的核心问题. 在这里, 又是 Woltjer (1958) 走出了最初的一步, 他指出, 如果与有限系统中磁场有关的磁能量在总磁螺旋度是规定的这个单一约束条件下是最小化的, 那末这个最小化的磁场是无力的, 即

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} \quad (4.1)$$

这里 λ 是常数. 这样, 正如在发电机情况下一样, 在某种意义上最好用 Beltrami 场.

J B Taylor (1974) 考虑了湍流等离子体中磁场弛豫到静磁平衡的过程, 他认为这种结果有十分好的效果. Taylor 承认, 对应于这种流动中的每一个磁曲面 (在此面上 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$) 都具有一个螺旋度不变量, 但认为在弛豫过程中可以预料只有总体磁螺旋度 (global magnetic helicity) (在整个流体域上积分得到的) 才是不变量. 这个原理如果被采纳, 那将直接导致 Woltjer 的变分问题, 并导致出现 (4.1) 形式的无力状态. 对于包含在圆柱域中的等离子体, (4.1) 的解利用 Bessel 函数是容易得到的, 并且特别是, 发现这些解显示出轴向磁场,

这个磁场在圆柱横截面的外边界处改换了符号,即反场箍缩(RFP)的特征行为.因此这个理论作为对RFP总体性质的解释是一个非常吸引人的候选对象.

已经作过许多努力来提供Taylor假设的正当理由,但看来统统都不能令人完全满意(Taylor 1986).问题在于,造成与流体子域有关的任一“子螺旋度”发生变化的有限磁扩散过程,同样是造成总体螺旋度发生变化的原因.相反地,如果总体螺旋度是守恒的,那末困难的是要弄明白为什么子螺旋度不也是守恒的.如果在Waltjer变分问题中对每个子螺旋度引进Lagrange乘子,那末(4.1)形式的无力状态重新又出现,但现在 λ 作为位置的函数在每根场线上(也就是在每个磁曲面上)都是常数.可以注意到,Taylor考虑的圆柱无力构形确实具有磁曲面(圆柱 r =常数).因此在这种情况下 λ 可能是 r 的任何函数.比起人们在预报理论中希望的来,这允许有更多的自由度.

甚至这种广义的变分问题也不考虑附加的质量守恒的约束.如果这种约束由于某种原因被包括在公式中,并且如果系统的总能量(磁能加内能)是最小化的,那末这个场就将弛豫到满足

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = \nabla p \quad (4.2)$$

的静磁平衡,其中 $\mathbf{j} = \text{curl } \mathbf{B}$,并且 p 是等离子体中的压力场.

这里,理论变成对经典无粘性流体力学的完全不同的情况发生了很大的潜在兴趣.因为在描述静磁平衡的方程(4.2)与描述无粘性不可压缩流体中Euler方程的定常解的方程

$$\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} = \nabla s \quad (4.3)$$

之间有众所周知的类比性.这种类比性在这里是在变量 \mathbf{u} 与 \mathbf{B} (两者都是螺线的), \mathbf{j} 与 $\boldsymbol{\omega}$,以及 p 与 $s_0 - s$ 之间的类比性,其中 s_0 是常数.这种类比是确切的,并且如果通过任何一种方法可以找到(4.2)的任一解,或一族解,那末直接就有方程(4.3)的一个解或一族解与之相对应,只要边界条件是相容的.

在Moffatt(1985, 1986 a,b, 1988)的一系列论文中都利用了这种对应性,在认为是不可压缩的和粘性的,但完全导电的流体中考虑了磁弛豫问题.这种完全导电性保证了在弛豫过程中磁场的拓扑是守恒的,这意味着不仅所有螺旋度不变量都是守恒的,而且保证任何更难捉摸的拓扑性质也是守恒的,因为 \mathbf{B} 满足冻结场方程.然而,粘性使能量耗散机理有了可能,并且在考虑到所有拓扑约束时,系统的能量降低到它所能达到的最低水平.在通量为 ϕ 而体积为 V 的打结的通量管情况下,这一最小能量有形式 $m(\gamma)\phi^2V^{-1/3}$,其中 $m(\gamma)$ 是完全由纽结的拓扑确定的函数(Moffatt 1990 b).

Arnold(1974)首先指出,在这种过程中螺旋度起着明显的作用.根据Schwartz不等式

$$\left| \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \right| \leq \left\{ \int \mathbf{A}^2 dV \int \mathbf{B}^2 dV \right\}^{1/2} \quad (4.4)$$

和Poincaré不等式

$$\int \mathbf{B}^2 dV \geq q_0^2 \int \mathbf{A}^2 dV \quad (4.5)$$

其中 q_0 是取决于流体域的几何及尺寸的正的常数,磁能量以下式为下界:

$$\int \mathbf{B}^2 dV \geq q_0 \left| \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \right| \quad (4.6)$$

这样,如果磁螺旋度是非零的,那末磁能量的界一定是远离零的.实际上,这个结果比从这

个简单表示中可能显出的要深刻得多。正是这种由非零螺旋度所蕴涵的非密着拓扑保证了磁能量不可能弛豫到零。Freedman (1988) 指出, 只要场的拓扑是非密着的, 那末即使总体磁螺旋度是零, 磁能量仍然有远离零的界。有一些磁场拓扑的有意义的例子 (例如 Borromean 环拓扑), 对于这些例子螺旋度是零 (磁场线是两两非环接的), 但这些例子的最小磁能量一定是非零的。Freedman 定理包括了这样的一些情况。

5 湍流结构和非线性抑制 (suppression of nonlinearity)

正如由以上过程所确定的那样, Euler 方程 (或 “Euler 流动”) 的一大族定常解的存在成了考虑湍流问题的有吸引力的起点。Euler 流动可以看成是控制湍流演化的 (无穷维) 动态系统的一些固定点, 并因此提供了一个自然而然的研究焦点。似乎很可能, 即使这些流动一般是不稳定的, 然而, 它们的结构, 它们之间的联结 (connections) [异宿轨道 (heteroclinic orbits)], 都可能提供有关湍流结构的有用的理解。

满足方程 (4.3) 的一个 Euler 流动是以一族 $s = \text{常数}$ 的 “涡流” 面 (“stream vortex surfaces”) 为特征的, 在这些涡流面中可能嵌入一些涡片 (vortex sheets), 穿过这些涡片 s 是间断的。这种流动还可能包括 s 恒等于零, 并且 $\omega = \lambda u$ 的一些子域, 其中 λ 在流线上是常数。在这些子域内部, 可能存在一些 λ 是常数的更小的子域, 并且在这些子域中, 场有最大的螺旋度 [即应用于场 u 和 ω 的 Schwartz 不等式 (4.4) 现在变成了等式]。涡片必须从这些最大螺旋度的区域中分离出来, 这引起了以下的推测 (Moffatt 1985), 在螺旋度与能量耗散之间应该有一个反对射 (anticorrelation)。这一看法促进了许多实验和计算的研究, 其中一些将在下节中叙述。

涡片在上述情况下自然易有 Kelvin-Helmholtz 不稳定性倾向, 并且有缠卷成双螺旋结构的自然倾向。这些以速度的切向间断的聚点为特征的结构可以得到幂律谱 $b^{-\mu}$, μ 是 1 与 2 之间的一个分数。如果这个螺旋结构正好是右旋的, 那就出现 Kolmogorov 谱 ($\mu = 5/3$) (Moffatt 1984)。这种类型的过程的 2 维分析已由 Gilbert (1988) 研究过。最近 Moffatt (1991) 应用同样的技术, 采用 Krasny (1986) 计算出的螺旋结构, 指出 Kolmogorov 谱实际上可能出自 Kelvin-Helmholtz 不稳定性。粘性耗散自然会消除螺旋中心处的奇异性, 并且提供一个指数截谱 (exponential cutoff to the spectrum)。

通过这个机理, 可以预料涡片会缠卷成一些涡丝 (vortex filaments), 这些涡丝有相当复杂的横截面螺旋结构, 这是一个与中等大小 Reynolds 数下 3 维湍流数值模拟相一致的结果 (Kerr 1985, She et al 1990)。

绝对平稳的 Euler 流动作为分析湍流结构的实际出发点, 实际上可能是过分受限制的。另一种可供选择的出发点是把湍流看作是 “相互作用的涡子的海洋 (sea of interacting vortons)”。这是一个与 Syngé & Lin (1943) 的早期看法有关的思想, 即湍流可能通过考虑球形涡旋的无规分布来处理。这里用 “涡子 (vorton)” 这个词意指 Euler 方程的任何旋转解都以它的自感生速度传播而没有结构的变化 (Moffatt 1986 b, 1988)。以上所描述的弛豫过程可适用于确定具有或不具有螺旋度的特别庞大的一族这类 Euler 流动的存在。Hill 的球形涡旋是无螺旋度涡子的原型, 而 Hicks (1899) 的 “陀螺静力 (gyrostatic)” 涡旋则是具有螺旋度的涡子的原型。

现在我们描绘 “切向入射 (grazing incidence)” 区域中 (预料这里会有高剪切) 出现

具有非线性相互作用的这样一些涡子的无规海洋。如果我们定义

$$(\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega})_s = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} - \nabla s \quad (5.1)$$

为 Lamb 矢量 $\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}$ 的“螺线射影 (solenoidal projection)”，那末流动的“Euler 化”的量度就通过下列由 Kraichnan & Panda (1988) 所提出的比式给出：

$$Z = \langle (\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega})_s^2 \rangle / \langle \mathbf{u}^2 \rangle \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle \quad (5.2)$$

在衰减的均匀湍流的计算中，Kraichnan & Panda 发现，Z 的值在具有 Gauss 分布的无规速度场应该具有的值以下是明显下降的，其渐近值是 Gauss 值的 57%。根据相互作用的涡子模型这个结果是可以理解的，因为 $(\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega})_s$ 在每一个涡子内实际上是零，所以对 Z 所作的贡献仅来自这些涡子是相互作用的那些空间区域。这是一些在其中正在产生着剪切不稳定性从而产生螺旋缠卷的区域 (Moffatt 1990 a)。

这样的一些思想当然有极其抽象的特性，但尽管如此，它们还是对实验室实验和计算实验二者起到了有益的促进作用，在下面几节中我们将转到实用研究上，包括与湍流流动中的螺旋度有关的一些效应的实验探测。

6 观察和实验

6.1 螺旋结构

至少直观上非常清楚，具有非零轴向速度分量的一个涡旋是以非零螺旋度为特征的，即它是一个螺旋结构。具有大量各种各样的这种类型的结构，例如 Taylor-Görtler 涡旋，从机翼和细长体上脱落下来的前缘涡旋和尾涡旋，在边界层和自由剪切流中的流向涡旋，海洋中的 Langmuir 环流，以及在大气中的类似结构——龙卷和旋转风暴 [参见例如 Tsinober & Levich (1983)，和地球物理学范围的文章 Lilly (1982, 1986)，Etling (1985)，Haul (1985)]。

6.2 初始无螺旋度流动中螺旋度的产生

Batchelor & Gill (1962) 发现了圆形轴对称射流的最不稳定模式 (根据线性稳定性分析) 是具有周向波数 (azimuthal wave number) $m = \pm 1$ 的模式；换句话说，最不稳定的扰动是没有轴对称的螺旋 (自旋) 模式。接着在许多论文 [Kambe (1969)，Lessen & Singh (1973)，Lopez & Kurzweg (1979)，Morris (1976)，Plaschko (1979) 和 Strange & Crighton (1983)] 中都得到了类似的结果。

由 Goldshtik et al (1983, 1985) 所作的非线性分析揭示，最不稳定模式的非轴对称本质可以造成初始非有旋流动的定常旋转 (旋转方向是顺时针还是逆时针取决于初始扰动)。这意味着，在初始无螺旋度流中产生了非零的周向速度和轴向速度，也就是产生了非零的螺旋度。

有一些实验证据 (大多数是定性的) 表明，螺旋模式至少是与它们的轴对称的对应模式一样地不稳定 (Crow & Champagne 1971，Browand & Laufer 1977，Chan 1977，Dimotakis et al 1983)。同样还有证据 (包括理论和实验二者) 表明，螺旋模式在绕流过轴对称体 (像球，圆盘，以及其他的回转体) 的尾流中起着重要作用 (Achenbach 1974，Scholz 1986，Monkewitz 1988 和其中的参考文献)，在管内过渡流和湍流中发现了螺旋模式和螺旋结构 (Sabot & Comte-Bellot 1976，Bandyopadhyay 1986，Stahl 1986)。

关于在圆形射流、尾流和管子中自诱发旋转的存在和/或发展问题至今没有任何实验资料的报告。然而这已经在其他一些轴对称流动中观察到了 [Kawakubo et al 1978 和 Shingubara

et al 1988 在围绕着汇的流动中; Torrance 1979 在分层环境下的热缕流 (hot plume) 中; 以及 Bojarevics & Shcherbinin 1983 在由于电流源产生的轴对称径向流动中]。

自诱发旋转的自发出现是反射对称破坏的一个特殊例子, 它的特征是在初始无螺旋度的流动中产生非零螺旋度。

6.3 螺旋度的定量测量

检测在流动中没有反射对称性不需要直接测量螺旋度场; 测量像 $\langle \mathbf{u}(x) \wedge \mathbf{u}(x+r) \rangle \cdot \mathbf{r}$ 的伪标量相关量就足够了, 它与流动的螺旋度是密切相关的 (见下)。

正如看起来的那样, 从实验观点来看主要困难是, 这类相关量仅在 $r \neq 0$ 时才是非零的。因此, 对于小的 r 值, 这等价于测量速度的导数 (同时也测量了速度)。对大 r 值, 这种相关量变得太小以致不能严格地测量。可能存在一种中间范围的 r 值, 在这 r 值时这些相关量可以满意地测量。然而, 到目前为止没有为此做过系统的努力。相反, 所有努力的目的都在于直接测量螺旋度密度 $u_i \omega_i$ 或者它的部分值, 例如, $u_1 \omega_1$ 。

6.3.1 方法 这些努力都基于两种最新发展的涡量测量方法 (对于这类方法的评述参看 Foss & Wallace 1989)。

奠定第一种方法的思想来自磁流体动力学 (MHD) 以及基于方程 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ 和 Ohm 定律 $\mathbf{j} = \sigma(-\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$, 其中 \mathbf{j} 是电流, ϕ 是电场势, \mathbf{u} 是速度, \mathbf{B} 是磁场强度。从而, $\nabla^2 \phi = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ($\mathbf{u} \cdot \text{curl } \mathbf{B}$ 这项要小几个量级)。这就可以通过利用 7 电极探头测量 $\nabla^2 \phi$ 而使人们得到平行于磁场的涡量分量 ω_B , 这 7 电极探头实现了 Laplace 算子的中心差分近似。这个思想是 Grossman et al (1958) 提出的, 并且已经由 Tsinober et al (1987) 在小尺寸设备 (具有 $5\text{cm} \times 5\text{cm}$ 横截面的试验段) 上在盐水的网格湍流流动中实现了。此方法有着绝对优越的主要优点, 这就是它不需要任何校准; 它通过在同一位置同时测量 u_1 和 ω_1 而提供 $u_1 \omega_1$ 量 (Kit et al 1988, Dracos et al 1990, Kholmyansky et al 1990)。这种测量已经用 Tsinober et al (1987) 所描述的 7 电极探头组成的探测装置进行了 (制品的细节参看 Kholmyansky et al 1991), 这种探头与市售的 55RI5 DANTEC 热膜探头装配在一起。通过这种方法分别地测量涡量和速度 (不同于以下所描述的用多根热线技术 (multi-hot-wire techniques) 对空气流动的测量)。实验在盐水 ($\approx 1\%$ 浓度) 水洞中在有纵向磁场 [1T (Tesla)] 情况下进行。利用盐水 (低电导率) 可保证流动和磁场的动态相互作用完全可以忽略, 因为在这些条件下, 电磁力要比粘性和惯性力两者小几个数量级。

第二种方法建立在利用多个传感器的热线探头的基础上, 以及建立在合适的校准过程基础上, 测量所有 9 个速度梯度以及速度矢量的 3 个分量。这种技术由 Balint et al (1987) 首先提出 (进一步的参考文献参看 Foss & Wallace 1989)。他们采用由 3 排组成的 9 根热线的探头, 每排有 3 个热线传感器, 在每排内的 3 个热线传感器都具有公共端座 (也就是有公共电阻), 并且校准方法建立在关于每排对称和绕探头流动对称的某些严格假设基础上, 同时利用有效速度法实现多根热线探头的 King 定律。这又造成对探头几何精度和探头在流动中的同向性 (alignment) 的极其严格的要求。这种技术已用来测量在流过网格的湍流中 (Kit et al 1987, 1988; Wallace & Balint 1990) 以及在湍流边界层和混合层中 (Wallace & Balint 1990) 的螺旋度密度和某些有关量。这种技术通过制造由 3 排组成的 12 根热线的探头 (每排有 4 个热线传感器, 它们没有公共端座) 和通过在速度、俯仰及偏转方面完全 3

维的校准过程而得到了改进 (Dracos et al 1990; Tsinober et al 1990,1991)。这导致相当大地减小了由于公共电阻引起的相互干扰而产生的误差, 相当大地降低了对探头与平均流的极其精确的同向性要求和对它的结构的过度精密要求。这种改进过的技术已经用来测量在网格湍流中和在湍流边界层的外面部分中的螺旋度密度和其他某些与速度导数场相关的量。

6.3.2 结果 在上述文章 (Kit et al 1987, 1988; Tsinober et al 1988; Dracos et al 1990; Kholmyansky et al 1991) 中对网格湍流所得到的最重要结果之一是, 在 u_1 与 ω_1 以及 \mathbf{u} 与 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的相关系数不是零。当不控制初始扰动时, $\langle u_1 \omega_1 \rangle$ 的符号是负的 (盐水流动实验), 而 $\langle u_i \omega_i \rangle$ 的符号是正的 (空气流动实验)。一组控制了 $\langle u_i \omega_i \rangle$ 符号的盐水流动中的特殊实验是由 Kholmyansky et al (1991) 完成的。他们采用具有圆孔的网格并且在网格孔中安装了产生顺时针、逆时针或两者都有的旋转扰动的螺旋桨。在所有情况下当平均螺旋度 (更精确地是 $\langle u_i \omega_i \rangle$) 的特殊符号是预期的 (即相当于所安装的螺旋桨的旋转方向) 时, 的确都观察到了它。这些结果作为检查 (至少是定性的) 可靠性也是重要的。值得注意的是, 在大多数实验中归一化的量 $\langle u_i \omega_i \rangle / \langle u_i^2 \rangle^{1/2} \langle \omega_i^2 \rangle^{1/2}$ 从网格的下游增大, 并且特别重要的是, 在流过具有空的孔的网格的流动中也观察到了同样的行为。

在所有情况下, 对 $\langle u_i \omega_i \rangle$ 的主要贡献来自最大的尺度, 正如可以从图 3 所示不同情况的 1 维谱中看到的那样, 这些尺度一

般都是试验段直径 (~30 cm) 的量级。虽然, 目前并不了解为什么所产生的大多数平均螺旋度是在大尺度中, 但是有明显的迹象表明, 螺旋度的小扰动由于流过网格的湍流流动而获得并加强。应该记住

$$\langle u_1 \omega_1 \rangle / \langle u_1^2 \rangle^{1/2} \langle \omega_1^2 \rangle^{1/2}$$

或

$$\langle u_i \omega_i \rangle / \langle u^2 \rangle^{1/2} \langle \omega^2 \rangle^{1/2}$$

的典型值是 0.05—0.1 (也就是这些值的多数是在实验误差之内),

因此证实了用控制平均螺旋度的符号所进行实验的特殊重要性。以上

结果提供了明显的迹象, 即网格湍流流动没有反射对称性, 甚至在没有任何故意的螺旋度引入时也如此。

在空气流动中的实验允许测量全部螺旋度密度 $u_i \omega_i$, 并因此允许测量 \mathbf{u} 与 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的瞬时角 θ 。这个角的余弦的概率密度函数在 $\theta = 0$ 时比在 $\theta = \pi$ 时的大 (图 4), 至少在某些情况下是如此, 这与这些实验中的 $\langle u_i \omega_i \rangle$ 的正值相一致, 这也表明涡量与速度有某种同向性的趋向。通过 $\langle u_i(x) u_j(x+r) \rangle$ (具有 $i \neq j$ 和 $r \neq 0$) 这类相关量的计算检查了 $\langle u_i \omega_i \rangle$ 的正值性。只有当各向同性流动没有反射对称性时, 在各向同性流动中这些相关量的一些才是非零的:

$$\varepsilon_{ijk} \langle u_i(x) u_j(x+r) \rangle = g(r) r_k \tag{6.1}$$

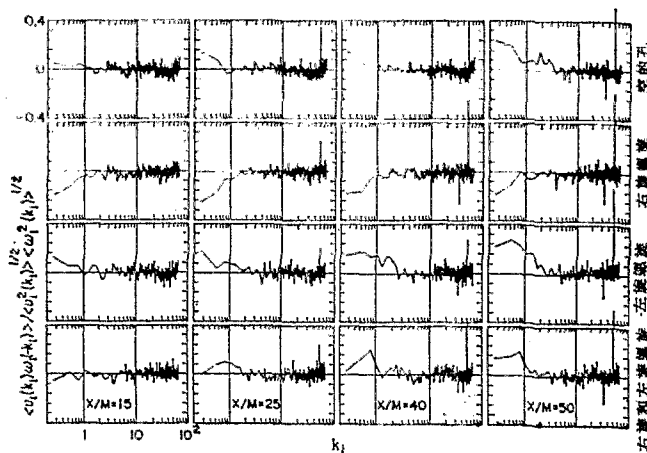


图3 在流过网格的盐水流动中 1 维归一化的螺旋度 ($u_1 \omega_1$) 谱 (取自 Kholmyansky et al 1990)

其中

$$g(0) = (1/6) \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle \quad (6.2)$$

(6.1) 左边的相关量是用不同的 3 排探头所得的数据来计算, 并且它们的值与假设对于小 r , $g(r) \sim g(0)$ 时 (6.1) 右边的值相一致。

Wallace & Balint (1990) 研究了以上结果中的一些 (仅对空气流)。特别是他们解释了非零平均螺旋度的观察结果和网格湍流流动中速度与涡量之间角度余弦的概率分布的不对称性, 是由于“各排探头与平均流的方向性有角度非常小的偏差”的结果。Tsinober et al (1990, 1991) 解释这种偏差可能由于这种方法的缺点所引起 (由于使用探头的公共端座以及对探头与平均流非常精确的同向性和探头结构高度精密的校准要求而引起的)。

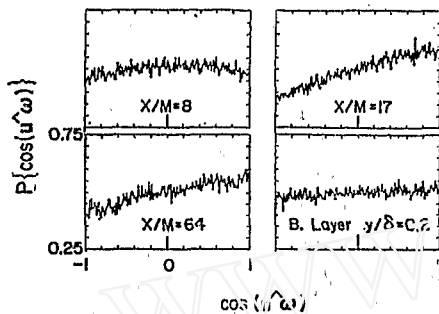


图 4 在空气流中离开网格 3 种距离 (以网孔为单位) 处以及在边界层 $y/\delta=0.2$ 处速度与涡量矢量之间角度之余弦的概率密度函数 (取自 Tsinober et al 1991)

6.4 应用螺旋度密度作为伪标量的量来表征复杂的 3 维流动

Levy et al (1990) 非常有效地利用了螺旋度密度和归一化螺旋度密度 (即速度与涡量矢量之间角度的余弦) 来表征以非零攻角流过轴对称体的流动。特别是他们利用了集中在涡核轴附近 $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} / u\omega$ 是最大的这样的事实, 以使通过映射相对螺旋度就有可能定出涡核和它的轴的位置 (也可参看 Melander & Hussain 1990)。另一个有意义的方面是在穿过分离线或再附线时螺旋度密度改变符号, 这在定出这些线的位置时是个有用的性质。最后, 螺旋度密度的映射允许我们定出二次涡旋的位置 (参看图 5)。

6.5 螺旋度和涡旋破碎之间的可能关系

涡旋破碎 (vortex breakdown) 这个术语通常用来表示集中涡旋具有轴向速度分量的一类现象 (最新的评述文章参看 Escudier 1988, Leibovich 1991)。这些现象用流动几何 (或拓扑) (流动几何导致依赖于流动条件的各种类型的有组织的结构) 的定性变化来表征, 具有一个旋转凸缘的圆筒中的 Vogel-Ronnenberg 流动 (图 6, 取自 Escudier 1984) 可充分说明这种现象。值得注意的是, 具有非零轴向速度的 (集中) 涡旋流动一般都具有大的螺旋度。因此由于涡旋破碎而引起的流动拓扑的定性变化想来可能与螺旋度的大变化密切相关, 于是螺旋度可能对这类流动的表征和分类是一个合适的参量。

7 数值实验

André & Lesieur (1977) 开创了螺旋度对湍流影响的数值研究, 用一个“涡衰减拟正规马尔可夫化的 (eddy-damped quasi-normal markovianized) (EDQNM)” 二点闭包, 他们指出, 具有有效平均螺旋度 (significant mean helicity) 的均匀湍流, 比起具有零平均螺旋度的均匀湍流来有慢得多的衰减率。这个结果由 Van (1987 未发表) 和 Polifke &

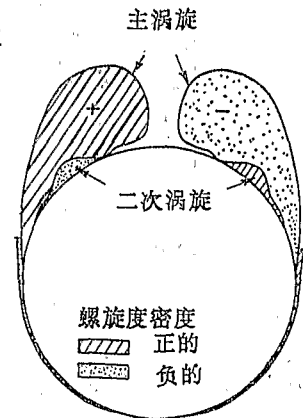


图 5 在以 40° 攻角绕卵形圆柱体流动的横截面中的螺旋度密度 (取自 Levy 1988)

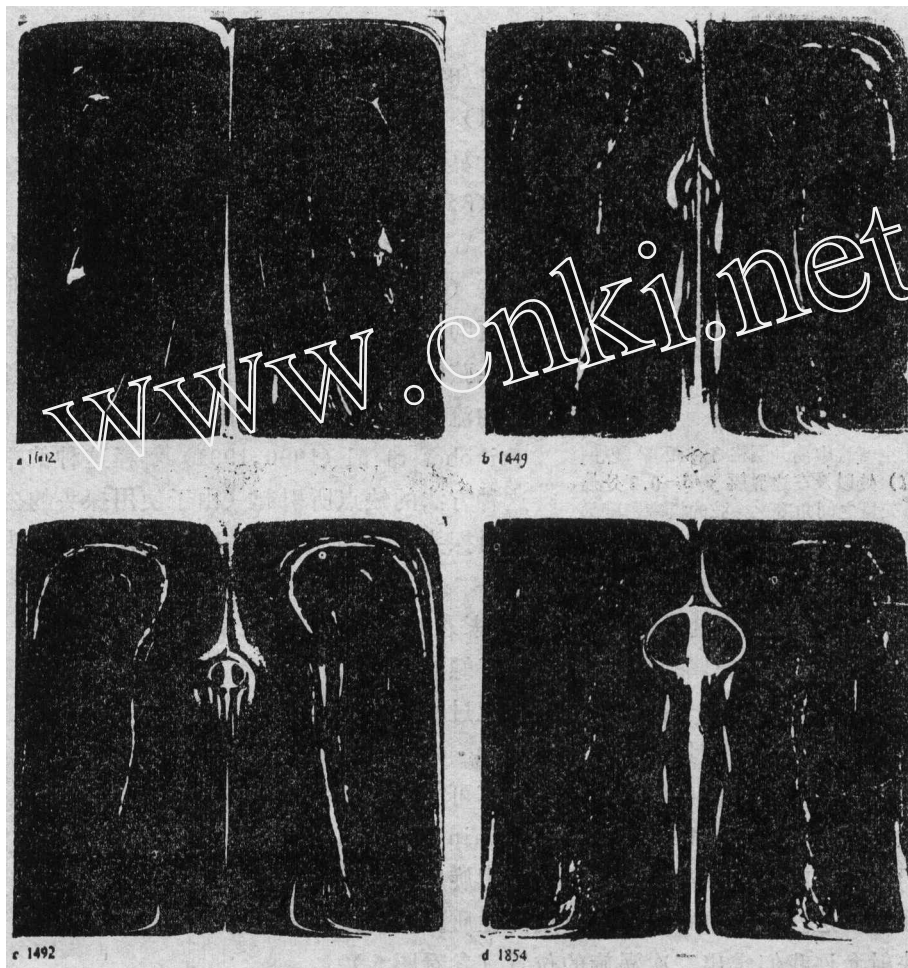


图6 具有较低旋转凸缘的固定圆筒中的流动结构 ($H/R=2$, Ω^2/ν 为4个值, 其中 H 为高度, R 为圆筒半径, Ω 为旋转凸缘的角速度) (取自 Escudier 1984)

Shtilman (1989) 通过直接数值模拟证实了。

数值模拟的主要任务之一是确定速度和涡量矢量之间角度的统计性质。首先进行这种类型研究的是 Pelz et al (1985)。他们发现, 对于从一种初始的“Taylor-Green”状态 (参看 Brachet et al 1983) (在这种状态中初始螺旋度密度恒等于零) 发展起来的流动, 在速度与涡量之间存在着大的同向性概率 (Large probability of alignment)。他们还发现, 正如第5节讨论所提出的那样, 这种同向性在具有低耗散的区域中更明显 (还可参看 Shtilman et al 1985)。然而后来的近乎各向同性的湍流 (增强和衰减二者) 的计算 (Pelz et al 1986, Kerr 1987, Ashurst et al 1987, Rogers & Moin 1987, Shtilman et al 1988, Herring & Metais 1989) 表明, 这种同向性的趋向不像最初所相信的那样强: 在两个矢量之间角度 θ 的余弦的概率密度, 在 $\cos\theta = \pm 1$ 时比 $\cos\theta = 0$ 时至多也不过大30% (还可看 Kraichnan & Panda 1988)。况且, 条件抽样技术没有提供任何有关低耗散与高同向性之间相关的证据。Tsinober (1990) 评述指出, 高螺旋度意味着低耗散 (因为在极端情况下在 u 平行于 ω 的区域中没有任何非线性能量传递给小尺度), 但低耗散并不一定意味着高螺旋度 (例如流动可

以局部是 Euler 流动而不是 Beltrami 流动)。上面所指的条件抽样有低耗散的限制；如果抽样建立在高螺旋度密度条件的基础上，那就可能得到不同的结果。根据 Metcalfe (参看 Hussain 1986), Melander & Hussain (1988) 和 Hussain et al (1988) 的直接数值模拟，在自由剪切流中似乎存在着一种反对射，这些数值模拟显示出在高螺旋度密度区域与大耗散区域之间明显的分离。另一方面，Rogers & Moin (1987) 研究了均匀剪切流和完全发展的明槽流，没有发现任何有关这种反对射的迹象。

所有这种类型研究的一个困难是，与在 Lagrange 域上积分的螺旋度不一样，螺旋度密度不是 Galileo 不变量。如果“相互作用涡子的海洋”的情景有任何真实性——这些涡子是湍流的拟序结构——那末，人们应该在随占优势的大尺度结构一起运动的参考标架中的任何一点计算出螺旋度密度。达到这种完善化程度的技术还没有能充分地发展。

关于这些流动的总螺旋度的行为知道得极少。在具有初始非零平均螺旋度的近乎各向同性流动的情况下 (Pelz et al 1986, Polifke & Sheilman 1989), 资料对比得出平均螺旋度单调地衰减到零，尽管 Shtilman et al (1988) 已发现了随时间的涨落，甚至发现了平均螺旋度的符号改变。当初始状态具有零平均螺旋度，但在高阶却是弱反射不对称时，有迹象 (采用 Clebsch 变量) 表明，可以产生实际的非零平均螺旋度，这是可以用具有反射对称性湍流的统计不稳定性以使得到破坏这种对称性的扰动来解释的一个结果。Kit et al (1988) 和 Levich & Shtilman (1988) (在相当有限的计算资料的基础上) 作出关于在大尺度中自发的对称性破坏和拟序性 (coherence) 形成的断言。这种讨论建立在如第 1 节中所描述那样的螺旋度涨落量度不变性的基础上 (Levich & Tsinober 1983)。Polifke (1991) 研究了 this 断言，他指出，小尺度中小的相的拟序性可能足以破坏 Levich & Tsinober “I-不变量”的 (绝热) 不变性。在他的计算中，Polifke 观察了小尺度中相当明显的相的拟序性，也就是螺旋度谱对大波数的相当大范围有相同的符号，并且有比从拟 Gauss 近似中得到的更大的值 (Yamamoto & Hosokawa 1981)。然而，在某些情况下在大波数时螺旋度谱的符号相对于所需要的平均螺旋度的耗散来说是错的。平均螺旋度事实上展示了一种非常类似于 Shtilman et al (1988) 所得到的那样的行为。

8 未来的展望

未来的有些情况是其中的螺旋度，或更一般地说没有反射对称性是根本上重要的，在本节中将简要地讨论这些情况。

8.1 斜扩散

螺旋度通过湍流对无源标量扩散的影响由 Moffatt (1983) 研究了。如果湍流影响到平均的标量梯度 \mathbf{G} ，那就产生湍流通量 \mathbf{F} 。类似于用在平均场电动力学中的那样的双尺度分析 (第 4 节) 得出 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 之间的线性关系。其首阶取简单形式

$$F_i = -\mathcal{D}_{ij} G_j \quad (8.1)$$

其中 \mathcal{D}_{ij} 是由湍流的统计性质和与流体有关的标量的分子扩散系数所确定的张量。 \mathcal{D}_{ij} 的对称部分提供了涡扩散率，它在等于零的分子扩散率的极限情况下，恰好是 Taylor (1921) 所描述的“通过连续运动的扩散 (diffusion by continuous movements)”。

然而 \mathcal{D}_{ij} 还可能有反对称部分

$$\mathcal{D}_{ij}^{(a)} = \varepsilon_{ijk} \mathcal{D}_k^{(a)} \quad (8.2)$$

这可以给平行于 \mathbf{G} 的热通量提供额外贡献:

$$\mathbf{F}^{(a)} = \mathbf{D}^{(a)} \wedge \mathbf{G} \quad (8.3)$$

这就是可以被描述成“斜扩散 (skew diffusion)”的现象。只有当湍流没有反射对称性时伪矢量 $\mathbf{D}^{(a)}$ 才是非零的。如果采用第3节中所描述的那种类型的1阶光滑理论 (smoothing theory), 则 $\mathbf{D}^{(a)}$ 与螺旋度谱函数有关, 即

$$\mathbf{D}^{(a)} = -\frac{1}{2} \iint \frac{\omega \mathbf{k} H(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 (\omega^2 + \pi^2 k^4)} d\mathbf{k} d\omega \quad (8.4)$$

如果相对于频率参量 ω 的符号 H 是对称的, 则此积分是零, 但一般说来对 H 并不需要有这种约束, 而且积分是非零的。这种效应可能还与在湍流统计理论中没有时间反演性 (time reversibility) 有关, 并且在这种意义上, 斜扩散的出现是 Onsager (1931 a, b) 对称关系破坏的表现形式。

甚至对于2维流动, 斜扩散效应也可以出现——尽管不是在1阶光滑的层次上。事实上在3次方平均层次上没有反射对称性是造成这种效应的主要原因。用物理术语来说, 如果在一个方向 (比如说反时针方向) 上的涡超过相反方向上的涡而占优势, 那末对时间反演来说湍流不是统计上不变的, 于是就出现斜扩散效应, 并且当 Peclet 数是小量时, 伪矢量 $\mathbf{D}^{(a)}$ 将正比于 Peclet 数的3次方。这种类型的效应可以通过海洋和大气中2维湍流的标量扩散起一份作用 (Garrett 1980)。

8.2 AKA 效应

在运动粘度为 ν 的流体中诱导方程与涡量方程

$$\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (8.5)$$

之间的严格相似性提出平均场电动力学方法, 至少在形式上可以应用于涡量场。它必须是“在形式上”, 这是因为涡量场没有任何分为大尺度分量和小尺度分量的自然划分。然而, 我们可以进行一些形式上的处理, 并且这些形式上的处理显示出一些有意义的结构特性。在这种情况下, 双尺度分析得出与湍流有关的 Reynolds 应力同平均速度场之间的线性关系式

$$\langle u_i u_j \rangle = -A_{ijk} \langle u_k \rangle - \mathcal{N}_{ijkl} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l} + \dots \quad (8.6)$$

(Krause & Rudiger 1974)。这里, 张量系数 A_{ijk} , \mathcal{N}_{ijkl} , 等等, 原则上又是由湍流的统计性质来确定。首阶项在 Galileo 变换下不是不变式, 并因此是零, 除非有某个在湍流中施加的非 Galileo 不变量。级数的第二项更本质, 它有一个涡粘性项的结构, 也许还加上某种次要的效应。

Frisch et al (1987) 重新研究了首阶项可能的贡献, 他们通过与 α 效应类比, 把这种效应描述成“各向异性动力学 α 效应 (anisotropic kinetic α -effect)”或简称 AKA 效应。考虑一个 Reynolds 数特别低的模型, 在这个模型中湍流由无规体力分布所驱动。这时, 利用力场的统计性质显然可以计算第一个系数 A_{ijk} 。构造了一个得到非零效应力场的特殊例子:

$$\mathbf{f} = f_0 [\cos(ky + \omega t), \cos(kx - \omega t), \cos(ky + \omega t) + \cos(kx - \omega t)] \quad (8.7)$$

这是一个空间周期的力场, 它的图型 (pattern) 用以下速度相对于流体而运动:

$$\mathbf{v} = (\omega/k, -\omega/k, 0) \quad (8.8)$$

就是这种特点导致了 Galileo 不变性的破坏以及非零 A_{ijk} 的可能性。在后来的论文中, Sulcm et al (1989) 把最终产生的不稳定性应用到非线性区域, 并且指出能量不断增大地传递给此系统所具有的最小波数。由这种机理所产生的大尺度湍流有非零的螺旋度。注意, 力场(8.7)本身有零螺旋度, 但在时间反演 ($t \rightarrow -t$) 情况下它是非不变量 (noninvariant), 即一种与没有反射对称性密切相关的性质。

Moiseev et al (1983) (还可参看 Tseskis & Tsinober 1974) 在可压缩流体的湍流情况下发现了与 α 效应相似的类比。不管这种效应的本质是什么, Galileo 不变性的论据提出, 它的起源必定仍然是归因于对此问题的某种输入, 这种输入本身是非 Galileo 不变量 [像力场 (8.7)]。

8.3 在修正的 Euler 方程发展下的弛豫

正如一开始所强调的那样, 根据涡线被冻结在流体中这样的事实, 螺旋度是 Euler 方程的一个无粘性不变量。如果我们用一任意不可压缩可微速度场 v 代替实际流体速度 U 来修正 Euler 方程, 那末由于同样原因, 螺旋度仍然是修正方程的一个不变量, 并且事实上涡量场的拓扑通过修正方程守恒。然而, 一般地, 流动的动能不再是修正方程的一个不变量。Vallis et al (1989) 在研究弛豫过程可以导致 Euler 方程 [其中涡量场的拓扑 (而不是速度场的拓扑) 是规定了的] 的定常解时利用了这种性质。在这种情况下, Schwartz 不等式与 Poincaré 不等式的联立所得到的不是流动的能量下界而是它的涡量拟能 (enstrophy) 的下界:

$$\langle \omega^2 \rangle \geq q_0 |\mathcal{E}| \quad (8.9)$$

能量没有任何界, 因而不能保证弛豫过程导致非平凡的定常状态。

然而, 对于 2 维流动的特殊情况, 却有涡量拟能本身是守恒的附加约束。于是 Poincaré 不等式意味着能量存在一个上界。Vallis et al 利用选择

$$v = u + \alpha(\partial u / \partial t) \quad (8.10)$$

(这里 α 是一个负常数) 和有关的能量方程

$$\frac{d}{dt} \langle u^2 \rangle = -\alpha \langle u^2 \rangle \quad (8.11)$$

指出, 在这种情况下弛豫过程保证 Euler 方程在具有规定的常值等涡量线的拓扑时存在定常解。很明显, 这种定常状态根据流体 [使涡量场发生对流 (“等涡旋扰动”) 时的] 位移由最大动能来表征。因此这样构造的流动是稳定的 (Benjamin 1976)。

这种类型的过程已经由 Shepherd (1990) 根据一般的 Hamilton 观点进行了研究。到目前为止还不清楚, 是否可以实现所提出的过程以便计算 Euler 方程的新稳定解。如果根据 Vallis et al 的规定, 或者根据某种其他的规定这是可以实现的, 那末这种过程不仅对于层流理论, 而且对于湍流中的拟序结构, 都很可能是极其重要的。

参考文献 (126篇, 略)

程屏芬译自: *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24 (1992): 281—312. (董务民校)