

涡旋运动与混沌

吴锤结*

中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室, 北京(邮政编码100080)

提要 本文综述了利用非线性动力学方法研究涡旋运动的最新进展。通过典型例子的分析, 讨论了该领域的研究方法、主要困难和存在问题, 并提出今后的可能研究方向。

关键词 涡旋; 非线性动力学; 混沌; 涡流

我国已故著名流体力学家陆士嘉教授1984年曾精辟地指出:“流体的本质就是涡。因为流体经不起搓,一搓就搓出了涡。”涡旋运动及其相互作用在自然界和工程技术的各种宏观流动中,以及微观湍流结构中,起着十分重要的作用。应用传统的流体力学方法(包括计算流体力学方法),尚不足以把握非定常涡旋运动的全部丰富行为。近年来,人们开始把非线性动力学方法与传统方法结合起来,揭示出一些涡旋运动中的混沌现象,它们同流态转换、流致噪声和涡流掺混等都有密切联系。这一方向的深入研究将有可能把当代流体力学研究推到一个新的水平,并丰富和发展动力系统理论,有重要的基础意义和广泛的应用价值。本文综述了利用非线性动力学方法研究有涡流动的最近进展,目的是通过考察和综述典型范例,了解研究动态,掌握研究方法,介绍文献资料,以指导我们未来的研究。

1 研究方法简介

利用混沌理论研究有涡流动的动力特性时,采用 Euler 观点和 Lagrange 观点这两种基本观点。了解混沌流动复杂特性的关键在于弄清周期点的几何结构及流的局部分叉和整体分叉特性。

研究 Euler 流场的混沌时,必须对完全的偏微分方程 Navier-Stokes 方程进行截断处理,以得到一组低阶常微分方程组,然后对这一方程组所代表的有限维动力系统进行研究,如 Lorenz^[1]的工作。但由于无法保证截断后低维系统中的混沌也会在无限维的偏微分方程系统中出现,而且随着保留阶数的不同,有时会出现定性上不同的动力响应。所以在流体力学界,对用这种方法研究混沌问题一直存在着怀疑和争论。Shirer 与 Wells^[2]认为应用截断方法时必须满足的条件是:所得到的解在所有高阶模型及偏微分方程系统中也同样出现,即当

* 原工作单位:江苏工学院,镇江(邮政编码212013),现工作单位:空军气象学院,南京(邮政编码211101),

采用更高阶模型时不再出现新的稳态解,就可认为该模型是可用的。Marcus^[8]发现, Lorenz 模型之所以不能作为物理上可接受的湍流模型,其根本原因就是不能满足以上条件。另外,人们发现作了有限截断,所得到的模型只能反映偏微分系统中某些特定的混沌特性。在具体进行截断处理时,常用的方法有 Galerkin 法(见[4])和流场的局部级数展开(见[5])等方法。

研究 Lagrange 质点流混沌时,往往是基于 Euler 速度场,采用 Lagrange 观点,跟踪流体质点的运动,研究由此定义的动力系统。即

$$Dx/Dt = v(x, t) \quad (1.1)$$

对时间积分,得

$$x = f_t(x_0) \quad (1.2)$$

其中 x_0 为其初始位置。称 x 为流。如果流动是时间周期的,运用 Poincaré 截面法,则运动可表示为映射

$$x = f_T^n(x_0) = f^n(x_0) \quad (1.3)$$

其中, n 是流的周期数, T 是时间周期。此时,映射的质点轨迹在 Poincaré 截面上用一系列点来表示,而不是连续的轨迹。这样就将连续的流用离散的映射来表示。研究 Lagrange 混沌时,无需作人为的高阶截断。但由于 Euler 速度场的解析解一般无法得到,而且近似求得的速度场会对 Lagrange 混沌进一步产生影响,所以 Lagrange 混沌的研究难度总的来说比 Euler 流场中的混沌更大。直接研究 Lagrange 涡量的演化过程有可能从根本上揭示 Euler 流场中的混沌与 Lagrange 质点流混沌间的联系(见[6])。

2 无界空间中的涡旋运动与混沌

在本节中,讨论无界空间中涡旋运动的混沌特性。重点放在一些理论模型上,如 Tendril-Whorl 流、Arnold-Beltrami-Childress 流、Kelvin 猫眼流等。这些理论模型的解析特性相对较为简单,可深入研究它们的动力特性,总结出最基本的规律,从而为研究更为复杂的实际流动提供方法和经验。

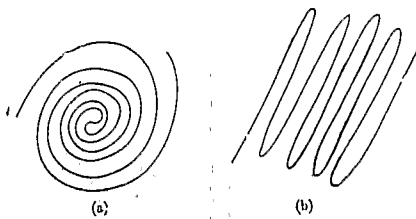


图1 TW流的基本结构。(a) Whorl流;(b) Tendril流

而为研究更为复杂的实际流动提供方法和经验。这里的例子有2维非定常流动,也有3维定常流动。在3维情形中流可以沿KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser)表面进行“Arnold扩散”,但其过程极为缓慢。3维流场的混沌速度场的动力特性极为复杂,但在这些流动中,已经知道长度以指数规律增长,且其质点流也是混沌的。

2.1 Tendril-Whorl 流 (TW流)

TW流是一种简单的周期流动,每个周期中的流由均匀拉伸流和非线性旋转流所组成。TW流有两种基本结构:①在稳定周期轨道的椭圆不动点附近形成的螺旋形流动,即 Whorl 流。②由不稳定周期轨道上的双曲不动点产生的指数拉伸、折叠结构,即 Tendril 流,见图1。Berry等^[7]首先研究了TW流,而后 Khakhar等^[8]对它进行了详细分析。

首先,进行局部分析。在极坐标系中,拉伸映射与旋转映射的综合作用是

$$f(r, \theta) = f_{ext} \cdot f_{rot}, \quad f: (r, \theta) \rightarrow (r', \theta') \quad (2.1)$$

其中,

$$r' = r[(1/\alpha^2)\cos^2\theta + \alpha^2\sin^2\theta]^{1/2} \quad (2.2)$$

$$\theta' = \text{tg}^{-1}(\alpha^2\text{tg}\theta) - Br\exp(-r) \quad (2.3)$$

$$\alpha = \exp(\varepsilon T_{\text{ext}}) \quad (2.4)$$

此处, B 为常数. 拉伸部分为 ($0 < t < T_{\text{ext}}$)

$$v_x = -\varepsilon x, \quad v_y = \varepsilon y \quad (2.5)$$

旋转部分为 ($T_{\text{ext}} < t < T_{\text{ext}} + T_{\text{rot}}$)

$$v_r = 0, \quad v_\theta = -\omega(r) \quad (2.6)$$

这里 T_{ext} 和 T_{rot} 分别为拉伸部分与旋转部分的时间, ε 为拉伸系数, $\omega(r)$ 是描述旋转率的系数. 对周期点 $\mathbf{P}^* = (r^*, \theta^*)$, 得

$$\theta^* = \text{tg}^{-1}(1/\alpha) \quad (2.7)$$

$$Br^* \exp(-r^*) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha - 1/\alpha}{2}\right) + 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M \quad (2.8)$$

对 $M = 0$ 时, 引入参数¹⁾

$$\beta = Be^{-1}/\text{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha - 1/\alpha}{2}\right) \quad (2.9)$$

由 (2.7), (2.8) 可得 TW 映射的不动点为

$$\theta^* = \text{tg}^{-1}(1/\alpha) \quad (2.10)$$

$$r^* \exp(1 - r^*) = 1/\beta \quad (2.11)$$

通过对该映射周期 1 不动点的局部线性化分析, 求得决定周期 1 不动点性质的参数 G . 对应于不同的 G , 不动点的性质亦不同, 具体情况如下: $G > 0 \rightarrow$ 双曲型; $G = 0 \rightarrow$ 抛物型; $0 > G > -1 \rightarrow$ 椭圆型; $G = -1 \rightarrow$ 抛物型; $-1 > G \rightarrow$ 双曲型.

通过对局部分叉的分析, 可知当 $\beta = 1$ 时, 在 $r^* = 1$ 处出现两个周期 1 的点, 这两点都是抛物型的; 随着 β 的增大, 这两点分别分裂成两个点, 其中位于 $r^* > 1$ 的范围的两个点是双曲的, 而位于 $r^* < 1$ 的范围的两个点是椭圆的. 所以在 $\beta = 1, r^* = 1$ 处出现鞍-结点分叉. 当 β 进一步增大时, 会发生 2 次分叉, 这时椭圆点先变成抛物点, 然后再变成双曲点. 同时, 还会产生两个新的周期 2 的椭圆点, 即发生了周期倍化. 对周期 2 的点可进一步进行局部分析, Khakhar 等发现在发生周期倍化时, 在周期 2 的发生点处, 它是抛物的, 而当 β 稍稍增大一点, 它们即变为椭圆的. 随着 β 的继续增大, 会发生第 2 次周期倍化, 这时周期 2 的点变为双曲型的, 同时, 在每个周期 2 的点处产生出两个周期 4 的椭圆点.

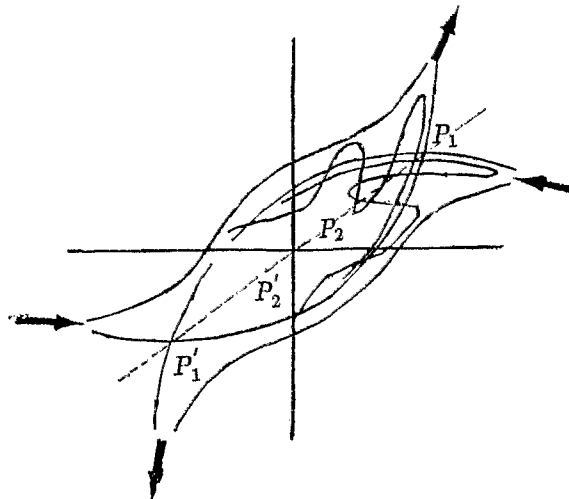


图 2 稳定流形与不稳定流形间的混沌区. P_1' 与 P_1 , P_2' 与 P_2 分别为外部及内部周期 1 点

1) Khakhar 等^[8]原文为 $\beta = Be/\text{tg}^{-1}[(\alpha - 1/\alpha)/2]$,

其次, 研究双曲型周期 1 的流形 (manifold) 之间的相互作用, 以考察 TW 映射的全局分叉特性. 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 旋转映射的作用就像是固体转动, 但当 $r < O(1)$ 时, 混沌特性局限于图 2 所示的一个区域中. 流通过围绕稳定流形周围的通道吸引外部质点流向内流动, 然后通过不稳定流形周围的通道离开. 当 $\beta < 1$ 时, 混合区消失, 流动在各处均十分规则. 通过研究, 发现如果拉伸流较弱且范围小, 则对所有的 β , 混合效果都不好. 对较大的 α 和 β , 外部周期点的流形与单一混合层产生的位于原点处的流形会相互作用. 由非线性动力系统理论, 可知混合层内并不是均匀的, 存在着许多环绕椭圆型点的 KAM 小岛. 这些小岛的尺寸随 α 和 β 的增大而减小.

Khakhar 等还指出 TW 映射具有同宿/异宿性质. 同宿/异宿横截意味着存在马蹄映射, 进而证明 TW 流确实存在混沌特性. 他们还给出了 TW 映射中马蹄映射的例证.

2.2 Arnold-Beltrami-Childress 流

1965 年 Arnold^[10] 提出满足 Euler 方程和不可压缩条件

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.13)$$

的一组 3 维定常流动的解.

$$\frac{dx}{dt} = u = A \sin z + C \cos y \quad (2.14)$$

$$\frac{dy}{dt} = v = B \sin x + A \cos z \quad (2.15)$$

$$\frac{dz}{dt} = w = C \sin y + B \cos x \quad (2.16)$$

其中, A, B, C 为实参数. 这一流动还满足 Beltrami 条件

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = 0 \quad (2.17)$$

Arnold 提出这一模型的目的是: 首先研究空间湍流的规律, 然后与事先存在的时间湍流相互作用, 以开辟一条研究完全发展湍流的道路.

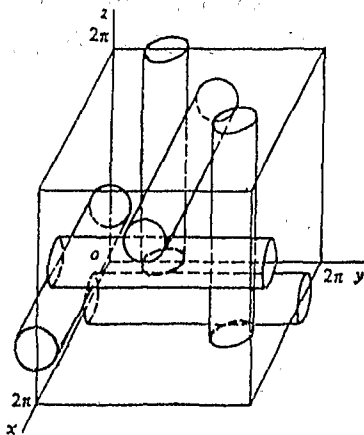


图 3 ABC 流中的 6 个主导涡旋

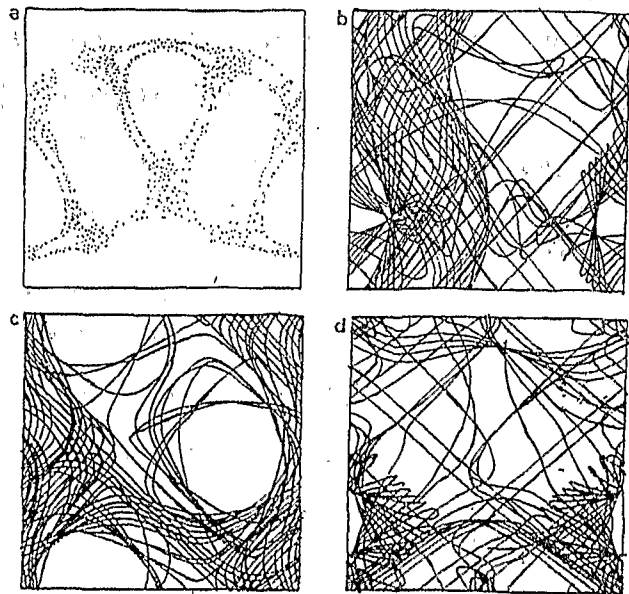


图 4 ABC 流的混沌质点轨迹, $A=B=1, C=0.65$. (a) Poincaré 截面图; (b) $y-z$ 平面投影; (c) $x-z$ 平面投影; (d) $x-y$ 平面投影

Childress^[10,11]也独立地研究了类似模型。Hénon^[12]在 $A=\sqrt{3}$, $B=\sqrt{2}$, $C=1$ 的条件下,证明了该系统存在混沌。Dombre 等^[13]称这种流动为 Arnold-Beltrami-Childress 流,简称 ABC 流。当参数 A, B, C 之一等于零时,该系统是可积的,这为解析地研究其 KAM 表面等动力特性提供了理论上的便利。Dombre 等对 ABC 流作了十分详细的研究,发现在 ABC 流中存在 6 个主导涡,如图 3 所示。进一步的研究表明这些涡不是直的,而是以左螺旋方式拧转的(周期为 2π)。这些涡共处于流场中的“周期柜”中(即, $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2\pi$ 的空间中),但又避免相互间的直接接触。在涡与涡之间的流场中有着极为丰富的流动结构。Dombre 等的数值模拟结果说明在 ABC 流的 3 维定常流中,流线上相邻质点的位置会随时间以指数规律迅速分开,但局限在一有界区域内游荡,其结果是单条流线看上去充满了整个混沌区域的空间,如图 4(引自 Aref 等^[14])。他们还应用摄动法研究了近可积情形和共振情形。ABC 流的动力学分析从一个侧面说明了 3 维涡旋的动力特征是极为复杂的。

Galloway 和 Frisch^[15]还研究了 ABC 流动的线性稳定性问题,他们的结果说明 ABC 流动在 Reynolds 数大于 10 时是不稳定的。用多重尺度法研究的结果表明在更小的 Reynolds 数时,该流动也是不稳定的。Moffatt^[16]也研究了无粘情形下 ABC 流动的稳定性问题。McLaughlin^[17]用摄动法研究了 ABC 流中粒子尺寸对混沌特性的影响,发现粒子的惯性和有效质量的存在有助于消除 Lagrange 湍流,并且粒子会被流动中涡旋的周期轨道或准周期轨道所俘获。对 ABC 流的深入探讨有助于空间湍流机理的研究。

2.3 Kelvin 猫眼流

Kelvin 猫眼流对剪切流中的混合过程及剪切湍流理论研究都具有重要意义。Kelvin 猫眼流最先由 Kelvin^[18]进行研究,它在流体力学的平行剪切流稳定性理论研究中引起人们持久的兴趣。

这里,我们讨论对 Kelvin 猫眼流进行扰动后流动的混沌特性。下列流函数

$$\phi(x_1, x_2, t) = Ux_2 + \left[\frac{\Delta U h}{2} \ln \left\{ \cosh \left[\frac{x_2}{h} \right] + A \cos \left(\frac{x_2 - Ut}{h} \right) \right\} \right] \quad (2.18)$$

所表示的流动为一列涡旋以速度 U 向 x_1 的方向移动,称为 Kelvin 猫眼流。其中,无量纲参数 A 代表涡量集中的程度, ΔU 为涡列两边的速度差, h 与涡间距成正比。迹线与质点轨迹的演化过程可由

$$dx_1/dt = \partial\phi/\partial x_2 \quad (2.19)$$

$$dx_2/dt = -\partial\phi/\partial x_1 \quad (2.20)$$

求得。在以速度 U 沿 $x_1 > 0$ 方向平移的相对坐标系中,流函数变为

$$\phi'(x'_1, x'_2) = \frac{\Delta U h}{2} \ln \left[\cosh \left(\frac{x'_2}{h} \right) + A \cos \left(\frac{x'_1}{h} \right) \right] \quad (2.21)$$

在这一坐标系中,流是自洽的,因此是可积的。对上式依 $\Delta U h/2$ 进行无量纲化处理(采用同样记号)

$$\phi'(x'_1, x'_2) = \ln(\cosh x'_2 + A \cos x'_1) \quad (2.22)$$

相对于运动坐标系的流体质点速度为

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\sinh x_2}{\cosh x_2 + A \cos x_1} \quad (2.23)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{A \sin x_1}{\cosh x_2 + A \cos x_1} \quad (2.24)$$

由于速度场有异宿点, 因此扰动将会导致其稳定流形与不稳定流形的相交. 利用 Melnikov 方法对简单的面积不变扰动^[10]

$$g_1 = \varepsilon \sin(\omega t) \quad (2.25)$$

$$g_2 = 0 \quad (2.26)$$

可得 Melnikov 积分为

$$M(t_0) = \left[\frac{-\varepsilon A \cos(\omega t_0)}{1+A} \right] F(\omega) \quad (2.27)$$

其中,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x_1) |_{\text{流形}} \sin(\omega t) dt \quad (2.28)$$

因 $M(t_0)$ 为受扰动流形间的距离, 可以预计在 $F(\omega)$ 的极值处 (对应于 $\omega = 0.3$ 附近) 会出现最强的混沌. 由 Poincaré 截面法 ($x_1 \bmod 2\pi$) (如图 5) 可见果然在 $\omega \approx 0.3$ 处的混沌最强.

进一步考虑各涡之间的相互作用时, 则须求助于数值计算. 以上所讨论的 Kelvin 猫眼流显然不是湍流的, 其根本原因在于它无法进行涡量混合. 为此, Danielson^[20] 人为地构造了一种能够进行涡量混合的 Kelvin 猫眼流, 从而得到混沌的 Euler 流场, 如图 6 所示.

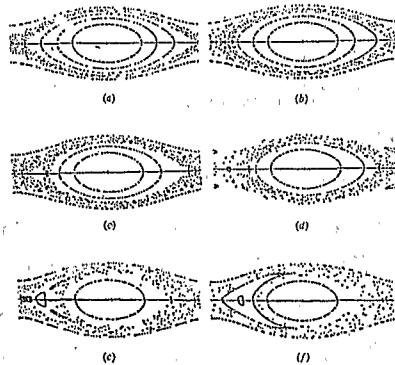


图 5 扰动猫眼流 ($A=0.8, \varepsilon=0.1$) 的 Poincaré 截面, 各图的 ω 值为: (a) 0.1 (b) 0.2 (c) 0.3 (d) 0.4 (e) 0.5 (f) 0.6

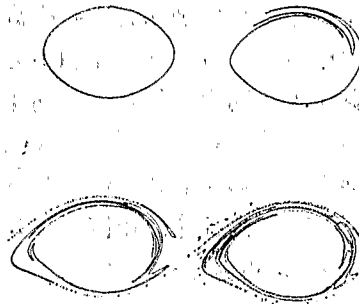


图 6 具有涡量混合的扰动猫眼流的等涡量线演化过程

在研究中视涡量为被动输运量, 令 (2.21) 中的 A 为函数 $A(X, t)$, 即在 $t=0$ 时, 流动满足 Euler 方程, 而在其后, 质点 X 所具有的 $A(X, t)$ 在 Lagrange 轨迹上不断变化, 以满足动量守恒条件所要求的 $D\omega_z/Dt \equiv 0$. 每个质点 X 都具有不同的 $A(X, t)$. 尽管这种做法有点牵强, 但仍不失为一个了解 Euler 流场混沌 (湍流) 的具有启发意义的例子.

2.4 无界空间中的其他涡运动

限于篇幅, 对其他无界空间中的涡运动简介如下.

①理想点涡模型: Aref^[21] 提出有界空间中的周期点涡流模型, 开创了混沌对流的研究。此后, Khakhar 等^[8], Doherty 与 Ottino^[22] 研究了无界空间中的周期点涡流模型。Rom-Kedar 等^[23] 运用非线性动力学方法解析地详细研究了 2 维涡偶在振荡流场中的混沌特性, 该模型的研究从理论上揭示了输运混合的基本过程。Aref 等^[14] 讨论了涡汇系统的竞争吸引域问题, 随着参数的变化, 系统的吸引域边界呈现出复杂的分形结构。

②剪切流中的涡旋与混沌: 为了了解木星湍流背景中高度有序、长期稳定的大红斑涡旋的机理, Marcus^[24,25] 利用数值试验研究了环形带状剪切流中的势涡结构演化问题。Meyers 等^[26] 得到与 Marcus 的计算结果及大红斑类似的结果。这些结果表明, 在准自转剪切湍流中, 有形成单个主导涡旋的强烈倾向, 并且增大湍流度会促使涡旋的合并过程加快进行。Antipov 与 Nezlin 等^[27] 也进行了类似的但在物理上有许多差别的试验。

③尾流中的涡旋与混沌: Williams Stuber 与 Gharib^[28] 试验研究了机翼受激尾流中各频率间的非线性相互作用, 他们发现当系统中有 1 到 2 个独立频率起主导作用时, 尾流呈规则状, 也就是或锁定在某个频率上或作准周期运动; 但加入第 3 个不可通约频率后, 尾流就呈现出混沌特性。这一混沌出现在低 Reynolds 数时, 但它与高 Reynolds 数时的湍流一样具有局域性, 当从规则向混沌转变时, 尾流中的涡旋结构和平均速度剖面发生显著变化。在完全可控的试验条件下, 发现了通往混沌的 Ruelle-Takens-Newhouse 道路的各种表现。

Sreenivasan^[29], Van Atta 与 Gharib^[30] 的试验及 Karniadakis 与 Triantafyllou^[31,32] 的研究表明, 受激圆柱尾流中的涡旋结构可在很低的亚临界 Reynolds 数 ($40 < Re < 150$) 时, 经过一系列分叉而进入混沌, 而且对圆柱尾流的混沌状态进行扰动会使流动输运过程产生突变, 其特征是输运量波动急剧增大。Elgar 等^[33] 采用双谱分析法研究了受激圆柱尾流中的涡旋脱落问题。

在某些条件下, 已发现闭合空间中流动向混沌或湍流转变的过程与低维动力系统相关, 但在开放空间中 (如尾流、剪切流和边界层等), 从理论上说具有无穷多个自由度, 转变过程是否也受制于低维动力系统是一个尚未弄清的问题。

④ 3 维涡旋运动: Widnall^[34] 综述了 3 维涡旋动力学研究进展, 认为对 3 维涡旋的不稳定分析有助于了解湍流的 3 维产生源机理。由涡旋的短波不稳定性理论^[35], 除了处于无界流场中的孤立竖直涡旋外, 任何具有分布涡量的涡旋对于短波扰动都是线性不稳定的, 且其增长速率等于流场的局部变形率。这一结果揭示了分离流 3 维性的根源。长波不稳定性与涡旋配对过程相联系。研究表明, 单个涡旋对 3 维扰动最不稳定, 而 Foppl 涡旋对 2 维扰动最不稳定。Kuwabara^[36] 认为可将 3 维涡旋运动视为由位置 x 和涡量 ω 所组成的动力系统, 提出涡子 (vorton) 模型的基本方程和数值方案, 并应用这一模型计算了缠绕 3 涡环和球内、外涡环的运动。Leonard 等^[37] 计算了 3 维涡管的相互作用, 发现其中具有极为丰富、复杂的空间结构。

⑤其他: Hellberg 与 Orszag^[38] 通过用 Navier-Stokes 方程 3 阶截断的非线性粘性扰动对无界空间中的椭圆涡旋进行扰动的数值模拟, 发现当 Reynolds 数增大时, 流动由一系列周期倍化而进入混沌, 并得到 Feigenbaum 常数 $\delta \approx 4.6692$ 。Oshima 等^[39] 研究了椭圆涡环的分叉问题。Aref 等^[40] 以及 Eckhardt 与 Aref^[41] 讨论了涡偶碰撞问题的混沌特性。Pasmanter^[42] 研究了潮汐流 2 维非定常模型的混沌对流问题。Aref^[43,44], Hasimoto^[45]

及 Aref 等^[40]对点涡系的动力特性的研究进展作了详细综述。

3 闭合空间及近壁流场中涡的几何结构和混沌特性

3.1 轴承流问题

谈庆明 (Tan Q M) 等^[46,47]最先对 2 维轴承流进行了非线性动力特性研究。与此同时, Aref 与 Balachandar^[48]也对其进行了数值模拟。而后 Swanson 与 Ottino^[49,50]及 Ottino^[10]从混合机理研究的角度对它进行了详细的实验和数值模拟研究。通过对偏心轴承流的内、外边界施加周期扰动, 在流动中即可出现同宿、异宿轨道。研究表明, 低阶周期点的流形起着主导作用, 并且对应于很宽的参数范围都会出现 Lagrange 混沌。值得注意的是, Aref 与 Jones^[51]发现轴承流中的混沌对流能促进流体分离过程。

轴承流 3 维问题^[52,10]的模型如图 7 所示。设轴向流动为压力驱动的 Poiseuille 流, 流动为具有时间周期性的蠕行流。令内、外转子的周期均为 T , 它们的切向速度为

$$V_{\theta, \text{外圈}} = U \cos^2(\pi t/T) \quad (3.1)$$

$$V_{\theta, \text{内圈}} = U \sin^2(\pi t/T) \quad (3.2)$$

可见, 内转子的切向速度是时间 t 的函数。由于 Poincaré 截面无法揭示沿轴向的流动结构, 所以了解流体质点运动的最佳方法是考察其脉线。由于计算脉线所要求的计算机内存、机时随时间以指数规律增长, 所以脉线的长期计算十分困难, 甚至是不可能的^[53]。图 8 给出脉

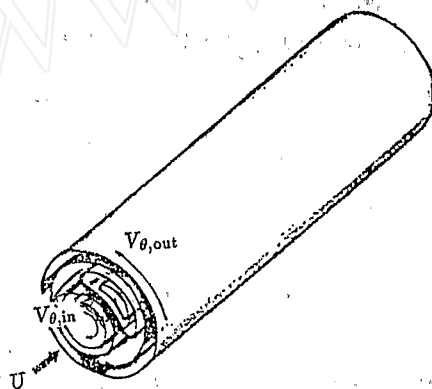


图 7 3 维轴承流模型

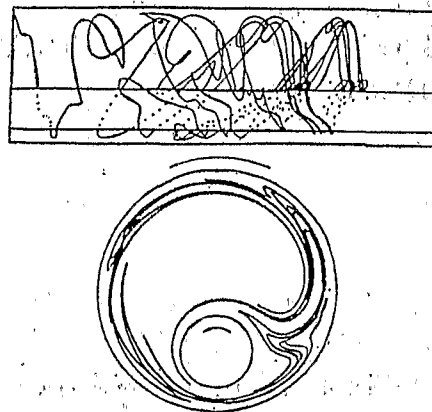


图 8 周期扰动 3 维轴承流的混沌迹线图 (流动从左向右)

线的一个例子。

3.2 波浪壁流动

Soby^[54]通过数值求解涡量-流函数形式的 Navier-Stokes 方程研究了在波浪壁通道内的流动。波浪壁方程为

$$x_2 = 1 + f(x_1), \quad x_2 = -1 - g(x_1) \quad (3.3)$$

其中, $f(x_1)$ 与 $g(x_1)$ 为三角函数, 它们是

$$f(x_1) = \frac{D}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) \right] \quad (3.4)$$

$$g(x_1) = \frac{K}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x_1}{L} + \phi\right) \right] \quad (3.5)$$

上、下两壁间的最小距离为 $2h$ ；流量 $Q(t) = 2hU \sin(2\pi\omega t)$ ，其中 U 为平均流速， ω 为频率。

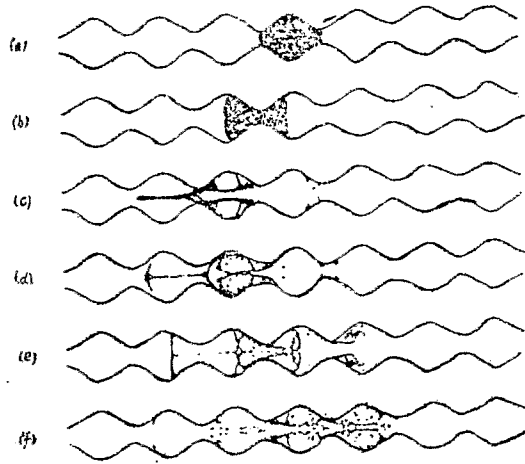


图9 波浪壁通道流。图示一个周期后的流动。 $Sr = 0.02$ ， $Re = 25$ ， ωt 为：(a) 0. (b) 0.25, (c) 0.5, (d) 0.6, (e) 0.75, (f) 1.0

当 $K = D$ ，且 $\phi = 0$ 时为对称通道；当 $K = 0$ 时，一个壁面是平的。由图9中可见，由于存在成对的涡旋（就像周期闪烁涡旋，见[8, 21, 22]），可以预计流动中会发生质点混沌。Ralph^[55]也对类似的流动作了数值模拟和流动显示研究。

由于涡旋的存在可以使流动产生混沌，但另一方面，在一定条件下，通过适当的非定常激发，也可以形成十分有序、更为稳定的涡旋。如Wu等^[56]及其所引文献的研究。在研究中，通过理论分析及数值求解2维非定常 Navier-Stokes 方程，找到一个合适参数范围 c/U (c 为壁面行波速度， U 为外流平均速度)，利用作正弦行波运动的动波浪壁，在壁面附近产生局限于壁面附近的

“滚柱轴承状”稳定涡网（如图10），从而大大减小了流动阻力。在研究中还发现，选择特定参数 (c/U) 及波浪壁振幅 A ，由行波壁面的非定常涡旋运动会导致其上方的自由表面出现极为复杂的表面波运动。



图10 动波浪壁流的相对速度场。 $a = 0.2$ ； $c/U = 0.414$ ；时间 t 为：(a) 2.1 (b) 6.01 (c) 19.01

3.3 近壁涡流结构

壁面附近的结构不稳定涡旋流与流动分离及湍流直接相联系。其速度场可由一个局部成立的级数展开来表示，而它必须是满足无滑移条件的 Navier-Stokes 方程在固壁处的局部解。所以，问题归结为确定级数的系数，并可通过改变一些未定的系数来考察流场拓扑结构的变化。当级数的最低阶系数变为零时，就会产生高阶奇性现象，这些现象发生在初始分离、初始涡旋形成及涡旋破裂即将发生之际。当远离分叉态时，已形成的结构稳定流一方面保持它的拓扑结构不变，另一方面流面、涡面会发生变形、拉伸和折叠。因此在研究混沌流动时，必须从局部描述向全局描述转变。

Euler 流场中的混沌与 Lagrange 质点流混沌之间的联系尚未搞清楚，但是已有大量由简单 Euler 流场产生复杂 Lagrange 质点流混沌的例子，如本文中的许多例子。有趣的是在混沌的 Euler 流场中不具有混沌的 Lagrange 质点流的情形也是存在的，如 Lorenz 系统^[57]。Danielson 与 Ottino^[58]应用上述方法研究了壁面分离泡流动从 Lagrange 质点流混沌向 Euler 流场中的混沌转变的过程，它具有重要的理论意义。

目前，研究 Lagrange 混沌的典型做法是在结构不稳定的定常流 $u(x)$ 上施加一个扰动

$\varepsilon u'(x, t)$, 使得

$$dx/dt = u(x) + \varepsilon u'(x, t) \quad (3.6)$$

而在 Danielson 与 Ottino 的研究中, 扰动源并非人为构造的, 而是由 Euler 流场提供的, 即研究下列系统:

$$dx/dt = u[x, A(t)] \quad (3.7)$$

这里张量 A 满足求解 Navier-Stokes 方程而得到的发展方程

$$dA/dt = f(A; p) \quad (3.8)$$

此处 p 是参数, 如 Reynolds 数. 这样, 速度场并非明显地依赖于时间, 而时间周期扰动是通过发展方程的 Hopf 分叉来提供的.

对边界点 p 的流场进行级数展开, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = u(x, t) &= u(p, t) + (x-p) \cdot \nabla u(x, t)|_{x=p} \\ &+ \frac{1}{2}(x-p)(x-p) \cdot \nabla \nabla u(x, t)|_{x=p} + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

记张量 $(1/n!) [\nabla \nabla \dots u(x, t)]_{x=p}$ 为 $A_{i, j, k, \dots}$, 对 2 维系统 i, j, k, \dots 分别取 1 或 2, 对 3 维系统取 1, 2 或 3. 系数 $A_{i, j, k, \dots}$ 由系统限制条件中求出, 即令 $A_{i, j, k, \dots}$ 满足 Navier-Stokes 方程和连续方程以及边界条件. 由于系数的个数往往比方程和边界条件的个数多, 所以还必须强制 A 满足另外一些条件, 可利用这些条件来构造流场, 如给定分离角、再附角等. 对分离泡附近流场作 5 阶展开, 并使之满足上述条件, Danielson 与 Ottino 得到 A 必须满足的方程组

$$\frac{dK}{dt} = \frac{-6(2K/3 + A_{1222})}{Re} \quad (3.10)$$

$$\frac{dA_{1122}}{dt} = \frac{-20A_{1122}}{Re y_c^2} + \frac{K^2}{3} \quad (3.11)$$

$$\frac{dA_{1222}}{dt} = \frac{-2(2K/3 + A_{1222})}{Re} - \frac{Re^3 y_c^2 K}{30} + 2KA_{1122} \quad (3.12)$$

$$\frac{dA_{122}}{dt} = \frac{12}{y_c^4 Re} \{ K(y_c + \alpha y_c^5) - A_{122} y_c^2 - A_{1222} y_c^3 \} \quad (3.13)$$

其中, $\alpha = Re^4 y_c^2 / 600$, y_c 为流场内驻点 $(0, y_c)$ 的坐标, K 与边界涡量 ω_s 的关系满足

$$\omega_s = -K(t)(x^2 - x_c^2) \quad (3.14)$$

此处 x_c 为分离点位置. 在这一组方程中事先给定内驻点位置, 考察以 Reynolds 数为参数的流场的分叉特性.

为了研究 Lagrange 混沌, 须求出 (3.8) 对应于上述情形的具体形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -Kx_2 + A_{122}x_2^2 + Kx_1^2x_2 + 3A_{1122}x_1x_2^2 + A_{1222}x_2^3 \\ &- \left(\frac{-Ky_c + A_{122}y_c^2 + A_{1222}y_c^3 - \alpha Ky_c^5}{y_c^4} \right) x_2^4 - \left(\frac{2K}{3} + A_{1222} \right) x_1^2 x_2^3 \\ &- \frac{5A_{1122}x_1x_2^4}{y_c^2} - \alpha Kx_2^5 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -Kx_1x_2^2 - A_{1122}x_2^2 + \frac{(2K/3 + A_{1122})x_1x_2^2}{2} - \frac{A_{1122}x_2^2}{y_0^2} \quad (3.16)$$

将方程 (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) 和 (3.16) 联立求解. 当 $Re = 2.5$ 时, 得到如图 11 a 所示的流场相轨迹图、图 11 b 的 Poincaré 截面图和图 11 c 的稳定流形与不稳定流形图. 可见流场发生 Hopf 分叉后出现 Lagrange 混沌.

当 $Re \rightarrow 3$ 时, Euler 流场的极限环失稳, 经过一系列周期倍化分叉转变为怪引子 (strange attractor); 而当 $Re = 3.3$ 时回复到新的周期状态; 当 Re 进一步增大时, 怪引子重新出现,

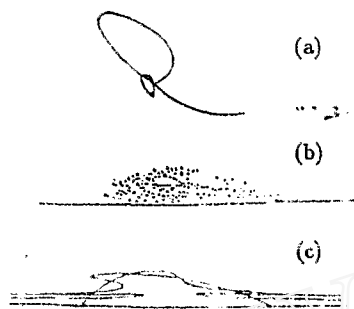


图 11 近临界涡旋流动, $Re=2.5$. (a) Hopf 分叉后的极限环; (b) Poincaré 截面; (c) 稳定流形与不稳定流形

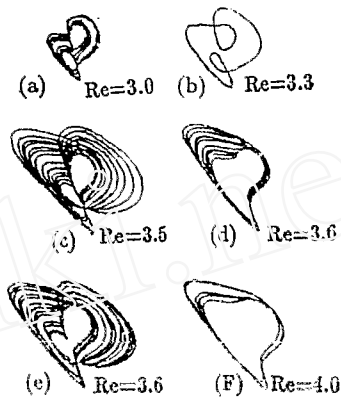


图 12 随 Re 变化的流场相轨迹图

如图 12 所示, 在 $Re > 4.0$ 以后, 吸引子又变为极限环, 但此时反映的不是真实的物理状态. 因此对于高 Reynolds 数流动, 展开阶数 (即速度相空间维数) 必须足够大, 才能反映真实情形.

Danielson 与 Ottino 还进一步分析了改变分离角与再附角以及展开点位置对系统动力特性的影响. 这一研究表明, Lagrange 质点流混沌与 Euler 流场中的混沌之间存在着内在联系, 即, 结构不稳定的流场导致质点混沌, 而在惯性力足够大时, 进而在 Euler 流场中产生混沌. 其中结构不稳定的流场是产生混沌流场的关键.

在以上模型中, 存在着一个致命的缺陷, 即时空不相关. 它对流场特性的影响比截断误差更为重要, 而这种时空不相关是级数展开法的本质缺陷, 不可能通过增加展开阶数得以解决. 它也是这类将 Navier-Stokes 方程作有限截断, 从而研究有限维动力系统的方法的共同缺陷.

3.4 闭合空间及壁面附近的其他涡旋运动

最后, 简要提一下几种十分重要的涡旋运动, 如 Bénard 对流, 同心圆柱 Couette 流中的 Taylor 涡, 空穴流及点涡、涡丝等. 在此仅列出一些主要参考文献.

对 Bénard 对流的混沌特性研究中最引人注意的是关于 Lorenz 怪引子的研究, 已有专著作了总结^[58]. Busse^[60] 讨论了 Bénard 对流中向湍流转捩的问题; Behringer^[61] 对 Bénard 对流作了十分详尽的综述. Belayev 与 Yavorskaya^[62] 研究了两旋转球间粘性流的湍流转捩过程. DiPrima 与 Swinney^[63] 讨论了同心旋转圆柱中的 Taylor 涡的稳定性及向湍流转捩的问题; L'vov 等^[64] 对 Taylor 涡的分叉及混沌特性进行了实验和数值研究. 空穴流也是一种闭合空间中的涡旋流, 在理论和实际中有着重要意义, Ottino^[18] 及其学生在这方面做了大

量的实验工作。Kimura^[66]和Hasimoto等^[60]分别研究了有界区域中点涡和涡丝的混沌运动。Jones等^[67]研究了扭转管路中的混沌对流。Bajer与Moffatt^[68]分析了球体中Hill涡旋在旋转、扭曲作用下的混沌流线。吴锺结^[69]研究了涡偶在周期扰动粘性流场中与固壁相互作用时Euler流场的混沌和Lagrange质点流混沌。Conlisk等^[70]讨论了3个等强度无粘点涡在平行壁面上方的混沌运动及涡旋的声发射(vortex chattering)问题。以往研究涡致噪声往往限于可积的涡旋运动,对混沌涡旋运动产生的噪声却缺乏了解。由于在开放相空间中,几乎所有的轨迹只与某截面有有限个交点,因此传统的非线性动力学方法(如Poincaré截面)失去效力。涡旋的声发射问题也是非线性动力学中的一个范例。关于这方面的研究详见[14,71,72]。

4 湍流中的涡旋与混沌

涡旋在湍流中的重要作用是众所周知的。对湍流拟序结构的研究表明涡旋动力学是湍流拟序结构理论的核心。继Theodorsen^[73], Kline等^[74]及Head与Bandyopadhyay^[75]关于湍流边界层内发卡涡(或马蹄涡)的研究及湍流发生的破裂-扫荡-喷射3阶段的定性描述之后,大量流体力学工作者集中研究了涡旋在湍流发生过程中的作用,取得了很大进展。十分全面的综述和评论可在刊物*Ann. Rev. Fluid Mech.*及*Rev. Mod. Phys.*上找到。利用非线性动力学方法研究湍流发生、发展及湍流中的涡旋的文章也很多,如Barenblatt等^[76], Swinney与Gollub^[77], Rand与Young^[78], Hatzivramidis与Hanratty^[79], Chapman与Kuhn^[80], Hunt^[81], McWilliams^[82]及Ottino^[83]等。但混沌与湍流之间的联系仍未弄清楚。混沌系统具有如下特征:①存在同宿/异宿横截;②存在马蹄映射;③至少存在一个正的Lyapunov指数;④具有复杂的Poincaré截面图像。而湍流的典型特征是:①Euler变量(如速度)具有复杂的信号;②具有混合能力;③能量从大尺度涡向小尺度涡传输;④具有涡量混合的能力;⑤Euler湍流一般是高Reynolds数流动。可见,湍流与混沌既有共同点,又不完全相同。

在此,我们简介将非线性动力学方法与实验数据相结合,从而成功地模拟边界层湍流发生过程中拟序结构的研究^[84]。在这一研究中将Navier-Stokes方程高阶截断而得到低维常微分模型方程,进而分析其解析特性和数值解。与众不同的是采用了从研究湍流拟序结构入手的方法,并利用试验数据确定系统的特征函数,从而成功地模拟了边界层内湍流发生时流向涡旋猝发、间歇等动力特性,提供了开放流动系统中真实湍流与低维混沌系统模型之间合理联系的第一个例子。但Aubry等的方法仅适用于湍流中大尺度拟序结构带有大部分总能量的情形。

Aubry等利用正交分解法^[85]在流动非常不均匀的垂直于壁面的方向上建立边界层的近壁理论模型;与Galerkin方法相结合,这种正交分解可得到一组基函数,用这组基函数构造得一组截断常微分方程组所包含的动能比其他同阶截断常微分方程组的动能都大。通过对3维Navier-Stokes方程的不同阶次截断的分析,最后得到一组低阶常微分方程组作为理论模型。对这组流动模型的分析与计算表明它不仅能抓住壁面层中拟序结构的静态特性,同时还能反映出它们的重要动力学特性,如间歇等。它还给出猝发过程自动起源于紧靠壁面的流动的证据。在研究中还发现外部边界层中的压力变化会触发猝发过程,因此猝发频率取决于外部压力信号,详见Aubry等^[84], Moin与Moser^[86]进行了类似的研究,他们利用模拟数

据库中的数据构造特征函数,其结果与 Aubry 等的不同.特别是,他们发现出现在间歇阵发之前的是极限环,而不是 Aubry 等发现的不动点.因此,所得的间歇特性也就不同. Moir 与 Moser 得到的间歇特性对分叉及涡旋粘性系数更为敏感.

值得注意的是, Bhat 等^[87]构造了一个简单的动力系统,从中发现了一些类似湍流的现象.但是,应用非线性动力系统理论能否解决湍流问题,人们的认识存在着分歧. Frisch 与 Orszag^[88]认为想要得到一蹴而就的、精确的湍流理论是不现实和不可能的. 钱俭^[89]认为在研究完全发展的湍流时,必须将非线性动力学方法与非平衡统计力学方法相结合. Ruelle^[90]指出,即使当湍流发生时流动的时间历程是混沌的,也难以得出在完全发展湍流中流动也仍是混沌的结论.

近年来,惯性流形理论的发展^[81,92]为湍流问题的研究开辟了一条新途径,提出了用惯性流形作为湍流中大涡和小涡相互作用的模型.但另一方面,严格地说,在 Navier-Stokes 方程中是否存在惯性流形,仍是一个尚未解决的问题.

混沌理论在湍流中的另一个重要应用领域是湍流的分形结构. Putterman^[93], Paladin 与 Vulpinai^[94]研究了分形在湍流强度谱密度函数中的应用; Sreenivasan 与 Meneveau^[95]以及 Prasad 与 Sreenivasan^[96]得到 2 维湍流边界层和湍流射流的分维 $D = 1.35 - 1.37$, 他们认为这是 2 维湍流的一般特征; McCauley^[97]详细讨论了多重分形在湍流中的应用.

5 结 语

通过考察以上几个例子,我们得到如下几点认识:

① 涡旋的本征非线性特性使得涡旋运动与混沌有着密切的内在联系,但涡旋的存在并非产生混沌流动的必要条件^[98,99]. 研究涡旋运动与混沌的基本方法是综合运用流体力学与非线性动力学的方法和手段. 然而,在研究时必须透彻了解流体力学与非线性动力学中的一些基本概念之间的关系和区别,如 Euler 流场中的混沌和 Lagrange 质点流混沌与空间湍流和时间湍流之间的联系和区别. Euler 流场中的混沌与 Lagrange 质点流混沌的联系和相互作用的研究具有深刻的理论意义和广阔的应用前景.

② 通过构造和分析涡运动的基本简化理论模型,有助于了解它们的动力学特性,从而为分析和研究真实流动提供方法和思路. 由于只有在 3 维流动中涡旋的形态才完整,所以研究的重点应放在 3 维定常或非定常涡流理论模型上.

③ 流场结构的拓扑分析和动力特性的数值研究(如 Poincaré 映射等)在研究中起着极为重要的作用,二者必须相互结合,缺一不可. 在采用数值方法研究混沌问题时,必须设法区分计算混沌^[100]与系统的真实混沌. 在挑选数值方法时,必须考虑它对系统非线性特性(尤其是混沌特性)的影响.

④ 由上述讨论可见,在涡旋的边缘部分最易发生混沌,而在涡旋内部则一般是有规律的流动. 所以,若要使流动为混沌的(如在混合问题中),则必须尽量减小涡旋的尺寸,同时尽量加大其强度. 达到这一目的的途径之一是利用几何的、动力学的各种方法使涡旋拉伸、叠合,在构造马蹄映射的同时通过拉伸涡管使其截面积变小,强度增大.

⑤ 湍流问题是经典物理中一个极难攻克的堡垒. 目前湍流(混沌)理论的研究大都集中在对时间湍流特性的研究,而对空间湍流(混沌)研究得不充分,时、空湍流(混沌)相互作用及完全发展湍流的混沌理论研究就更少了. 我们认为,在将目前的动力系统理论方法用

于解决湍流问题之前, 必须进行重大改进. 在湍流研究中, 涡旋的相互作用对流场的分叉、混沌等的动力特性起着决定性的作用. 深入研究 Euler 观点的涡旋与 Lagrange 观点的流体质点混沌特性将有助于揭示湍流的奥秘.

⑥利用非线性动力学方法对涡旋运动的非线性特征及波与涡旋相互作用的混沌理论研究处于刚刚起步的阶段, 研究者和研究成果都不多, 是一个大有发展前途的方向.

⑦最后必须指出, 目前的研究大都是引入各类非定常因素促使系统产生混沌, 但在更为实际的应用中, 往往是流动的内部参数起着主导作用, 如 Reynolds 数等. 可以预计, 未来的研究重点将放在流动内部参数的变化而引起的混沌, 以及它与外部非定常扰动相互作用而引起的混沌上.

笔者衷心感谢中国航空研究院吴介之研究员、美国田纳西大学航天研究院 (UTSI) 吴建民教授及 Trevor Moulden 博士所给予的指导和帮助.

参 考 文 献

- 1 Lorenz E N, *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963): 130-141.
- 2 Shirer H N, Wells R, Stability in Convective Flows, HTD-Vol. 54 (eds. Saric W S, Szewczyk A A). ASME, New York (1985): 11-16
- 3 Marcus P S, *J. Fluid Mech.*, **103** (1981): 241-255
- 4 Shire: H N (ed), Nonlinear Hydrodynamic Modeling, Springer, New York (1987)
- 5 Perry A E, Chong M S, *J. Fluid Mech.*, **173** (1986): 207-223
- 6 Wu J Z, Moulden T, On the Lagrangian vorticity, UTSI, Preprint (1991)
- 7 Berry M V, Balazs N L, Tabor M, Voros A, *Ann. Phys. (NY)*, **122** (1979): 26-63
- 8 Khakhar D V, Rising H, Ottino J M, *J. Fluid Mech.*, **172** (1986): 419-451
- 9 Arnold V I, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **261** (1965): 17
- 10 Childress S, Rep. AFOSR-67-0124, Courant Inst, New York (1967)
- 11 —, *J. Math. Phys.*, **11** (1970): 3063
- 12 Henon M, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **A262** (1966): 312-314
- 13 Dombre T, Frisch U, Greene J M, Henon M, Mehr A, Soward A M, *J. Fluid Mech.*, **167** (1986): 353-391
- 14 Aref H, Jones S W, Mofina S, Zawadzki I, *Physica*, **D37** (1989): 423-440
- 15 Galloway D, Frisch U, *J. Fluid Mech.*, **180** (1987): 557-564
- 16 Moffatt H K, *ibid.*, **166** (1986): 359-378
- 17 McLaughlin J B, *Phys. Fluids*, **31** (1988): 2544-2553
- 18 Kelyin-Lord, *Nature*, **23** (1880): 45-46
- 19 Ottino J M, The Kinematics of Mixing, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989)
- 20 Danielson T J, Chaos and turbulence in two model flows: the Kelvin cat eyes flow and flow near walls, Ph. D. thesis, Univ. Mass., Amherst (1989)
- 21 Aref H, *J. Fluid Mech.*, **143** (1984): 1-21
- 22 Doherty M F, Ottino J M, *Chem. Eng. Sci.*, **43** (1988): 139-183
- 23 Rom-Kedar V, Leonard A, Wiggins S, *J. Fluid Mech.*, **214** (1990): 347-394
- 24 Marcus P S, *Nature*, **331** (1988): 693-696
- 25 —, *J. Fluid Mech.*, **215** (1990): 393-430
- 26 Meyers S D, Sommeria J, Swinney H L, *Physica*, **D37** (1989): 515-630
- 27 Antipov S V, Nezlin M, Snezhkin E, Trubnikov A, *JETP Sov. Phys.*, **55** (1982): 85-95
- 28 Williams-Stuber K, Gharib M, *J. Fluid Mech.*, **213** (1990): 29-57
- 29 Sreenivasan K R, Frontiers of Fluid Mechanics (eds. Davis S W, Lumley J L). Springer, Berlin (1985): 41-67
- 30 Van Atta C W, Gharib M, *J. Fluid Mech.*, **174** (1987): 113-133
- 31 Karniadakis G E, Triantafyllou G S, *ibid.*, **199** (1989): 441

- 32 —, —, *Phys. Fluids*, A1 (1989b) : 628—630
- 33 Elgar S, Van Atta C W, Gharib M, *Physica*, D39 (1989) : 281—286
- 34 Widnall S, *Studies of Vortex Dominated Flows* (eds. Hussaini M Y, Salas M D), Springer, New York (1987) : 16—32
- 35 Krutzsch C H, *Ann. Phys.*, 35 (1939) : 497
- 36 Kuwabara S, *Fluid Dyn. Res.*, 3 (1988) : 163—178
- 37 Leonard A, Chua K, *Physica*, D37 (1989) : 490—496
- 38 Hellberg C S, Orszag S A, *Phys. Fluids*, 31 (1988) : 6—8
- 39 Oshima Y, Izutsu N, Oshima K, Hussain A K M F, *Fluid Dyn. Res.*, 3 (1988) : 133—139
- 40 Aref H, Kadtko J B, Zawadzki I, Campbell L J, Eckhardt B, *ibid.*, 3 (1988) : 63—74
- 41 Eckhardt B, Aref H, *Phil. Trans. R. Soc. London, A.* (1988)
- 42 Pasmantier R A, *Fluid Dyn. Res.*, 3 (1988)
- 43 Aref H, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15 (1983) : 345—389
- 44 —, Proc. 16th Int. Cong. Theor. Appl. Mech. (1984) : 43—68
- 45 Hasimoto H, *Fluid Dyn. Res.*, 3 (1988) : 1—12
- 46 Chaiken J, Chevray R, Tabor M, Tan Q M (谈庆明), *Proc. R. Soc.*, A408 (1986) : 165
- 47 —, Chu C K, Tabor M, Tan Q M, *Phys. Fluids*, 30 (1987) : 687—694
- 48 Aref H, Balachandar S, *ibid.*, 29 (1986) : 3515—3521
- 49 Swanson P D, Ottino J M, *Bull. Am. Phys. Soc.*, 30 (1985) : 1720
- 50 —, —, *J. Fluid Mech.*, 213 (1990) : 227—249
- 51 Aref H, Jones S W, *Phys. Fluids*, A 1 (1989) : 470—474
- 52 Franjone J G, Ottino J M, *Bull. Am. Phys. Soc.*, 32 (1987) : 2026
- 53 —, —, *Phys. Fluids*, 30 (1987) : 3641—3643
- 54 Schy I J, *Chem. Eng. Sci.*, 40 (1985) : 2129—2134
- 55 Ralph W P, *J. Fluid Mech.*, 168 (1986) : 515—540
- 56 Wu J M, Wu J Z, Wu C J, Vakili A D, *Int. Symp. on Nonsteady Fluid Dyn.*, Toronto, Canada (1990)
- 57 Falcioni M, Paladin G, Vulpiani A, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 21 (1988) : 3451
- 58 Danielson T J, Ottino J M, *Phys. Fluids*, A2 (1990) : 2024—2035
- 59 Sparrow C, *The Lorenz Equations*, Springer, New York (1982)
- 60 Busse F H, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* (eds. Swinney H L, Gollub J P), Springer, New York (1981) : 97—137
- 61 Behringer R P, *Rev. Mod. Phys.*, 57 (1985) : 657—688
- 62 Belayev Y N, Yavorskaya I M, *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (eds. Barenblatt G I, Looss G, Joseph D D), Pitman, Boston (1983) : 61—70
- 63 DiPrima R C, Swinney H L, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* (eds. Swinney H L, Gollub J P), Springer, New York (1981) : 139—80
- 64 L'vov V S, Predtechensky A A, Chernykh A I, *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (eds. Barenblatt G I, Looss G, Joseph D D), Pitman, New York (1983) : 238—280
- 65 Kimura Y, *Fluid Dyn. Res.*, 3 (1988) : 98—104
- 66 Hasimoto H, Ishii K, Kimura Y, Sakiyama M, *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids* (ed. Tatsumi T), North-Holland (1984) : 231—237
- 67 Jones S W, Thomas O M, Aref H, *J. Fluid Mech.*, 209 (1989) : 335—357
- 68 Bajer K, Moffatt H K, *ibid.*, 212 (1990) : 337—363
- 69 吴钟结, 非定常扰动下粘性涡偶的动力特性, 待发表
- 70 Conlisk A T, Guezennec Y G, Elliott G S, *Phys. Fluids*, A1 (1989) : 704—717
- 71 Henon M, *The inclined billiard*, Observatoire de Nice, Preprint (1986)
- 72 Eckhardt B, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20 (1987) : 5971—5979
- 73 Theodoreson T, *Proc. 2nd Midwestern Conf. on Fluid Mech.*, Ohio State Univ, Columbus, Ohio (1952)
- 74 Kline S J, Reynolds W C, Schraub F A, Rundstandler P W, *J. Fluid Mech.*, 30 (1967) : 741—773
- 75 Head M R, Bandyopadhyay P, *ibid.*, 107 (1981) : 297—338
- 76 Barenblatt G I, Looss G, Joseph D D, (eds.) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, Pitman, Boston (1983)
- 77 Swinney H L, Gollub J P (eds.), *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Springer, New York (1981)

- 78 Rand D A, Young L S (eds.) . *Dynamical Systems and Turbulence*. Springer, New York (1981)
- 79 Hatzivramidis D T, Henratty T J. *J. Fluid Mech.*, **95** (1979) : 655—679
- 80 Chapman D R, Kuhn G D. *ibid*, **170** (1986) : 265—292
- 81 Hunt J C R. *ibid*, **190** (1988) : 375—392
- 82 McWilliams J C. *ibid*, **219** (1990) : 361—385
- 83 Ottino J M. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **22** (1990) : 207—253 [混合, 浑沌性平流, 和湍流 (遼务民译), 力学进展, **22**, 2 (1992) : 228—255]
- 84 Aubry N, Holmes P, Lumley J L, Stone E. *J. Fluid Mech.*, **192** (1988) : 115—173
- 85 Lumley J L. *Stochastic Tools in Turbulence*. Academic, New York (1970)
- 86 Moin P, Moser R D. *J. Fluid Mech.*, **200** (1989) : 471—509
- 87 Bhat G S, Narasimha R, Wiggins S. *Phys. Fluids*, A **2** (1990) : 1983—2001
- 88 Frisch U, Orszag S A. *Physics Today*, **1** (1990) : 24—32
- 89 钱俭, 中国科学基金 (1989) : 30—33
- 90 Ruelle D. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A427** (1990) : 241—248
- 91 Teman R. *Infinite Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*. Springer, New York (1988)
- 92 ———. *Physica*, **D37** (1989) : 146—152
- 93 Pattenman S. (S. 普特曼) (王本仁, 吴君汝译). *经典流体力学, 非线性声学 and 近代物理*. 科学出版社, 北京 (1989)
- 94 Paladin G, Vulpinai. *Fractals in Physics* (eds. Pietronero L, Tosatti F). Elsevier, New York (1986)
- 95 Sreenivasan K R, Meneveau C. *J. Fluid Mech.*, **173** (1986) : 357—386
- 96 Prasad R R, Sreenivasan K R. *Phys. Fluids*, **31** (1988) : 2393
- 97 McCauley J L. *Phys. Rep.*, **189**, 5 (1990) : 255—266
- 98 Jones S W, Aref H. *Phys. Fluids*, **31** (1988) : 469—485
- 99 吴钰结. 闪烁偶极子流混沌及其混合机理研究. *水动力学研究与进展*, **7**, 1 (1992) : 66—71
- 100 Lorenz E N. *Physica*, **D35** (1989) : 299—317

VORTEX MOTION AND CHAOS

Wu Chui-jie*

Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics, Academia Sinica

Abstract Vortex motions are reviewed from the viewpoint of nonlinear dynamics, with a special stress on the methods and difficulties of using the concepts of chaotic dynamical system. The possible future developments are also outlined.

Keywords *vortex; nonlinear dynamics; chaos; turbulence*

* Permanent address: The Air Force Institute of Meteorology, Nanjing, 211101.