

临界点现象：大长度标度的 普适性物理学 (I)

Alastair Bruce David Wallace

编者按 英国剑桥大学出版社1989年出版了著名物理学家 Paul Davies 主编的综述论文集《新物理学》。中国科学院“科技计划译丛”1991年第2期刊载了 P. Davies 撰写的“序言”和概括介绍全书内容的第1篇文章“新物理学综论”的译文，现转载其“序言”如下：

许多上了年纪的科学家十分留恋本世纪的头30年，认为那时是物理学的“黄金时代”。然而，历史学家却可能把那些年看成是“新物理学”的黎明时期。量子论和相对论准备好的那些事件只是到今天才全面影响着科学，许多物理学家认为“黄金时代”不过是革命的开始。

在物理学发展得极其迅速的当前时期，任何想给基础研究的前沿拍摄下一幅“快照”的企图，都必然是冒险为之风险的。《新物理学》一书的意图是打算交流最新思想的某些精华，而不是要陷入一大堆名词术语之中。有些材料无疑将会相当迅速地成为过时的东西，这是我们可以预料到的。但是，本书的大部分内容将会有长久存在的价值。

本书每篇文章的作者不仅是国际上公认的评论家，而且就他们各自的成就来看，都是极其杰出的科学家。他们对他们所讨论的领域都作出过卓越的贡献。他们撰写的文章总的说来相当于权威刊物“科学的美国人 (Scientific American)”或“新科学家 (New Scientist)”的层次，虽然在某些地方借助于更加高深的论述是不可避免的。所有这些作者都竭力少用数学，避免过多使用太专门的行话。书中出现的数学或者是初等的，或者是局限于特殊章节需要的。书末附有词汇表以帮助了解有关技术术语。

我希望，这种注意读者接受程度的作法，将使本书绝大多数文章容易为非专家的读者所理解。尽量不作编辑上的改动，使各篇文章得以保持该文作者个人的风格。我希望，这将赋予本书不拘一格的、亲切的韵味。我认为本书不是一本百科全书，而是每位作者个人展望最富挑战性的那些学科前景的一本文集。

Paul Davies

英国泰茵河畔纽卡斯尔大学

从本期起，本刊将陆续译载该书的部分文章。下面刊载的“临界点现象”是该书的第8篇综述论文。

8.1 引言：临界点现象的新物理学

在大气压力和大气温度下， H_2O 是作为液体存在的，也就是水。在大气压下温度低于

100℃时，液体状态，或液相一直是常见的状态。在100℃时水将沸腾，温度超过100℃时，H₂O的存在形式为蒸气相，也就是蒸汽。在 $T_b = 100^\circ\text{C}$ 时发生的状态变化称为相变。相变伴

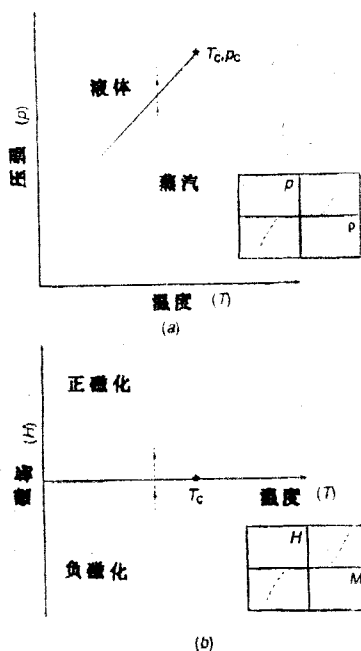


图 8.1 (a) 流体的临界点。在沸腾曲线 $T_b(p)$ 上，流体的液相和蒸气相共存，在恒定温度下压强变化时的密度曲线图(插图)(灰色路径)示出了在相共存线上的突变。共存曲线在临界点处终止，在该点两相的密度差为零，并且两相合并成单一的气相。(b) 磁体的临界点。在临界温度 T_c 以下，磁体具有磁矩。磁矩的方向可以用一个磁场 H 来改变，在零磁场线上，由磁矩方向来区别的不同的相共存。当在恒定温度下磁场变化时(灰色路径)，磁化 M 的方向在相的共存线上是反向的(插图)。共存线在 T_c 处终止，这里磁矩为零，并且不同的相合并为单一的顺磁相

现象的研究有着可追溯到19世纪的悠久历史。至于为什么旧的或新的临界点物理学在任何情况下都将是特别有意义和特别重要，我们的粗略的开场白并不能对此提供任何启发。

事实上，临界现象的研究对本书内容提出的要求，如果表面上看，可能是非常容易保证的。在过去10年大量涌现出的研究文献中找到了这个领域中丰富的“新”物理学存在的证据，这些研究文献在很大程度上是由于1971年Cornell大学的Kenneth Wilson发表的文章的推动而产生的。作为这些发展特别有意义和特别重要的直接证据，我们可以简单地引用1982年授予Wilson的Nobel物理奖。按本文的内容我们将描述概念的激发(“为什么”)和技术工具(“如何”)两者，着重指出在临界点现象领域中兴趣方面和活动方面的这种值得注意的高潮。然而，这里可以有效地确定它们的关键因素。

“为什么”的问题主要在普适性(universality)观念上，在该词的两相相当不同的意义上找到了回答。首先，临界点所蕴含的重要性随着认识临界点提出的问题是“普适性的”问题而增长了。也就是说，对物理科学中所有类型的问题来说临界点是一个普适性的问题。

随有流体密度的急剧变化：给定质量的蒸气相体积约为同样质量的液体体积的1600倍，其密度则相应地减小。沸腾温度 T_b 与压强 p 有关。当压强超过大气压时，沸腾温度高于 100°C ；而且在沸腾时产生的流体密度的突变要比相变发生在 100°C 时的小。在压强增大时这种趋势持续发生：沸腾温度 $T_b(p)$ 两边的液相和蒸气相的密度差将平滑地减小，直到压强 $p_c = 218 \text{ atm}$ 时(此时 $T_b = 374^\circ\text{C}$) 此密度差完全变为零。参量 p_c 和 $T_c = T_b(p_c)$ 一起确定了流体的临界点(图8.1(a))

在室温下，铁作为铁磁体存在。铁磁体相的突出特点是它的磁矩，磁矩表现为材料吸引其他铁类材料的能力，表现为它本身有定向的排列(在指南针行为中是非常明显的)，以致它的磁矩与一外磁场排起来。当温度增高时，铁的磁矩平滑地下降，一直到 $T_c = 770^\circ\text{C}$ 时它完全变为零。参数 T_c 确定了磁体的临界点(图8.1(b))。

本文涉及在临界点处或接近临界点处的物理系统的行为。并不一下子就可以看得清楚，这种行为的研究可以合理地声称构成了“新”物理学。在流体和磁体二者中临界

于是，像流体的湍流运动以及夸克之间的相互作用这样一些差别迥异的现象使理论物理面临的那些技术困难，同临界区域中所遇到的困难有同样的实质性内含。第二，由于在更专门的但同样地吸引人的意义上日益增加对有关现象是“普适性的”的了解，对临界点的固有吸引力大大加强了。特别是，现在已经充分地确定，许多物理上非常不同的系统，在靠近它们各自的临界点附近的行为表现出了惊人的相似性。因而，例如，磁体的临界行为和流体的临界行为在一定程度上是（用某种防止误解的说明）相似的，这大大超过我们在引言中所说明过的那种表面上的相似性。

由于出现了非常强有力的新理论技术，“如何”的问题得到了它的答案。这种技术的出现主要归功于 Wilson，并称为**重整化群**。毫无疑问，这种技术的发展代表了临界现象理论方面独一无二的最重要的进展，并且一般地说它代表了最近15年来理论物理学中最重要的技术。这种技术是专门设计来处理由临界点是范型 (paradigm) 的一类问题所提出的技术困难的；用这种方法，人们找到了由于临界点行为存在普适性而提出的概念问题的一个漂亮的解。

以上这些说明定出了以下各节所探索的领域中的目标。在 8.2 节中我们将相当详细地考察临界区域中所出现的现象。根据具有一个临界点 (Ising 模型) 的简单模型系统的计算机模拟研究结果说明一些基本点。我们引入 2 个有助于描述临界点行为的关键的量即**序参量** (order parameter) 和**相关长度** (correlation length)；并且我们将更明确地阐明临界区理论必定遇到的一些技术和概念问题。在 8.3 节中我们将在一定的深度上探索由临界点附近的微观自由度所形成的，并根据计算机模拟研究的结果广泛详细地绘制的**构形** (configurations) (图型 (patterns))，我们引入并用构形表达了重整化群的基本概念：**粗粒化** (coarse-graining)，**系统流动** (system flow)，**固定点** (fixed point) 和**标度-不变性** (scale-invariance)；我们看到了在这种框架内人们可以如何提出临界区的技术问题和概念问题两者。在 8.4 节中我们将展示这些概念如何结合在一起形成重整化群方法本身；着重介绍方法的基本对策而不是技术细节，关于技术细节的选择，读者（对这件事感兴趣者！）可以在 8.5 节中找到。最后在 8.6 节中我们试图给出在临界现象领域内或超出此领域之外相当大量问题的某种印象，这些问题是已经服从重整化群方法，或者可能是很容易接受重整化群方法的。

8.2 背景

8.2.1 概念

在理论物理学中，对有兴趣问题进行攻关，传统上是努力辨别和了解最简单的模型开始（有时是结束），这种最简单的模型显示出与所研究的物理问题有相同的基本特性。在临界点现象的领域内，这是一种能带来特别丰富成果的战略（作为普适性的必然结果）。我们这里就采用了这种战略。具有临界点的最简单的模型系统是 Lenz 提出的，尽管现在总是以 Ising 模型著称。虽然被设想成铁磁体的简单模型（参看本书由 Thouless 撰写的那篇文章），但为了与更广泛的意义相一致，我们将一般性地（而不是以特殊的磁体）描述它。本模型设想了一个规则的空间点阵列（点阵），点的数目 N 很大。选择阵列的空间维数是一件重要事情：基本物理学显然是呈 2 维阵列的（占有一个平面），为了说明问题我们将利用这种情况。由点阵座 (lattice sites) 形成的图型的精确性质（点阵的**对称性**）更多是爱好和方便

的问题，我们将考虑方形点阵。我们用下标 $i = 1, 2, \dots, N$ 来标明点阵的各个座位，并且把变量 s_i 与每个座位 i 相关连。每个变量可以采用 $+1$ 或 -1 这两个值中的任一个值。相邻的变量相互产生影响。通过把能量 $-J s_i s_j$ 与每一对相邻座位 i 和 j 相关连来表达这种影响，这里 J 是某个正常数。于是这种相互作用能是低的 ($-J$) 或者是高的 ($+J$)，根据相邻变量是否有相同的值或相反的值而定。这就完成了模型的定义。

对于足够大的 N ，模型有一个可辨别得出的临界点，它出现在温度 $T_c = 2.269 J/k$ 之处。这里 k 是 Boltzmann 常数。现在，阐明这种断言的基础与阐明它的意义是什么相比显得不太重要。那么，什么是临界点呢？下面的定义在形式上是满足要求的，虽然在概念上有一点含糊：临界点是一条线的终点，这条线存在于控制系统状态的那些性质（特别是温度）的空间中，并且这条线把两个（或更多的）不同的相分开。这条相共存线在临界点处的“终止”预示着两个相之间的差别在该点消失了的事实。事情的这种状态在流体情况下是最明显不过的（图 8.1(a)）。沿着共存曲线 $T_c(p)$ 有两个明显不同的相，即液体和蒸气，它们主要以其不同的密度相区别；在临界点 (T_c, p_c) 处，这种密度差别消失，并且两个相合并为单个相。在铁磁体情况下（图 8.1(b)），在低于 T_c 温度时，共存的各个相由磁矩的各种可能的取向来区别；当温度趋于 T_c 时磁化强度（每单位体的净磁矩）本身消失，这时各相之间的差别也就消失了。就 Ising 模型来说，在低于指定的临界温度时两个相共存；在一个相中大多数变量有 $+1$ 值，在另一个相中大多数变量有 -1 值。随着趋于临界状态，两种布居的大小差缩小，而到了 T_c 以上，两种布居基本上相等。

对临界点处合并的各相之间的差进行定量测量是有用的：这是序参量 Q 的任务。就流体来说，取液相和蒸气相密度之间的差为序参量。在铁磁体情况下，取磁化强度为序参量。在 Ising 模型情况下，则用有 $+1$ 值的变量数超过有 -1 值的变量数的分数来定义序参量。很显然，在这样的定义下，当沿着相共存线趋于临界点时，序参量就等於零。

正如序参量这个名称所提示的，序参量可以看成是，当系统在临界温度以下冷却时出现的那种有序性的度量。我们的下一个任务是对构成这种有序过程的基本原理给出一些看法。这里我们必须求助于统计（热）物理的基础性结果。能量 E_a 的概率 p_a （一物理系统在温度 T 时将具有以 a 标出的特殊的微观排列）为

$$p_a = Z^{-1} \exp(-E_a/kT) \quad (8.1)$$

前因子 Z 是配分函数 (partition function)；因为系统必须总是有某种特殊的排列，所以概率 p_a 的和必须是 1，即意味着

$$Z = \sum_a \exp(-E_a/kT) \quad (8.2)$$

其中总和包括所有可能的微观排列。在利用这些方程时，一般（虽然正如我们将要见到的那样，并不总是）作以下假定是正确的：通过方程 (8.1) 所规定的概率抽查物理系统中所有可能的排列（在典型观察的时间尺度上），物理系统能够在其所有可能排列中快速演化；任何物理性质的“观察”值因此都将通过把所有排列 a 的性质予以平均而给出（通过适当的概率 p_a 权衡每一个贡献）。

具体地考虑 Ising 模型的序参量。通过变量的 $s_1^{(a)}$, $s_2^{(a)}$, ... 值的某特殊集来定义“排列” a ；于是由总的相互作用能可给出“构形”能 E_a ：

$$E_a = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i^{(a)} s_j^{(a)} \quad (8.3)$$

其中总和包括所有相邻座位对。概率 p_a (方程(8.1)) 是找到 N 个变量有规定值的概率, 对 a 求和 (方程(8.2)) 包括所有 N 个变量的可能排列的完全集。于是序参量就由以下公式给出:

$$Q = \sum_a Q_a p_a \quad (8.4a)$$

$$Q_a = \frac{1}{N} \sum_i s_i^{(a)} \quad (8.4b)$$

给出了排列 a 中 $+1$ 变量和 -1 变量的两种布居之间的分数差。象方程 (8.4a) 那样的和式是不容易估算的: 假使是这样的, 那我们就会不会撰写这篇文章了。然而, 还是毫不费力地有了一些重要的认识。在其低温 T 限度内 (根据由 J/k 给出的标度集), 从方程(8.1)清楚地知道此系统将最可能在其最小能量排列 (“基态”) 处被找到。有两种这样的排列: 一种排列是所有变量都是 $+1$, 而另一种排列是所有变量都是 -1 。尽管这些完全有序的排列有相同的能量, 并因此是同等可能的, 但是在某一瞬间在一种基态中找到的系统, 则极不可能找到它通往另一种基态的路径 (此一般法则的一个重要的例外是, 系统在其排列之中快速演化), 因为这么做的话, 它就必须穿过能量高得多的排列, 而这种排列有非常小的概率 (实际上, 在其低温 T 限度内和大 N 情况下这样小的概率完全可忽略不计)。这样, 在 $T=0$ 时, 系统必定可在一个完全有序的排列中找到, 并且将保持为这样的排列。(是哪一个则是系统的历史问题。) 于是序参量 Q (方程 (8.4 a, b)) 必然有 1 的值。现在考虑其高温限度, 增加的加权值 (在和式 (8.4a) 中完全有序的排列所具有的) 由于能量低, 现在不再足以弥补这样的事实, 即分数的布居差 Q_a 。具有某中间值的那种排列 (尽管每一个都具有小的加权值) 在数量上要巨大得多。有些思想指出, 具有基本上相等的 $+1$ 布居和 -1 布居的这些排列为数最多。在高温下, 这些 (基本上) 完全无序的排列控制着方程 (8.4a) 中的总和, 并且序参量为零。

于是, “排列的能量” 加权 (或简单地说 “能量”) 同 “排列的数量” 加权 (或 “熵”) 之间的竞争, 在本工作中是关键的原理, 实际上在热物理学中通常也是关键的原理。具有临界点的系统的不同特点是, 在这种竞争过程中, 系统不得不在微观排列的许多宏观上不同的集合中进行选择。

为了阐明产生这种有序化过程的方式, 求助于 Ising 模型的计算机模拟研究是有益的。计算机模拟广泛地应用于凝聚物质物理学中, 这种方法的详细讨论超出了本文的范围。简单地说, 人们用一种由有关系统的某种初始微观排列提供的算法 (一组指令) 来产生不同的微观排列。在由这种算法的重复应用所产生的指令序列中, 最早的那些排列反映了初始排列的具体选择。然而, 算法是这样设计的, 不考虑初始排列, 在指令序列中后来出现的排列也同样满足由方程 (8.1) 所确定的频率 (概率)。于是, 所希望的性质可以由计算机-测量所讨论的在适当大量排列范围内的性质的平均值来确定。具备这种技术本身并不能解决临界点问题: 假如它能解决的话, 那么我这篇文章至少将是多余的。尽管如此, 但从这种技术中已经学到并将能学到许多东西, 特别是通过把它应用于 Ising 模型, Ising 模型很自然地适合于

这种分析形式。在这样的情况下，算法的基本组成部分采取一组**概率**的形式，即给定状态中的 s 变量以及在给定的排列情况下与它紧挨着的邻位的 s 变量（和它相互作用的那些变量）将在单位时间内跳跃到它的另一种状态。

在图 8.2 中我们展示了方点阵 Ising 模型计算机模拟研究中产生的 s 变量的 3 种排列

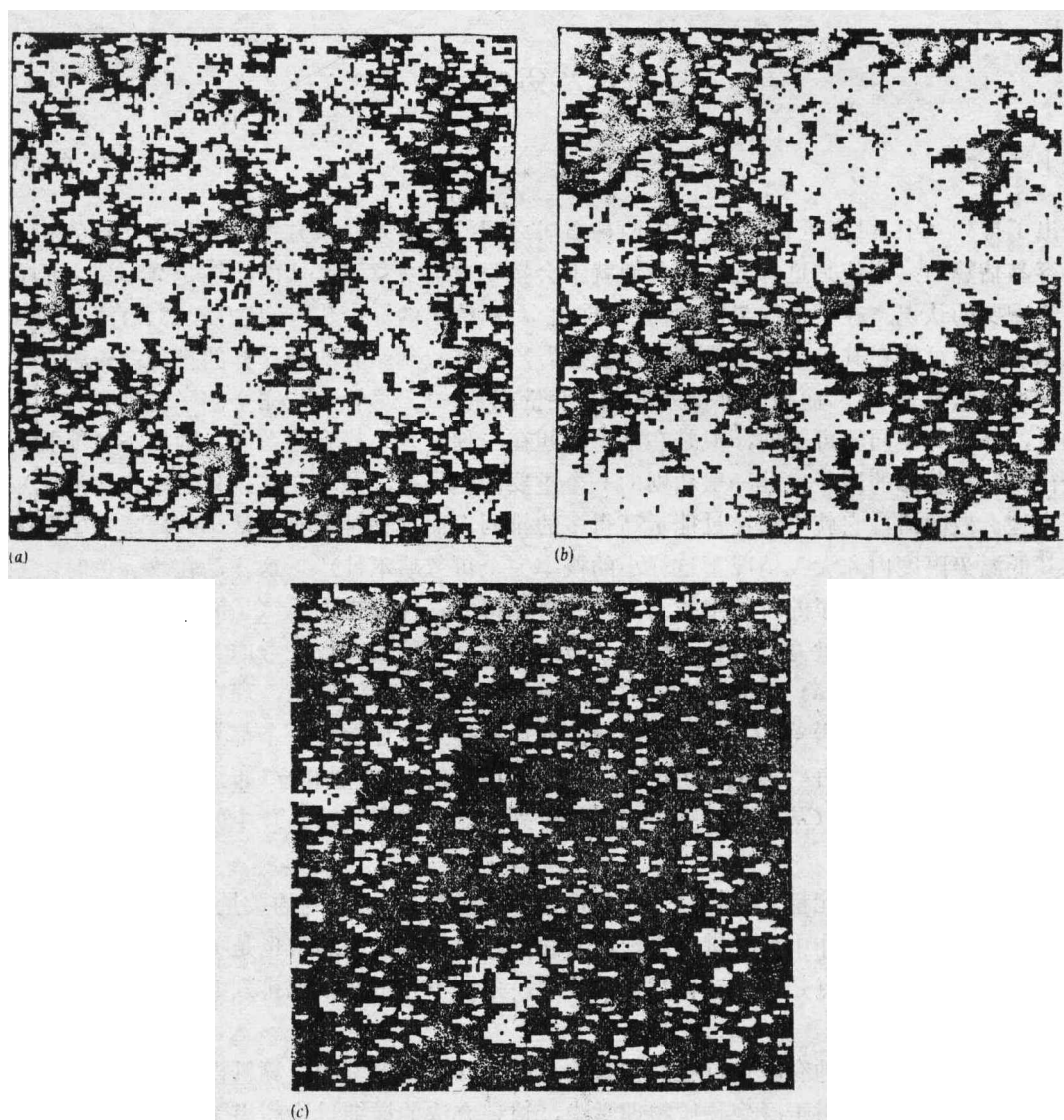


图 8.2 Ising 模型的构形。图型描述进行 $N=512^2$ 座位的 Ising 模型计算机模拟时所产生的 s 变量的典型排列。
 (a) 在温度 $T=1.2T_c$ 时, (b) $T=T_c$ 时和 (c) $T=0.95T_c$ 时, 在每一种情况下展示的仅仅是含有 128^2 座位的系统的一部分。根据 s 变量分别是在 $+1$ 座位处还是在 -1 座位处, 每个点阵座位周围的方块是白的或黑的。典型的岛状物尺寸是相关长度的量度; 黑色超过白色的量 (低于 T_c) 是序参量的量度

(“构形”)。3 种排列的每一种都是给定温度的相应排列谱的代表。黑色 (白色) 区表明 s 变量具有 $+1$ (-1 值)。有了这些约定, 一种完全无序的排列 (这种排列我们已经讨论过, 在极高温时它是典型的) 将以无规的黑色白色混杂物形式出现。而一种完全有序的排列 (预料是在极低温时出现的) 则将出现全部黑色或全部白色。我们的 3 个图揭示了这两种简

单极端情况之间的温度上占优的那些图型的细微区别。

图8.2(a)展示温度稍稍超过前面所定义临界温度 T_c 之上的一种典型排列。正如用心的读者可能检验出的那样，有基本相等的+1和-1变量数；黑色和白色面积基本相同，这表示具有序参量 Q 变为零的相。然而，图型并不适合于非常高的温度。在这种极端情况下，围绕着所选择的某座位的变量，其很可能的颜色（符号）将与该座位处的变量的颜色（符号）无关，因为一种排列的概率实际上与这个区域中的它的能量无关。然而，在 T_c 附近的温度处，非常明显（图8.2(a)），一种颜色的座位趋向于具有同种颜色的（大多数的）邻位。这种效应表现为相对于其他无规的黑色和白色背景，可以辨别出相同颜色的岛状物或团粒状物。

现在考虑图8.2(b)，它展示临界温度 T_c 本身的一种典型排列。仍可能有基本相等的黑色和白色布居，虽然这么说不太有说服力¹⁾。图型的显著变化还是显而易见的：在 T_c 以上出现黑色和白色的比较小的岛状物，其大小现在有一个谱，其中最大的非常之大，实际上延伸到了整个系统。

最后考虑图8.2(c)，它展示温度稍稍低于 T_c 的一种典型排列。在黑色和白色之间的竞争问题现在被解决了（它们的顶点是临界点）：比起白色来，黑色具有明显的优势，它发出一个以非零 Q 值为特征的有序相的信号。然而，当（我们讨论过的）它在非常低的温度时，这种有序是不完全的；留下的白色岛状物比起在临界点时出现的那些岛状物的尺寸要小些，并且数目要少些，这意味着其序参量小于1。

在图8.2上所揭示的行为是所有具有临界点的系统的典型。极其一般地说，对于部分地具有在临界点合并的有序相中之一相特征的区域，通过这些区域的空间尺寸的增大（顺便说说，是暂时保持），在构形的水平上预示趋于临界点。在流体中，这些区域取液体或蒸气相的泡的形式；在磁铁中这些区域由磁化的微观磁畴组成，微观磁畴按它们的磁矩方向来区分。根据人们的展望，微结构的这种无界增长或者可以看成是造成有序相平滑产生的主要原因（参看从上面趋于 Ising 临界点²⁾，或者可以看成造成了它的平滑的破坏（从下面趋于 T_c ）³⁾。

进行这种空间结构的尺寸的定量量度是有用的：这是**相关长度** ξ 的作用，这样称呼是因为它表达了一种典型的距离，在这距离之内，一个微观变量的行为是与另一个的行为相关的（受到另一个的行为的影响）。确定了一个直观上而不是形式上令人满意的定义，人们就可以把相关长度当作为最大的一块相关空间结构的典型线性尺寸的量度（例如在图8.2a中的最大的黑色或白色岛状物，在图8.2c中的最大的白色岛状物）。当趋于临界点时，这种长度的发散是临界区域的问题和妙处两者的关键。

8.2.2 目 标

1) 为了清晰起见我们在这里要牺牲一点真理。在临界点，系统为两个构形集占优势，一个构形集是黑色有明显优势，而另一个构形集则是白色有明显优势。有时，当 s 变量从一态突然改变到另一态时，以及黑色和白色岛状物增大或者缩小时，系统将找到从这两个构形集中的一个构形集变到另一构形集的途径。黑色和白色布居的相等一般说来现在在任何一个构形中都不明显，但对非常多的构形取合适的平均时就出现相等。我们尽力传达一张图中的真实平均行为。这样，我们（这里和以下的图8.5中）仔细选择了我们的“典型”构形，以便在其富有黑色的构形集和富有白色的构形集之间进行变换时能够抓住系统。

2) 指从高于临界点的温度趋于临界点。——译者

3) 指从低于临界点的温度趋于临界点。——译者

临界区理论的基本目标可以通过更详细地研究序参量和相关长度的行为来确定。

当从下面（严格地说，是沿着相共存线）趋于临界温度 T_c 时，序参量 Q （在我们的 Ising 模型构形的图示表达中的黑色超过白色的量）变为零。实验事实是，非常一般地，序参量以约化温度 $t \equiv (T - T_c)/T_c$ 。（约化温度是温度与其临界点温度值的偏差的量度）的幂的形式趋于零。特别是找到了（图 8.3）

$$Q \approx Q_- |t|^\beta \quad (t < 0) \quad (8.5)$$

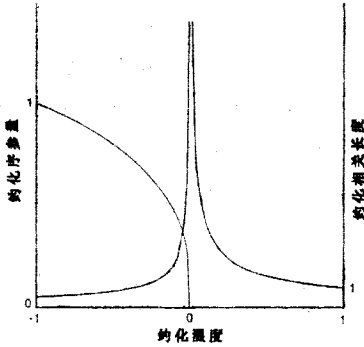


图 8.3 序参量和相关长度的临界行为。当沿着相共存线趋于临界点时，序参量以约化温度 t 的 β 次幂而趋于零，相关长度以约化温度的 ν 次幂而发散，所展示的这种对定性上对所有的临界点是典型的。图中所暗示的指数的特定值 ($\beta = 0.33$ 和 $\nu = 0.63$) 和幅值比 ($\xi_-/\xi_+ = 0.51$) 适用于 3 维 Ising 模型。这些数字唯一地确定了所绘曲线的约化量值：约化序参量是序参量 Q 除以幅值 Q_- ，于是在 $t = -1$ 时就被归一化为 1；约化相关长度是相关长度 ξ 除以幅值 ξ_+ ，于是在 $t = +1$ 时就被归一化为 1。对于（足够接近临界的）许许多多流体、磁体以及其他系统的数据，发现都落在这些普适性曲线上。

波线等号意味着此幂律行为仅出现在足够接近临界点时；负号（-）下脚标提示这种关系适用于 $-t$ 。我们将马上讨论临界指数 β 的意义以及有关的幂律幅值 Q_- 的意义。

现在考虑相关长度 ξ ，当从上面或从下面趋于临界温度时它任意地增大。此外实验建立了以下形式（图 8.3）的幂律行为：

$$\xi \approx \xi_- |t|^{-\nu} \quad (t < 0) \quad (8.6a)$$

$$\xi \approx \xi_+ |t|^{-\nu} \quad (t > 0) \quad (8.6b)$$

这些关系式分别定义了第二个关键的临界指数 ν 以及与临界点以下和以上极限行为有关的幅值 ξ_- 和 ξ_+ 。

在这些方程中出现的临界点幅值和指数有完全不同的状况。从一个物理系统到另一个物理系统，幅值是变化的。这是完全有道理的：幅值 Q_- 给出了显示有序化过程的变量的基本标度；幅值 ξ_+ 和 ξ_- 给出了最大标度，依据这个标度，对一给定的约化温度，其初始的有序是明显的。很明显，这些标度必须反映有关系统的本质的细节。对于任一给定的物理系统，对

给出这些标度的那些因素的研究并不是令人厌烦的。然而，像确定找到临界点本身的那些因素一样，它提出了与这里所涉及的出现在临界指数性质中的那些困难类型完全不同的困难。

指数显示了临界点的普适性：它们的值对特定系统的细节是非常不敏感的。因此，实验已确定了，各种各样的流体和磁体，以及事实上许多其他具有临界点的系统，都显示出一种可以通过一对指数值 $\beta \approx 0.33$ 和 $\nu \approx 0.63$ 来描述的行为。然而，指数并不是对一切微观细节都不敏感。正如本书中由 Thouless 所讨论的那样，具有层状（事实上是平面，2 维）微结构的磁体显示了明显不同的指数， $\beta \approx 0.12$ 和 $\nu \approx 1$ 。

以上这些说明只不过是引用了过去 10 年中在临界区研究中苦心积累起来的广泛详尽实验数据的很小的一部分，来作为在这里我们主要关心的理论进展的基本补充。然而，理论所面临的任务是清楚的。

首先，理论必须提供一个描述临界点行为的临界指数的计算格式。第二，理论面临着潜在的与在指数中很明显的普适性有关的一些更深刻的问题：为什么物理系统的微观细节与该系统的临界行为特点是如此之不相干，以致像流体和磁体那样完全不同的系统可以用相同的不可思议的数字来表征？相反，为什么系统的空间维数对它的临界指数值有如此关键的影

响? 与物理系统显示出的普适性临界行为有关的系统的其他特点是什么? 哪些可测量的量与临界指数同样具有值得注意的普适性性质?

8.2.3 困难

我们已经确定的任务提出了一些特殊困难。为了确定在何种层次上引起了这些困难, 回头查阅基本方程 (8.1) 和 (8.2) 是有用的。这些方程是相变理论以及事实上是热物理学中任何问题的核心所在。为了完成这些方程 (例如以方程 (8.4a) 中所描述的形式), 人们可能在两个层次上遇到困难。

第一, 有一个以何种方式确定系统的构形能 E 。取决于它的微观组分排列 a 的问题。这不是这里要讨论的问题。这种使流体的能量取决于它的组成原子位置的方式, 或这种使磁体的能量反映它的磁离子取向的途径, 事实上可以用某种置信度来模拟, 至少在较简单的流体和磁体的情况下是如此。总之普适性现象使它简单了, 即这样一些细节基本上与临界点行为不相干。因此我们可以在简单模型系统的情况下使这工作得以进行, 有把握预料, 所出现的答案将不仅具有定性的, 而且与自然界本身系统具有定量的关系。我们将以这种精神 (当企图去了解它时部分地预先假定了普适性) 在这里以及在以下许多地方, 在 Ising 模型 (其构形能将具有方程 (8.3) 所给出的特别简单的形式) 所提供的特殊情况下使工作进行下去。于是问题的提法是恰当的, 即问题就是估计像方程 (8.4a) 中那样的总和。正是在这个层次上出现了困难。

这种困难在于长度标度问题。此问题有 3 个特征长度标度。第一, 也是最重要的, 是由相关长度 ξ 所定义的。第二个长度标度隐含在临界区的范围内, 即隐含在明显表现出普适性的幂律现象 (由方程 8.5 和 8.6 所代表的) 的约化温度 t 范围内。定义这个范围的条件, 也就是 $|t|$ 应当“足够小”的条件, 等价于要求 ξ 应当“足够大”。第二个长度 L_{\min} 对这个命题给出了标度: 临界区是 ξ 比 L_{\min} 大得多的区域。物理上讲, L_{\min} 是在微观物理学问题中可识别的最大长度 (ξ 除外), 它一般是点阵的间距或是相互作用距离。(在我们的 Ising 模型中二者是相同的。) 还有第三个长度标度, 它对基本物理学来说是外围问题, 但现在在这里是要求加以确定的。这第三个长度 L_{\max} 是所研究系统 (流体, 磁体, Ising 模型, ……) 的大小。显然, L_{\max} 给出了相关长度的上限。更精确地说, 只有当 ξ 比 L_{\max} 小得多时, 人们才可以期望, 相关长度会表现出如方程 (8.6) 所描述的那种发散的增大 (并且事实上更一般地, 人们可以期望, 像方程 (8.5) 和 (8.6) 那样的幂律形式是能成立的)。于是, 纯幂律行为的真实临界区域将由 $L_{\min} \ll \xi \ll L_{\max}$ 的窗口来确定。

首先让我们考虑这种实际情况对利用沿着早就概述过的思路进行计算机模拟来直接攻关而提出的那些困难。在实际的实验室实验中, 满足窗口条件是非常可能的: 仔细控制温度使得有可能实现相关长度是相应微观长度 L_{\min} 的 10^2 或 10^3 倍, 但是仍然远比典型的宏观尺寸 L_{\max} 小得多。相反, 在计算机实验中, 要令人信服地满足窗口条件实际上是不可能的。为了实现一个范围, 比如说 $L_{\max}/\xi \sim \xi/L_{\min} \sim 10^2$, 对 2 维问题需要进行处理 10^8 个变量 (或对 3 维问题需要处理 10^{12} 个变量!) 的模拟。这样的要求甚至对现在这个超级计算机时代的技术也是不切实际的。因此, 如果人们沿这条道路继续进行下去, 那么人们就必须把窗口条件看作很不严格。于是有两种可能性。一种可能性是可以简单地接受由 L_{\max} 的有限性影响所产生的畸变 (“有限尺寸效应”), 以及满足于定性意义的结果, 或者最好也不

过半定量意义的结果。另一种可能性是必须求助于超出强调模拟过程的统计力学梗概的理论框架，并且允许人们超越种种计算机所产生的数据的限制。重正化群恰好提供了这样的理论框架。实际上，有理由说计算机模拟和重正化群方法（将在 8.5 节中作简要讨论）的综合，将提供处理临界点及有关问题的最有力和通用的方法。

显然另一个建立在模拟基础上的处理问题的方法是解析法，在此解析法中由例如方程 (8.4a) 的和式所给出的任务，基本上由代数（而不是数值）运算来处理。而且，尽管不太明显，但遇到的问题是长度标度问题。按实际情况来说，方程 (8.4a) 要求人们去求得变量 s_1, \dots, s_N 范围内的多个和数，必须使变量的每一个都取 +1 值和 -1 值。完全从正面解决这个问题很快陷入了困境：可以容易地求得 s_1 的和数，但其结果是得一个函数（余下的变量 s_2, \dots, s_N 的函数），它的形式比起原始和式的自变量更是不希望要的。这种趋势将继续下去：消去每一个变量（求得每一个和）都留下一个难以对付的剩余变量的函数作为遗产。甚至在最有力的研究所能获得的指令序列中也都明显没有可辨别得出的极限行为。

这种难以理解的方法将陷入两种危险境地。其一是方程 (8.4a) 中的和式扩大到许多变量。其二是这些变量彼此互相地作用。不可能容易地避开这些危险：它们是基本物理学的组成部分。鉴于此，研究图 8.2 (b)，在图中临界点的许多基本物理性质是显而易见的。我们现在必须注意的关键性特点是相关微结构（黑色和白色岛状物）不只是在相关长度 ξ 的标度上存在，而且在 ξ 与点阵间距 L_{min} 之间的所有标度的中间值上存在。这种许多长度标度的结构只能用相等的许多变量来表征。并且十分清楚，一种规定标度的结构（比如说某个规定尺寸的白色小滴）的构形似然性 (configurational likelihood) 取决于那里存在的别的标度结构（一个较大的黑色小滴）的似然性。于是，表征不同长度标度的结构的变量以一种基本方式彼此相互作用。以上这些说明确定了由临界点和代表了问题特征的一类问题所提出的关键性困难：这些问题都由微结构来表征，这种微结构具有许多不同的长度标度，并且可以只通过相应的许多相互作用变量来描述。

重正化群技术被特地设计来处理这种类型的问题。大体上，它的做法是重新组织像方程 (8.4a) 中的那种和式，目的是连续地处理由标度越来越大的构形特点所作的那些贡献。在以后几节中我们将发展概念框架和技术框架。然而，在这个时候我们必须防止一种可能的误解。重正化群决不是关于临界区的一切知识的源（哪怕是有理由认为它占了这种知识的大部分）。必须提到其他两种源。

首先，有可能重新组织像方程 (8.4a) 中那样的和式所提出的问题，以便根据其有序化的贡献变得重要的那个温度来连续地处理其有序化的贡献。在将近 30 年的过程中，这种高温或低温的级数展开式（关于完全无序高温极限或完全有序低温极限的摄动展开式），已经提供了关于临界指数值和有关的临界点参量方面信息的坚实的基本事实。然而，它们所提供的理解，同由重正化群所形成的那些理解相比，却是非常有限的，并且甚至它们的计算能力也只有通过重正化群框架所提供的推动和指导才能充分地实现。

其次，只有很有限的例子已经证明像方程 (8.4a) 中那样的和式是适合于精确的计算的。最著名的例子实际上就是我们这里已经讨论过的 2 维 Ising 模型，它的若干性质（包括序参量）已经由 40 多年前以 Lars Onsager 为首的少数几位卓越的理论工作者所作的鼓舞人

（下转第 490 页）

- 2 蒋和洋, 同上, 20, 增刊2 (1981): 21—28
- 3 ———, 工程力学, 2, 2 (1985): 1—10
- 4 Washizu K, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd edition, Pergamon Press (1982)
- 5 卞学祺, 有限元法论文选, 国防工业出版社 (1980)
- 6 张之勇, 张永昌, 张相麟, 计算结构力学及其应用, 3, 2 (1986): 1—8
- 7 蒋和洋, 同上, 4, 2 (1987): 99—100
- 8 ———, 拟协调模式非线性有限元及其他, 大连工学院博士论文 (1984)
- 9 钱伟长, 变分法及有限元, 上册, 科学出版社 (1980)
- 10 蒋和洋, 拟协调模式大变形板壳单元的变分基础, 待发表
- 11 ———, 上海力学, 8, 1 (1987): 10—17
- 12 ———, 力学进展, 18, 1 (1988): 13—26
- 13 ———, 计算结构力学及其应用, 1, 2 (1984): 49—60
- 14 ———, 大连工学院学报, 23, 2, (1984): 145—148
- 15 ———, 工程力学, 2, 3 (1985): 12—19
- 16 Pian T H H, Constraints for stresses in hybrid plate and shell elements, in *Finite Element Methods for Nonlinear Problems (Europe-US Symposium, Trondheim, Norway 1985)*, Editors: Bergan, Bathe and Wunderlich, Springer, Berlin, Heidelberg (1986)
- 17 Atluri S N, *Computers and Structures*, 18, 1 (1984): 93—116
- 18 Atluri S N, Murakawa H, in *Finite Elements in Nonlinear Mechanics (Edited by P. G. Bergan, et al)*, Vol. 1, TAPIR, Norway (1977): 3—41

RECENT ADVANCES IN NONLINEAR MULTIVARIABLE FINITE ELEMENT METHODS

Jiang He-yang Tang Li-min

Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian Institute of Technology

Abstract In this paper, the variational foundations of nonlinear multivariable finite elements, which include nonlinear hybrid elements and quasi-conforming elements are presented together with their recent advances.

Keywords *nonlinearity; multivariable finite elements; hybrid elements; quasi-conforming elements*

(上接第 506 页)

心的努力而得到了。于是, 特别是知道了临界温度具有前面所引用的形式, 而知道方程 (8.5) 和 (8.6) 中所引入的临界指数对此模型是 $\beta = 1/8$ 和 $\nu = 1$ 。这些成功主要建立在上述模型的特别简单的特性上; 它们没有提供一般的框架来了解其临界区以及临界区表现出的普适性。(读者可能已经注意到, 在所举出的 $d = 2$ 的 Ising 指数数值同前面所确定的适合于平面磁体的值之间的吻合证明了但并没有解释这种普适性现象)。尽管如此, 正像级数展开的研究一样, 它们已经证明了在评价我们正在努力的, 更一般的, 虽然基础较不严格的框架方面, 是非常有价值的。(未完待续)

程屏芬译自: *The New Physics* (Ed by P. Davies), Cambridge University Press (1989); 236—267, (董务民校)