第21卷 第4期 力学进展 Vol. 21 No. 4
1991年11月25日 ADVANCES IN MECHANICS Nov. 25, 1991

非线性多类变量有限元的进展

蒋和洋　唐立民
大连理工大学工程力学研究所（邮政编码116024）

提要 本文介绍了非线性多类变量有限元，即非线性的杂交元和拟协调元近几年来的发展及其变分基础。

关键词 非线性；多类变量有限元；杂交元；拟协调元

1 引 言

目前的有限元可以其包含的独立变量多少分为单类变量有限元和多类变量有限元两大类。前者为位移模式有限元(包括著名的等参元)，后者为杂交模式、拟协调模式有限元[1,2]等。单类变量有限元由于其只含有一类变量，变化的余地很少，因此相应的变分原理和构造方法均被纳入一个传统的框架，未能有所突破。以致有人认为有限元的发展是否已经到了尽头。随着多类变量有限元的发展，产生出许多新的变分格式和独特的构造方法，这使有限元的发展，包括非线性有限元的发展进入了一个新的阶段。

单类变量有限元为什么要演变成多类变量有限元？多类变量有限元的变分基础和构造列式是什么？下面就几何非线性板壳有限元的情况作一阐述。

2 多类变量有限元的产生

非线性单类变量板壳有限元，即位移模式几何非线性板壳有限元，是基于最小势能原理导出的，但并没有严格满足最小势能原理。原因如下。简化的壳体应变分量[3]可以表示为

$$\varepsilon=\varepsilon^{p}+(1/2)G\cdot\varepsilon^{G}+z\varepsilon^{b} \tag{1}$$

其中

$$\varepsilon^{p}=[e_{11},e_{22},e_{12}+e_{21}]^{T} \tag{2}$$

$$\varepsilon^{b}=[k_{11},k_{22},k_{12}+k_{21}]^{T} \tag{3}$$

$$\varepsilon^{G}=[e_{13},e_{23}]^{T} \tag{4}$$

$$G=\begin{bmatrix} e_{13} & 0 \\ 0 & e_{23} \\ e_{23} & e_{13} \end{bmatrix} \tag{5}$$

ε^{p}，ε^{b} 和 ε^{G} 分别为壳体线性膜向应变、曲率分量和转动分量。各符号定义见[3]。

弹性非线性板壳最小势能原理[4]可以表述为：在满足应变位移关系（1）和位移边界

条件

$$\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}=0 \qquad \text{(膜向位移)} \tag{6}$$

$$w-\bar{w}=0 \qquad \text{(挠度)} \tag{7}$$

$$w_{,n}-\bar{w}_{,n}=0 \qquad \text{(转角)} \tag{8}$$

$$w_{i}-\bar{w}_{i}=0 \qquad \text{(角点挠度)} \tag{9}$$

的所有允许的应变和位移中，实际的应变和位移中使系统的总势能泛函

$$\Pi_{m}^{p}=\int_{S}[U(\varepsilon)-w\bar{F}]\,da-\int_{S_{\sigma}}(\mathbf{u}\cdot\bar{\mathbf{p}}+w\,\bar{q}-w_{;n}\bar{M}_{n}+w\bar{M}_{ns;s})\,dl-\sum_{i}\bar{f}_{i}w_{i} \tag{10}$$

取最小值．以上各符号说明见[4]．

由（10）知，弹性非线性板壳最小势能原理只有一个独立变量．即位移 u 和 w．这个唯一的挠度场 w 在越过单元边界时，一般不能满足条件（8），即不能做到 C^1 连续．这一缺陷影响到位移模式板壳单元的收敛性和计算精度．

与最小势能原理平行的是最小余能原理，它一般可以表述为：在满足应力平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_{i}=0 \qquad \text{(在 } V\text{)} \tag{11}$$

$$\sigma_{ij}n_{j}-\bar{p}_{i}=0 \qquad \text{(在 } S_{\sigma}\text{)} \tag{12}$$

的所有允许的应力中，实际的应力必使系统的下列总余能泛函取最小值：

$$\Pi_{m}^{C}=\int_{V}v(\sigma)\,dv-\int_{S_{u}}\bar{\mathbf{u}}\cdot\sigma\cdot\mathbf{n}\,da \tag{13}$$

上式中 $V(\sigma)$ 为余应变能密度，与应变能密度 $U(\varepsilon)$ 有关系式

$$U(\varepsilon)+V(\sigma)=\varepsilon^{T}\cdot\sigma \tag{14}$$

（13）是线弹性最小余能原理，卞学镄[5]用它构造线性杂交应力元．由于假设的应力场只能满足应力平衡条件（11），而不能满足边界应力平衡条件（12），包括不能满足单元边界间的应力平衡条件

$$\sigma\cdot\mathbf{n}-\mathbf{p}=0 \tag{15}$$

因此，需要将边界应力平衡条件（12）和（15）乘上相应的 Lagrange 乘子（边界位移）合并到余能泛函（13）中去，得

$$\Pi_{m1}^{C}=\Pi_{m}^{C}-\int_{S_{\sigma}}\tilde{\mathbf{u}}\cdot(\sigma\cdot\mathbf{n}-\bar{\mathbf{p}})\,da-\int_{\partial V}\tilde{\mathbf{u}}\cdot(\sigma\cdot\mathbf{n}-\mathbf{p})\,da \tag{16}$$

其中 Π_{m}^{C} 即（13）；S_{σ} 为单元的外力边界；∂V 为单元间边界，$\mathbf{p}$ 为周围单元对本单元的边界作用力；$\tilde{\mathbf{u}}$ 为单元边界插值位移函数，由与边界有关的节点位移参数构造．这样，边界应力平衡条件（12）和（15）在变分的意义上可以得到满足．

由于余能泛函（16）不存在 C^1 连续要求问题，又能满足应力平衡的变分要求，因此由（16）导出的杂交应力元收敛性、应力精度都相当好．

在上述思想指导下得出的杂交应力元是最早的多类变量有限元．假设独立变量有两个：域内应力场和边界位移场．但是由（16）导出的非线性杂交应力元却并不理想，因为单一的假设应力场不能满足非线性的应力平衡方程

$$(F\cdot\sigma)\cdot\nabla+\bar{F}=0 \qquad \text{(在 } V\text{)} \tag{17}$$

$$F\cdot\sigma\cdot\mathbf{n}-\bar{\mathbf{p}}=0 \qquad \text{(在 } S_{\sigma}\text{)} \tag{18}$$

其中，F 为变形梯度：

$$F = I + \mathbf{u} \cdot \nabla \tag{19}$$

这是由于在（17）和（18）中又耦合了一个随变形而改变的位移场 $\mathbf{u}$. 为此，卞[5]对（17）做了各种简化，这些简化最终都影响了非线性杂交应力元在计算薄壳非线性稳定性时的收敛性和精度. 为了改变这一点，[6]试图将平衡方程中的初应力刚度阵并入右端反力项，但这种做法改变了平衡方程的定义，其合理性不能被证明[7].

综上所述，传统的位移模式板壳有限元（包括线性的和非线性的）和杂交应力模式非线性有限元在理论上都存在重大缺陷：前者不能满足C^1连续性要求，后者不能满足应力平衡要求.

如何从理论上解决这两个问题，便是非线性有限元发展中面临的问题.

3 拟协调模式非线性板壳有限元

拟协调模式板壳有限元[1,2,8]从理论上和实践上解决了位移模式板壳有限元的C^1不连续问题. 这是用多类变量有限元方法解决单类变量有限元问题的实例.

让我们先考察鹫津久一郎[4]提出的大变形板壳广义势能变分原理的泛函

$$\Pi_w^p = \Pi_m^p + \int_S [\mathbf{N}^T \cdot (\varepsilon^m - E^m) + \mathbf{M}^T \cdot (\varepsilon^b - E^b)] da - \Pi_b^p \tag{20}$$

其中 Π_m^p 为（10）；E^m 和 E^b 分别为 ε^m 和 ε^b 的假设近似函数；$\mathbf{N}, \mathbf{M}$ 为相应的 Lagrange 乘子，分别为板壳的膜力、弯矩矢量，ε^b 表达式为（3），ε^m 为

$$\varepsilon^m = \varepsilon^p + \frac{1}{2} G \, \varepsilon^G \text{（膜向应变）} \tag{21}$$

此外，有边界协调条件放松项

$$\Pi_b^p = \int_{S_u} [N_n(u - \bar{u}) + Q_n(w - \bar{w}) - M_n(w_{,n} - \bar{w}_{,n})] dl + \sum_i (w_i - \bar{w}_i) M_{ns} |_i \tag{22}$$

其中，N_n，Q_n 和 M_n 分别为相应的乘子.

[9]中也有类似于（20）的广义变分泛函. 但是，至今尚未见到基于（20）构造的大变形板壳有限元.

比（20）更为一般的大变形板壳广义变分原理的势能泛函[10]是

$$\Pi_f^p = \Pi_m^p + \Pi_a^p - \Pi_b^p \tag{23}$$

其中 Π_m^p，Π_b^p 分别为（10），（22），

$$\Pi_a^p = \int_S [\mathbf{N}^T \cdot (\varepsilon^p - E^p) + \mathbf{M}^T \cdot (\varepsilon^b - E^b) + (G^T \cdot \mathbf{N})^T \cdot (\varepsilon^G - E^G)] da \tag{24}$$

式中的 ε^p，ε^G 为（2），（4）；E^p，E^G 为 ε^p 和 ε^G 的假设近似函数；$G^T \cdot \mathbf{N}$ 为 Lagrange 乘子，G 的表达式为（5）.

泛函（23）与（20）的区别在于将（21）中膜向应变 ε^m 的非线性项$(1/2)G \cdot \varepsilon^G$ 单独分离出来，将转角 ε^G 用 E^G 来逼近. 这样，在泛函（23）中出现的独立变量有：①应变类为 E^p，E^b，E^G；②应力类为 $\mathbf{N}$，$\mathbf{M}$，$G^T \cdot \mathbf{N}$；③位移类为 $\mathbf{u}$，w，$w_{,n}$.

[10]对泛函（23）表达的变分原理表述如下：当诸独立变量满足

本构方程 $$\partial U/\partial \mathbf{E}^p - \mathbf{N} = 0 \tag{25}$$

$$\partial U/\partial \mathbf{E}^b - \mathbf{M} = 0 \tag{26}$$

$$\partial U/\partial \mathbf{E}^G - G^T \cdot \mathbf{N} = 0 \tag{27}$$

协调方程 $$\varepsilon^p - E^p = 0 \tag{28}$$

$$\varepsilon^b - E^b = 0 \tag{29}$$

$$\varepsilon^G - E^G = 0 \tag{30}$$

平衡方程 $$N \cdot \nabla = 0 \text{（}N\text{为内力张量）} \tag{31}$$

$$M \cdot \nabla^2 + (\mathbf{N}^T \cdot G) \cdot \nabla + \bar{F} = 0 \text{（}M\text{为弯矩张量）} \tag{32}$$

边界位移条件（6）—（9），边界力平衡条件

$$N \cdot n - \bar{p} = 0 \tag{33}$$

$$M_n - \bar{M}_n = 0 \tag{34}$$

$$M_{ns;s} + Q_n + \mathbf{N}^T \cdot G \cdot \mathbf{n} - \bar{M}_{ns;s} - \bar{q} = 0 \tag{35}$$

$$M_{ns;s} - \bar{f}_i = 0 \tag{36}$$

时，（23）的总势能泛函 Π_f^p 取驻值.

拟协调模式非线性板壳有限元可由（23）导出，步骤如下. ①边界位移 $\mathbf{u}$，w，$w_{;n}$ 为独立变量，故可由与边界有关的节点位移参数插值，这样就满足了边界位移协调条件（6）—（9），使

$$\Pi_b^p = 0 \tag{37}$$

将上式代入（23），有

$$\Pi_f^p = \Pi_m^p + \Pi_a^p \tag{38}$$

②将（38）的 Π_f^p 对单元节点位移 q 求导，得

$$\Pi_{f;q}^p = \Pi_{m;q}^p + \Pi_{a;q}^p \tag{39}$$

分别令

$$\Pi_{m;q}^p = 0 \tag{40}$$

$$\Pi_{a;q}^p = 0 \tag{41}$$

将（40）对单元节点位移参数 q 再次求导，将导出增量平衡方程. 该方程和各刚度阵、载荷项为（T.L.列式）：

$$(K^p + K^b + K^G + K^D + \Delta K) \cdot \Delta q = {}^{n+1}\mathbf{P} - {}^{n}\mathbf{R} \tag{42}$$

其中 K^p，K^b，K^G，K^D，ΔK 分别为线性平面刚度阵、线性弯曲刚度阵、初应力刚度阵、初位移刚度阵和增量刚度阵，${}^{n+1}\mathbf{P}$ 和 ${}^{n}\mathbf{R}$ 为第 $n+1$ 个增量步的总载荷和第 n 个增量步结束时单元节点产生的反力；Δq 为增量节点位移矢量. 各个刚度阵及右端载荷项与位移模式非线性板壳有限元在形式上是相同的，如

$$K^p = \int_S (B^p)^T \cdot D^p \cdot B^p \, da \tag{43}$$

$$K^b = \int_S (B^b)^T \cdot D^b \cdot B^b \, da \tag{44}$$

$$K^G = \int_S (B^G)^T \cdot D^G \cdot B^G \, da \tag{45}$$

$$K^D = K^{D1} + K^{D2} + (K^{D2})^T \tag{46}$$

其中 B^p，B^b 和 B^G 分别为E^p，E^b 和 E^G 的应变位移矩阵，D^p，D^b 分别为平面弹性阵和弯曲弹性阵，D^G 为初应力矩阵，各种符号的定义均见[11,12]。所不同的是，位移模式有限元的各 B^p，B^b 和 B^G 是由假设位移场的各种导数求出，而拟协调模式有限元的各 B^p，B^b 和 B^G 需要从（41）求出。

③将（41）分写为三式以代替（41），即

$$\int_S \mathbf{N}_{,q}^T \cdot (\varepsilon^p - E^p)da = 0 \tag{47}$$

$$\int_S \mathbf{M}_{,q}^T \cdot (\varepsilon^b - E^b)da = 0 \tag{48}$$

$$\int_S (\mathbf{N}^T \cdot G)_{,q} \cdot (\varepsilon^G - E^G)da = 0 \tag{49}$$

将独立变量分别设为

$$E^p = N^p \cdot \alpha^p (= B^p \cdot q) \tag{50}$$

$$E^b = N^b \cdot \alpha^b (= B^b \cdot q) \tag{51}$$

$$E^G = N^G \cdot \alpha^G (= B^G \cdot q) \tag{52}$$

$$\mathbf{N} = N_p \cdot q \tag{53}$$

$$\mathbf{M} = N_b \cdot q \tag{54}$$

$$G^T \cdot \mathbf{N} = N_G \cdot q \tag{55}$$

其中，各N^p，N^b，…，N_b，N_G均为由多项式组成的矩阵；α^p，α^b，α^G为广义参数。若将应力和对应的应变设成相同的次数，即令

$$N^p = N_p, \quad N^b = N_b, \quad N^G = N_G \tag{56}$$

将上式代入（53）—（55），有

$$\mathbf{N} = N^p \cdot q \tag{57}$$

$$\mathbf{M} = N^b \cdot q \tag{58}$$

$$G^T \cdot \mathbf{N} = N^G \cdot q \tag{59}$$

将（50）—（55）代入（47）—（49）后，得

$$\int_S (N^p)^T \cdot (\varepsilon^p - N^p \cdot \alpha^p)da = 0 \tag{60}$$

$$\int_S (N^b)^T \cdot (\varepsilon^b - N^b \cdot \alpha^b)da = 0 \tag{61}$$

$$\int_S (N^G)^T \cdot (\varepsilon^G - N^G \cdot \alpha^G)da = 0 \tag{62}$$

以上三式是关于应变 ε^p，ε^b，ε^G 的最小二乘方逼近方程，可以方便地求出各 α^p，α^b 和 α^G，进而由（50）—（52）分别求出 B^p，B^b 和 B^G，以及各刚度阵等。具体做法和推导细节见[13,14]。

综上所述，拟协调模式非线性板壳单元的推导是基于一个更为普遍的变分原理（23），并且克服了位移模式非线性板壳单元中难以做到的C^1连续问题。计算结果表明，拟协调模式非线性板壳单元的收敛性和计算精度大为提高，为达到相同的计算精度，拟协调元只需要位移元个数的 1/4[13-15]。卞学鐄曾在[16]中介绍和引用了该方法。

4 杂交应力模式非线性板壳有限元的新列式

杂交应力模式非线性板壳有限元的新列式[16] 从理论上和实践上解决了其旧列式中不能满足应力平衡要求的问题．让我们先将广义变分原理（23）改成相应的余能形式．这只要将（23）中的应变、曲率和转角用相应的应力类变量来表示就可以了．

由（14）知，余应变能密度可以表示为

$$V(\sigma)=\sigma^T\cdot E-U(E)=\mathbf{N}^T\cdot(E^p+(1/2)G\cdot E^G)+\mathbf{M}^T\cdot E^b-U(E) \tag{63}$$

为了将转角 E^G 用应力类 $G^T\cdot\mathbf{N}$ 来表示，引入关系式

$$G^T\cdot N=N\cdot E^G \tag{64}$$

其中

$$N=\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12}\\ N_{21} & N_{22}\end{bmatrix}\text{（内力张量）} \tag{65}$$

设

$$\mathbf{N}^*=\mathbf{N}\cdot E^G \tag{66}$$

得

$$E^G=N^{-1}\cdot\mathbf{N}^* \tag{67}$$

这样，利用关系式（64），得

$$(1/2)(G^T\cdot\mathbf{N})^T\cdot E^G=(1/2)(\mathbf{N}^*)^T\cdot N^{-1}\cdot\mathbf{N}^* \tag{68}$$

将（63）和（68）代入势能变分原理（23），并利用分步积分，可将（23）改变成余能变分原理

$$\begin{aligned}\Pi_R^C=&\int_S\Big\{V(\sigma)+\frac{1}{2}(\mathbf{N}^*)^T\cdot N^{-1}\cdot\mathbf{N}^*+\mathbf{u}\cdot(N\cdot\nabla)\\&+w[M\cdot\nabla^2+(\mathbf{N}^*)^T\cdot\nabla+\bar{F}]\Big\}da-\int_{S_\sigma+\partial V}\tilde{\mathbf{u}}\cdot(N_n-\bar{p})\\&-w_{,n}(M_n-\bar{M}_n)+w[M_{ns,s}+Q_n+(\mathbf{N}^*)^T\cdot\mathbf{n}-\bar{M}_{ns,s}-\bar{q}]dl\\&-\int_{S_u}(\bar{\mathbf{u}}\cdot N_n+Q_n\bar{w}-M_n\bar{w}_{,n})dl+\sum_i w_i(M_{ns,i}+\bar{f}_i)\\&+\sum_j\bar{w}_jM_{ns}|_j\end{aligned} \tag{69}$$

这个余能广义变分原理的特点是多了一个应力类独立变量 $\mathbf{N}^*$，这一特点使得板壳平衡方程

$$M\cdot\nabla^2+(\mathbf{N}^*)^T\cdot\nabla+\bar{F}=0 \tag{70}$$

不再与增量挠度有关，并为建立新的单元模型带来了很大方便．将泛函（69）与以前用于推导杂交应力模式非线性板壳单元的泛函相比，只多了平衡方程（31），（32）的放松项：

$$\mathbf{u}\cdot(N\cdot\nabla)+w[M\cdot\nabla^2+(\mathbf{N}^*)^T+\bar{F}]$$

这意味着在新的杂交应力模式非线性板壳单元中，假设应力场已不再要满足平衡方程(17)，而只要求变分意义上满足平衡方程就行了．

卞学镄[16] 用泛函（69）的二次变分导出了杂交模式非线性板壳单元的新列式．将（69）中的N^{-1}视为初应力的逆，其余各量视为增量，可得（69）的二次变分．[16]采用如下假设独立变量：

$$\Delta\sigma=[\Delta N,\Delta M]^T=P_1\beta_1 \tag{71}$$

$$\Delta\mathbf{N}^*=P_2\beta_2 \tag{72}$$

$$\Delta \mathrm{u} = N \Delta q \tag{73}$$

$$\Delta \tilde{\mathrm{u}} = L \Delta q \tag{74}$$

各种边界力可由有关边界力公式用（71）和（72）表示。

将各假设变量（71）—（74）代入（69）的二次变分式得到如下形式：

$$\delta^2 \Pi_R^C = \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \beta_1^T \cdot \bar{H}_1 \cdot \beta_1 + \frac{1}{2} \beta_2^T \cdot \bar{H}_2 \cdot \beta_2 - \beta_1^T \cdot [G_1 + G_2(q)] \cdot \Delta q \right.$$

$$\left. - \beta_2^T \cdot G_3 \cdot \Delta q + \Delta Q_n^T \cdot \Delta q \right\} \text{（对单元 } i \text{ 求和）} \tag{75}$$

其中
$$\bar{H}_1 = \int_S P_1^T \cdot S \cdot P_1 da \text{（}S\text{为柔度系数矩阵）} \tag{76}$$

$$\bar{H}_2 = \int_S P_2^T \cdot Z^* \cdot P_2 da \text{（}Z^*\text{为初应力逆矩阵）} \tag{77}$$

G_1，G_2 和 G_3 为单元面积分或边界积分；$G(q)$ 中包含转角 $w_{,\alpha}^{\prime}$ $(\alpha = 1,2)$，因此需要对每个增量步修正其值；节点力 ΔQ_n 给定体积力和边界力形成。

由 $\partial\delta^2\Pi_R^C/\partial\beta_1 = 0$ 和 $\partial\delta^2\Pi_R^C/\partial\beta_2 = 0$，得

$$\beta_1 = \bar{H}_1^{-1} \cdot (G_1 + G_2)\Delta q \tag{78}$$

$$\beta_2 = \bar{H}_2^{-1} \cdot G_3 \cdot \Delta q \tag{79}$$

将（78），（79）代入（75），得

$$\delta^2 \Pi_R^C = \sum_i \left(\frac{1}{2} \Delta q^T \cdot \bar{K} \cdot \Delta q - \Delta Q_n^T \cdot \Delta q \right) \tag{80}$$

其中
$$\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_3 \quad \text{（切线刚度阵）} \tag{81}$$

$$\bar{K}_1 = G_1^T \cdot \bar{H}_1^{-1} \cdot G_1 \quad \text{（线性刚度阵）} \tag{82}$$

$$\bar{K}_2 = G_1^T \cdot \bar{H}_1^{-1} \cdot G_2 + G_2^T \cdot \bar{H}_1^{-1} \cdot G_1 + G_2^T \cdot \bar{H}_1^{-1} \cdot G_2 \text{（初位移刚度阵）} \tag{83}$$

$$\bar{K}_3 = G_3^T \cdot \bar{H}_2^{-1} \cdot G_3 \quad \text{（初应力刚度阵）} \tag{84}$$

有关细节可参阅[16]。

综上所述，在新的列式中通过引入单元域内位移场作为 Lagrange 乘子，将平衡方程（31），（32）引入泛函（69），假设应力场（71），（72）不需满足平衡方程（31），（32），只要在变分的意义上满足平衡条件就可以了。因此，对假设应力场（71），（72）有更多的选择余地，并使单元具有一系列好性能[16]。

5 基于其他共轭变量的非线性板壳有限元

由于应变定义的多样性，因此与之对应的应力的定义也具有多样性。一对共轭的应力应变变量能客观地表达变形体的应变能密度。已被证明是共轭应力应变变量的有

$$\dot{W} = T : \dot{E} = t : \dot{F} = S : \dot{U} = A : \dot{V} = \cdots \tag{85}$$

其中 $\dot{W}$ 为应变能密度；T, E 为第二类 Piola-Kirchhoff 应力和 Green 应变；t，F 为第一类 Piola-Kirchhoff 应力和变形梯度；S, U 为 Jaumann 应力和右伸长张量；A, V 为 Atluri[17] 应力和左伸长张量。

用第二类 Piola-Kirchhoff 应力和 Green 应变构造非线性杂交应力元时产生的困难是在平衡方程(17)中有位移出现，造成了平衡方程的非线性，这使假设应力场难以满足平衡方程。克服这个困难的另一途径是改用第一类 Piola-Kirchhoff 应力和变形梯度作为共轭变

量．因为用这种共轭变量时，其平衡方程可以用随动（convcctcd）坐标表示为

$$t \cdot \nabla + \bar{F} = 0 \tag{86}$$

（86）对大变形问题也适用，它显然在形式上与位移无关，并易于被假设应力场所满足．

一个以（t,F）为共轭变量的广义势能变分原理[17,18]为

$$\Pi_A^p = \int_V [W(U) + t : (F - R \cdot U) - \mathrm{u} \cdot \bar{F}]\,dv - \int_{S_\sigma} \mathrm{u} \cdot \bar{\mathrm{p}}\,da$$

$$- \int_{S_u} (\mathrm{u} - \bar{\mathrm{u}}) \cdot t \cdot \mathrm{n}\,da \tag{87}$$

其中 $W(U)$ 为应变能密度，与余应变能密度 $W_c(r)$ 的关系为

$$w(U) = t : F - W_c(r) = t : (R \cdot U) - W_c(r) = (R^T \cdot t) : U - W_c(r)$$

$$= r : U - W_c(r) \tag{88}$$

r 为 Jaumann 应力，与 t 的关系为

$$r = R^T \cdot t \tag{89}$$

应变位移协调关系为

$$F - R \cdot U = 0 \tag{90}$$

或

$$I + \mathrm{u} \cdot \nabla - R \cdot U = 0 \tag{91}$$

边界位移协调方程仍为

$$\mathrm{u} - \bar{\mathrm{u}} = 0 \tag{92}$$

由（88），可将势能形式（87）改写为对应的广义余能变分原理[17]：

$$\Pi_A^C = \int_V [-W_c(r) + t : I - \mathrm{u} \cdot (t \cdot \nabla + \bar{F})]\,dv$$

$$+ \int_{S_\sigma} \mathrm{u} \cdot (t \cdot \mathrm{n} - \bar{\mathrm{p}})\,da + \int_{S_u} \bar{\mathrm{u}} \cdot t \cdot \mathrm{n}\,da \tag{93}$$

如果假设应力场能够满足平衡方程（86），则（93）变为

$$\Pi_A^C = \int_V [-W_c(r) + t : I]\,dv + \int_{S_\sigma + \partial V} \tilde{\mathrm{u}} \cdot (t \cdot \mathrm{n} - \bar{\mathrm{p}})\,da$$

$$+ \int_{S_u} \bar{\mathrm{u}} \cdot t \cdot \mathrm{n}\,da \tag{94}$$

其中，∂V 为单元之间的边界，此时，$\bar{\mathrm{p}} = \mathrm{p}$，$\mathrm{p}$ 为周围单元对本单元的边界作用力，$\tilde{\mathrm{u}}$ 为单元边界位移插值函数．

（94）与（16）是相似的，虽然前者是线性的，而后者是非线性的．

将（94）改写成适合薄板壳的形式，及其有限元列式的推导过程和计算结果，均请参阅[18]．

该方法也属于杂交模式的非线性板壳有限元法，也同样克服了假设应力场不能满足平衡方程的困难，与卞学鐄[16]的方法相比，有异曲同工之妙．

参 考 文 献

1 唐立民，陈万吉，刘迎曦．大连工学院学报，19，2（1980）：19—35，37—50

2 蒋和洋．同上，**20**，增刊2（1981）：21—28
3 ——．工程力学，**2**，2（1985）：1—10
4 Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd edition. Pergamon Press (1982)
5 卞学鐄．有限元法论文选．国防工业出版社（1980）
6 张之勇，张永昌，张相麟．计算结构力学及其应用，**3**，2（1986）：1—8
7 蒋和洋．同上，**4**，2（1987）：99—100
8 ——．拟协调模式非线性有限元及其他．大连工学院博士论文（1984）
9 钱伟长．变分法及有限元．上册．科学出版社（1980）
10 蒋和洋．拟协调模式大变形板壳单元的变分基础．待发表
11 ——．上海力学，**8**，1（1987）：10—17
12 ——．力学进展，**18**，1（1988）：13—26
13 ——．计算结构力学及其应用，**1**，2（1984）：49—60
14 ——．大连工学院学报，**23**，2．（1984）：145—148
15 ——．工程力学，**2**，3（1985）：12—19
16 Pian T H H. Constraints for stresses in hybrid plate and shell elements. in Finite Element Methods for Nonlinear Problems (Europe-US Symposium, Trondheim, Norway 1985). Editors: Bergan, Bathe and Wunderlich, Springer, Berlin, Heidelberg (1986)
17 Atluri S N. *Computers and Structures*, **18**, 1 (1984): 93—116
18 Atluri S N. Murakawa H. in Finite Elements in Nonlinear Mechanic (Edited by P. G. Bergan, et al), Vol. I, TAPIR, Norway (1977): 3—41

RECENT ADVANCES IN NONLINEAR MULTIVARIABLE FINITE ELEMENT METHODS

Jiang He-yang   Tang Li-min
Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian Institute of Technology

Abstract In this paper, the variational foundations of nonlinear multivariable finite elements, which include nonlinear hybrid elements and quasi-conforming elements are presented together with their recent advances.

Keywords *nonlinearity; multivariable finite elements; hybrid elements; quasi-conforming elements*

（上接第506页）

心的努力而得到了．于是，特别是知道了临界温度具有前面所引用的形式，而知道方程（8.5）和（8.6）中所引入的临界指数对此模型是$\beta=1/8$和$\nu=1$．这些成功主要建立在上述模型的特别简单的特性上；它们没有提供一般的框架来了解其临界区以及临界区表现出的普适性．（读者可能已经注意到，在所举出的$d=2$的Ising指数值同前面所确定的适合于平面磁体的值之间的吻合证明了但并没有解释这种普适性现象）．尽管如此，正像级数展开的研究一样，它们已经证明了在评价我们正在致力的，更一般的，虽然基础较不严格的框架方面，是非常有价值的．**（未完待续）**

程屏芬译自：The New Physics (Ed by P Davies). Cambridge University Press (1989): 236—267. **（董务民校）**