

多胞材料的力学行为*

华云龙

北京农业工程大学 (邮政编码100083)

余同希

北京大学力学系 (邮政编码100871)

提要 多胞材料具有独特的力学性质, 其工程应用日益增加. 人造多胞材料可以分为蜂窝材料和泡沫材料两类. 本文介绍了这两类材料在不同载荷条件下力学行为的研究概况. 对于某些天然材料 (木材和松质骨) 的多胞结构及其模型也作了简要介绍.

关键词 多胞材料; 蜂窝材料; 泡沫材料; 弹性性质; 失效面; 木材; 松质骨

1 引言

自然界中有许多胞状结构的材料, 如蜂窝、海绵、珊瑚等, 是由许许多多单个的“胞体” (cell) 组成. 这些胞体由固体的棱和面以及其所围成的小空间构成. 在显微镜下可以发现, 木材、软木、松质骨 (cancellous bone) 等都具有这种胞状结构, 见图1. 日常生活中的面包等发酵面粉制品也是这种结构. 这类材料称为多胞材料, 或多胞固体 (cellular solid).

人类很早就开始应用自然界中的多胞材料. 近年来各种人造多胞材料大量出现在我们生活中. 各种包装用的泡沫塑料处处可见. 除了高分子塑料外, 很多材料都可以用来做成多胞材料, 例如金属、陶瓷、玻璃等^[1].

多胞材料有一些特殊的性质, 使它们有广泛的应用. 它们一般相对密度 ρ^*/ρ_0 都比较小¹⁾, 是理想的轻质结构材料, 可作夹层板的芯层材料, 用于航空结构、体育运动器材等. 多胞材料抗压强度一般比较低, 变形能力大, 是很好的能量吸收材料, 广泛用于各种防撞缓

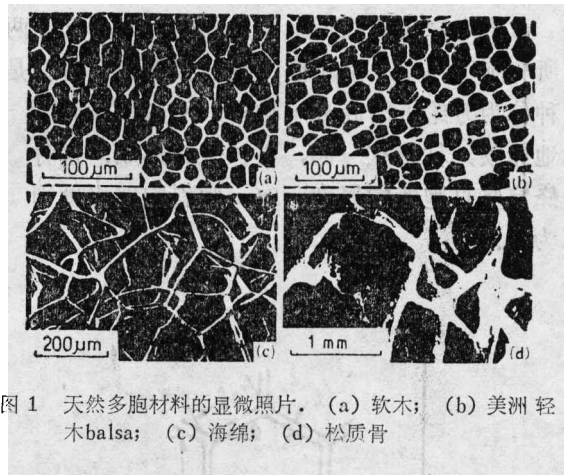


图1 天然多胞材料的显微照片. (a) 软木; (b) 美洲轻木balsa; (c) 海绵; (d) 松质骨

* 国家自然科学基金资助课题.

1) 本文中上标“*”表示与多胞材料整体有关的量, 下标“s”表示与胞壁材料有关的量.

冲的包装和衬垫。这些独特的力学性质是本文要介绍的主要内容。此外，多胞材料还具有良好的隔热性能，因而也有其他的广泛用途。

人造多胞材料通常可分为如下两类：蜂窝 (honeycomb) 材料和泡沫 (foam) 材料。蜂窝是大家所熟悉的，是由许多平行的六棱柱形胞体构成的。这里所说的蜂窝材料含义比较广，其胞体可以是 3 棱柱形、4 棱柱形等形状。从结构来说，这是 2 维的多胞材料。泡沫材料则是指由多面体胞体组成的 3 维多胞材料。如果这种多面体胞体的各个面上有膜覆盖，构成密闭的小空间，称为闭孔泡沫 (closed-cell foam)；如果这些胞体只有构成多面体棱的杆，各胞体间是相通的，则称为开孔泡沫 (open-cell foam)。

相对密度 ρ^*/ρ_0 是多胞材料最重要的参数。各种力学参数一般都能通过 ρ^*/ρ_0 表示出来。用于包装、缓冲和隔振的泡沫塑料， ρ^*/ρ_0 通常在 0.05 至 0.2 之间。如果 $\rho^*/\rho_0 \geq 0.3$ ，则一般称为多孔固体。

人类关于多胞材料的研究可以追溯到很久以前，但是全面系统的研究还是在人造多胞材料大量出现以后，也就是从本世纪 50, 60 年代开始。多数工作是关于聚合物泡沫材料 (polymer foam) 的，*Journal of Cellular Plastics* 则是专门以塑料多胞材料为主题的杂志。这方面有 Skochdopole 和他的同事^[2,3]的多篇综述性文献。文献[4]是 Hilyard 主编的关于塑料多胞材料力学性质的文集。关于芯层为多胞材料的夹层板的研究见文献[5]。自然界中的多胞材料，如木材、骨以及一般生物材料，已有许多专著^[6-8]。1980 年以来，英国剑桥大学工程系 Ashby 和 Gibson 等人，从 2 维蜂窝材料开始，系统地研究了各种多胞材料的力学行为。他们的专著^[9]对各种多胞材料 (塑料、金属、陶瓷、软木、木材、松质骨等) 的结构及其性质作了统一的描述和分析，是这一领域的最新的重要文献。

2 蜂窝材料的力学行为

假定蜂窝棱柱形胞体的轴向为 z ，其他两个坐标轴及胞体几何尺寸见图 2。这个胞体的所有胞壁厚度 t 都相同。目前很多蜂窝材料是按图 3 所示的工艺制作的：将铝或 Nomex (一种称为芳纶纸的高分子材料) 的薄板条间隔地涂胶，粘合在一起，再拉开而形成。这种蜂窝竖直胞壁的厚度为 $2t$ ，倾斜胞壁厚度则为 t 。

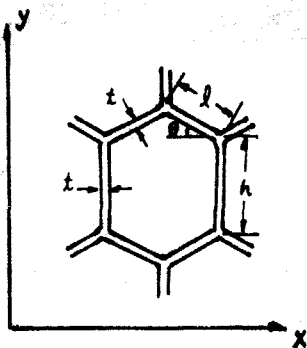


图2 蜂窝材料典型胞体的几何形状

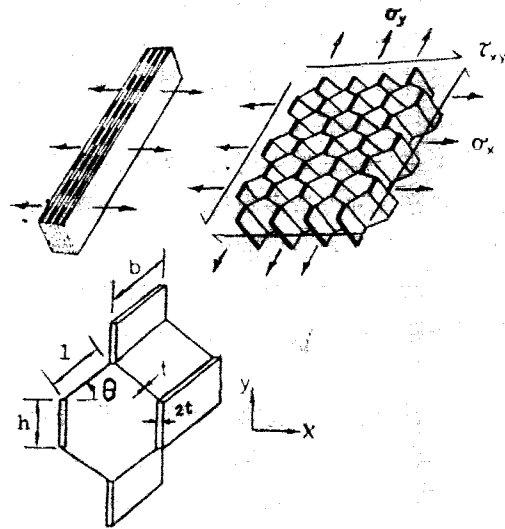


图3 蜂窝材料Nomex的制造和胞体的形状

当载荷作用在 xy 平面内时,称为面内受载 (in-plane loading);当载荷不在 xy 平面内时,称为面外受载 (out-of-plane loading)。显然,蜂窝材料是显著各向异性的,面内与面外受载时的力学行为很不一样。

2.1 面内受载时的力学性质

2.1.1 弹性性质 对于各种多胞材料,在加载的初始阶段其应力应变关系都是线性弹性的。蜂窝材料面内受载时,其弹性性质一般也是各向异性的。可以通过分析一个胞体的受力和变形,推出弹性模量 E_x^* , E_y^* 和 G_{xy}^* ,

Poisson比 ν_{xy}^* , ν_{yx}^* (有 $\nu_{yx}^*E_x^* = \nu_{xy}^*E_y^*$)。

在分析中可将胞壁简化为梁,并采用小变形假定。利用经典的 Euler 梁理论,可以求得胞壁的变形,从而求得有关的弹性常数。当只有单一载荷作用时(即 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 中只有1个不为零),一般只需要考虑胞壁(梁)的弯曲变形。例如等壁厚六角蜂窝受到 σ_x 作用时,胞体的变形如图4a,其倾斜胞壁有弯曲变形,受力和变形见图4b。利用简单的平衡分析,可将其上受力同外界应力 σ_x 联系起来,

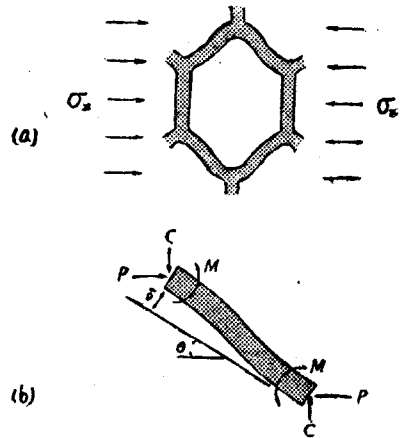


图4 胞体沿 x 方向加载时的变形和胞壁受力

$$P = \sigma_x (h + l \sin \theta) b \quad (1)$$

$$M = (1/2) Pl \sin \theta, \quad C = 0 \quad (2)$$

其中 b 为胞壁沿 z 方向的宽度。由梁的理论可得胞壁挠度为

$$\delta = Pl^3 \sin \theta / (12E_s I) \quad (3)$$

I 为胞壁截面惯性矩, $I = bt^3/12$ 。由此可得胞体沿 x 方向的应变 ε_x ,

$$\varepsilon_x = \delta \sin \theta / (l \cos \theta) \quad (4)$$

从而推出

$$\frac{E_x^*}{E_s} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\cos \theta}{(h/l + \sin \theta) \sin^2 \theta} \quad (5)$$

通过类似分析可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_y^*}{E_s} &= \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{(h/l + \sin \theta)}{\cos^3 \theta}, \quad \frac{G_{xy}^*}{E_s} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{(h/l + \sin \theta)}{(h/l)^2 (1 + 2h/l) \cos \theta} \\ \nu_{xy}^* &= \frac{\cos^2 \theta}{(h/l + \sin \theta) \sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

对于规则蜂窝,即 $h = l$, $\theta = 30^\circ$,有

$$\frac{E_x^*}{E_s} = \frac{E_y^*}{E_s} = 2.3 \left(\frac{t}{l}\right)^3 \quad (7)$$

$$\nu_{xy}^* = \nu_{yx}^* = 1 \quad (8)$$

由此可见,影响蜂窝材料面内弹性性质的参数有 t/l , E_s 和胞体几何形状参数 h/l 和 θ 。如果材料相同,胞体形状相同,则其弹性性质就只取决于 t/l 。而 t/l 与相对密度 ρ^*/ρ_s 成

正比关系。对于图 2 所示的蜂窝, 有

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{t}{l} \frac{(2+h/l)}{2\cos\theta(h/l + \sin\theta)}$$

因此通常可以用 ρ^*/ρ 来衡量其弹性性质。

如果材料上同时作用有 σ_x, σ_y , 则胞壁的弯曲变形可能相互抵消, 这时轴向变形就必须考虑。这个推导比较繁琐, 这里不给出。对于规则蜂窝有

$$\epsilon_x = \frac{1}{2.3E_s(t/l)^3}(\sigma_x - \sigma_y) + \frac{1}{2.3E_s(t/l)}(3\sigma_x + \sigma_y) \quad (9)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2.3E_s(t/l)^3}(\sigma_y - \sigma_x) + \frac{1}{2.3E_s(t/l)}(\sigma_x + 3\sigma_y) \quad (10)$$

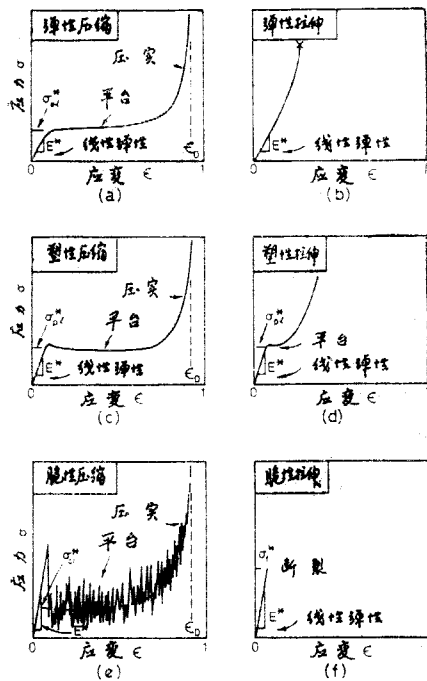


图 5 蜂窝材料面内单向压缩与拉伸的应力应变曲线。
(a), (b) 为高弹性蜂窝; (c), (d) 为弹塑性体蜂窝;
(e), (f) 为脆性体蜂窝

单向加载下的平台应力是蜂窝材料的失效应力。当蜂窝材料用于包装、防撞等目的时, 这个力学参数十分重要。胞壁材料和胞体形状不同时, 其失效模式可能是弹性屈曲、塑性坍塌或脆性断裂。单向加载下的失效应力可以通过分析不同的失效模式而得到。这种理论分析得到的失效应力和实验测得的平台应力基本符合。在面内一般加载下, 相应的失效应力就构成了应力空间 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ 中的失效面。在实际应用中, 材料往往不是在单向应力作用下失效的, 所以失效面的研究是个重要问题。

下面以图 2 所示的等壁厚弹塑性蜂窝材料为例, 介绍其在 σ_x, σ_y 平面 (不是 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 应力空间) 上的失效面的确定。胞体在 σ_x, σ_y 作用下, 可能变为图 6 a 所示的塑性机构而失

2.1.2 单向压缩与拉伸的应力应变曲线

图 5 为一组高弹性 (橡胶)、弹塑性体 (金属) 和脆性体 (陶瓷) 的蜂窝材料, 受到面内单向压缩与拉伸时的应力应变试验曲线^[9]。

可以看出, 胞壁材料不同的蜂窝材料其压缩曲线有相似的形状。曲线都有 3 个阶段: 初始的线性弹性段, 一段相当长的应力平台和最后应力急剧上升的压实段。在低应变率下, 可以观察到这 3 个阶段分别与胞壁的某种变形有关。线弹性段主要与胞壁的弯曲有关。应力平台则视材料不同, 分别是由于胞壁的弹性屈曲、塑性坍塌 (collapse) 和脆性胞壁断裂引起的。在胞体完全压坏时, 胞壁叠合在一起, 便出现了压实段。

拉伸曲线不大相同。高弹体和脆性体蜂窝都没有平台阶段。弹塑性蜂窝材料的平台也很短, 因为胞体朝拉伸方向调直, 应力很快上升。

2.1.3 面内加载时的失效面 (failure surface)

效。它的倾斜胞壁的受力如图 6 b, 其中 P_x 和 P_y 系根据平衡求得, 弯矩 $M = (P_x \sin \theta - P_y \cos \theta) l / 2$ 。图 6 a 所示的塑性铰系为压 (或拉)、弯组合的广义塑性铰。利用矩形截面梁在轴力和弯矩联合作用下的塑性极限曲线, 得到如下塑性失效面方程^[10,11]:

$$\pm \left[\frac{\sigma_x (h/l + \sin \theta) \sin \theta - \sigma_y \cos^2 \theta}{(t/l)^2} \right] = \frac{\sigma_{ys}}{2} \left\{ 1 - \left[\frac{\sigma_x (h/l + \sin \theta) \cos \theta + \sigma_y \cos \theta \sin \theta}{\sigma_{ys} (t/l)} \right]^2 \right\} \quad (11)$$

式中 σ_{ys} 为胞壁材料的屈服应力。这是两条相交的椭圆曲线。上面分析中没有考虑弹性屈曲的失效模式。在压应力作用下, 弹性屈曲失效可能先于塑性机构的形成, 这样就得到了图 7 所示的失效面。

胞体弹性屈曲的分析也是将胞壁简化为杆, 杆的两端和其他杆相连。在发生屈曲

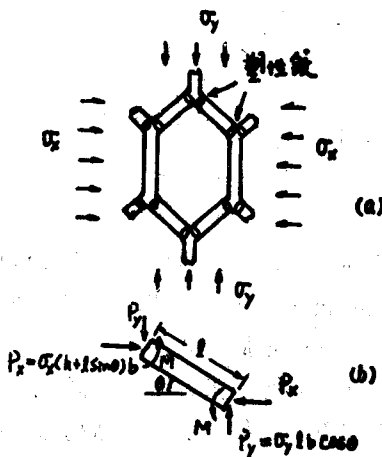


图 6 双向加载下胞体的塑性坍塌和胞壁受力

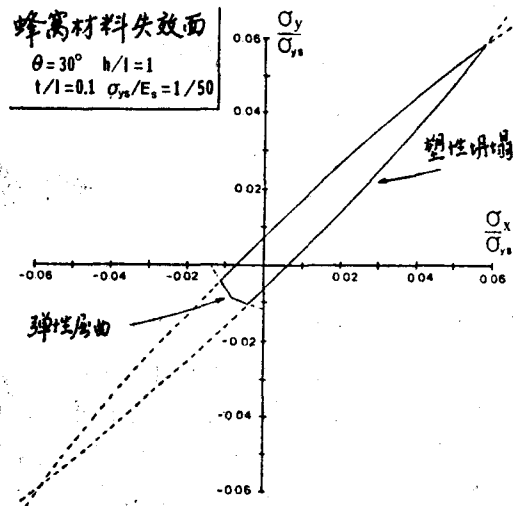


图 7 规则蜂窝的失效面

时, 杆端转动受到其他杆的约束。这种弹性转动约束可以通过因子 n 加以考虑, 而将杆的临界载荷表示为

$$P_{crit} = n^2 \pi^2 E_s I / h^2 \quad (12)$$

n 与 h/l 有关, 其分析见文献[9]或[12]。由于在不同的应力状态下胞体的屈曲模式可能不同, 因而弹性屈曲失效面的确定还是比较困难的。此外, 对于弹塑性蜂窝材料, 如果弹性屈曲模式和塑性破坏机构在几何上是相近的, 则它们可能相互影响, 单独考虑其中一种都可能过高估计其失效应力。这种相互影响很难精确分析, 通常采用下式来估计这种组合破坏的载荷因子 λ ^[13]:

$$\frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{\lambda_e} + \frac{1}{\lambda_p} \quad (13)$$

其中 λ_e 为弹性屈曲载荷因子, λ_p 是塑性失效载荷因子。

对于图 3 所示的蜂窝材料, 竖直胞壁壁厚为倾斜胞壁的 2 倍。Klintworth 和 Stronge^[14] 假定竖直胞壁始终不变形, 导出了在 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 空间中的失效面, 失效模式包括弹性屈曲、

塑性机构及其相互影响。分析过程中区分了6类主要失效模式，总共有16种之多的不同具体模式。

2.2 面外受载时的力学性质

蜂窝材料的面外强度和刚度都远高于其面内，因而常用来作为轻型夹层板的芯层材料，广泛用于飞行器部件和运动器材（如雪橇、高尔夫球杆、网球拍）等。

面外压力作用下的应力应变曲线如图8所示。对于低密度弹塑性蜂窝材料，线弹性阶段的结束一般是因为胞壁发生弹性屈曲，如图9。随后胞壁发生塑性折叠、撕裂，对于脆性材料则为压碎。

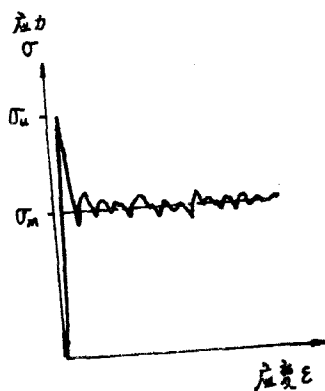


图8 蜂窝材料轴向压缩的应力应变曲线

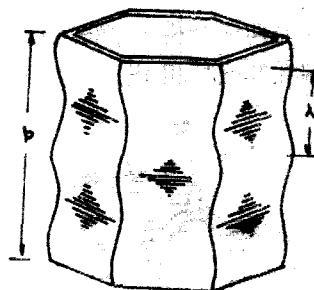


图9 蜂窝材料轴向压缩胞体屈曲模式

胞壁发生弹性屈曲时，其应力对应于应力应变曲线的最大值 σ_u ，见图8。和面内屈曲类似，每块胞壁的屈曲要受到相邻胞壁的约束，相邻胞壁的屈曲模式要协调，但情况要远比面内时复杂，其弹性屈曲载荷很难精确求出，只有一些经验性的近似公式。

最近北京大学力学系的一个研究小组深入地研究了这一问题。张大军和余同希^[15,16]根据蜂窝结构的自重复特性，在蜂窝结构中抽取出代表性的单元，如图10，按结构力学中求解超静定刚架的柔度法确定了壁厚为 t 和 $2t$ 的壁板两侧的转角弹性约束因子。例如，对于 $h/l=1$ ， $0 \leq \theta \leq 45^\circ$ 的情形，得出

$$K_1' = 29.565, K_2' = 7.868 \quad (14)$$

于是，蜂窝壁板的弹性屈曲问题可以转化为图11所示的侧边受转角弹性约束的弹性薄板的受

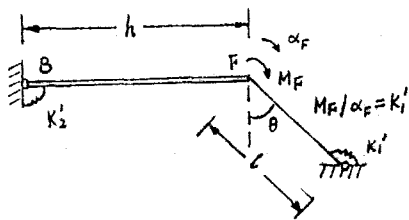


图10 蜂窝材料轴向压缩屈曲分析：转角弹性约束因子的确定

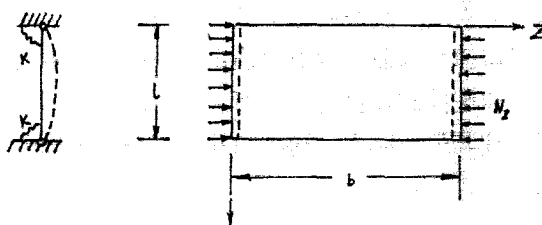


图11 蜂窝材料轴向压缩屈曲分析：特征壁板的受载情况及屈曲形式

压屈曲问题。顺次求出厚为 t 的壁板和厚为 $2t$ 的壁板的弹性屈曲临界载荷之后，适当求和就可以得出蜂窝材料的总体屈曲应力为

$$(\sigma_z)_{\text{crit}} = \frac{C^*}{\cos\theta(1 + \sin\theta)} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{t}{l}\right)^3 \quad (15)$$

其中系数 $C^* = 19.49$ 。在此工作之前, Gibson 等人^[9]曾经验性地假定壁板侧边约束为简支与夹支之间的某个中值, 得出 $C^* = 20.0$ 。而 J. Zhang 等人^[17]曾假定壁板两侧全为夹支, 得出 $C^* = 28.65$ 。张大军等人的工作避免了对壁板之间的弹性约束作人为的假定, 因此所得的屈曲载荷较为合理。

北京大学力学系王颖坚^[18]采用另一种模型研究了同一问题。他认为, 邻接壁板对主壁板弹性屈曲的约束作用, 是通过邻接壁板的扭转刚度实现的。设主壁板的厚度为 t_1 , 则其挠曲方程为(坐标系参考图 3)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{p}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (16)$$

其中 $D = E_s t_1^3 / [12(1 - \nu^2)]$ 。邻接壁板的约束表现为上述方程在 $y = \pm h/2$ 上的边条件

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \pm 2K \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial y} \quad (17)$$

其中 $2K = E_s l t_1^3 / [3(1 + \nu)]$ 是邻接壁板的扭转刚度。在这样的边界条件下求上述 4 阶偏微分方程的非零解, 就转化为特征值问题。这种方法普遍适用于求解各种 6 角形、方形和 3 角形蜂窝的弹性屈曲临界载荷。具体对于 $h/l = 1$ 的非等厚 6 角形蜂窝, 他得到的 C^* 为 23.54, 比文 [15] 的结果高约 20%。这主要来自力学模型上的差异: 文 [15] 认为邻板对主板产生转角弹性约束, 实际上取决于邻板的弯曲刚度; 文 [18] 则认为邻板对主板的约束取决于邻板的扭转刚度。现在他们正在发展一种更合理的模型, 使蜂窝中所有的板以相互协调的统一模式屈曲, 并据此更精确地求出弹性屈曲的临界载荷。

图 8 中的 σ_m 是平均压溃应力 (mean crushing stress), 它表征蜂窝材料的承载能力。对于弹塑性蜂窝, 它对应于塑性后屈曲, 这时胞壁发生连续的折叠, 以及胶合开裂等现象。McFarland^[19]分析了一个代表性折角, 假定胶合不开裂, 求出了 σ_m 。1983 年 Wierzbicki^[20]重新研究了这一问题, 注意到了压溃过程有胶合开裂现象, 提出新的塑性变形模式, 给出了更好的结果。

2.3 变形局部化效应 (localization effects)

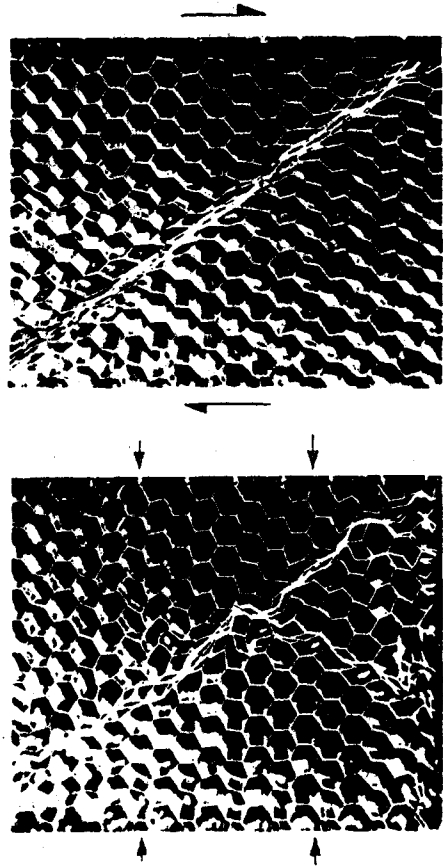


图 12 变形局部化

蜂窝材料受到面内压缩或剪切时, 由于胞体的应变软化, 应变集中在一条 (或多条) 狭窄的带上, 见图 12. 这就是多胞材料所常见的变形局部化效应. 带内的胞体发生严重的变形, 直至被压实. 和变形局部化带相邻的胞体一层层地进入这个带内, 逐渐地变形、压实. 多胞材料的压缩或剪切变形通常就是以这种非均匀变形的形式发展的. 在均匀受载时, 初始缺陷对局部化形成有很大的影响.

2.4 非局部效应

在经典连续介质力学中, 变形总是集中在材料发生软化的区域内. 对于实际材料, 某点的力学性质可能受到离开它某个特征距离的另一点的变形的影响. 在非局部连续介质理论 (non-local continuum theory) 中, 这种影响可以用一个长度参数考虑. 如果这个描述微结构软化现象的长度参数很小 (如金属中的位错), 那么材料是弱非局部的 (weakly non-local), 可以用经典连续介质理论. 但在蜂窝材料压溃时, 各个胞体间相互影响是强非局部的 (strongly non-local). 同时, 由于胞体压溃模式的关系, 在不同的方向上非局部化程度不同^[21]. 变形局部化沿着强非局部的方向发展, 形成有一定取向的变形局部化带, 如图 12.

2.5 蜂窝材料的动力行为

2.5.1 蜂窝材料中波的弥散现象 Klintworth^[21] 研究了弹性波在蜂窝材料面内传播的性质. 在面内, 蜂窝材料可以看成具有微极性质的 Cosserat 介质^[22,23]. 描述这种介质的变形除了位移矢量外, 还要有独立的微转动矢量, 与之相应的则有微转动惯量. 对于蜂窝材料受到高应变率作用时, 这种微转动惯性的作用就会变得比较重要, 起到增强胞体的作用. 下面通过蜂窝材料中 1 维弹性波的研究, 说明这种 Cosserat 介质的动力特性.

考虑图 3 所示的蜂窝材料. 当有某种应变时, 总是伴随着胞壁的相应的微转动; 这种微转动同变形的模式有关系. 例如当沿 x 方向有应变 $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ 时, 倾斜胞壁有微转角 $\phi = \varepsilon_x \cos \theta / \sin \theta$. 若记胞壁的转动惯量为 J , 其转动动能则为 $(J/2) \phi^2$. 在动力变形时, 单位蜂窝体积内的总能量为线性运动动能、转动动能和应变能之和, 即

$$\frac{1}{2} \rho^* \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J \frac{\cos \theta}{l(h+l \sin \theta) \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E_x^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (18)$$

应用 Hamilton 原理, 可得运动方程为

$$\rho^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{L_x^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = E_x^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (19)$$

其中

$$L_x = \sqrt{\frac{l^3 \cos^2 \theta}{6(h+l) \sin^2 \theta}} \quad (20)$$

L_x 为反映微结构尺度的特征长度. 设波长为 λ , 当 L_x / λ 为小量, 即当波长不太短时, 波速可近似表示为

$$\frac{c_x(\lambda)}{c_x} = 1 - \pi^2 \left(\frac{L_x}{\lambda} \right)^2 \quad (21)$$

其中 c_x 是将蜂窝材料看成等价的经典连续介质时的波速, 有

$$c_x = \sqrt{\frac{E_x^*}{\rho^*}} = \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s}} \sqrt{\frac{1}{1+h/l}} \frac{t}{l} \cot \theta \quad (22)$$

可以类似地得到沿 y 方向传播的弹性波波速公式。由此可见，在蜂窝材料中波速依赖于波长，含有不同频率的脉冲在传播过程中将发生弥散。这与经典连续介质不同，不考虑胞壁的微转动就得出这样的结果。如果输入的波长 λ 与材料微结构参数 L_c 同阶，则波的传播情况就更为复杂。

2.5.2 圆管堆动力压溃 (dynamic crushing) 过程的研究 多胞材料经常用于缓冲保护的。当多胞材料用作缓冲保护而受到高速物体撞击时，其表层胞体以很高速率被压坏，并向内部传播。其结果胞体一层层连续地压坏，冲击能量被吸收，而所传递的冲击力的大小受到限制。金属圆管是一种很有效的能量吸收元件。将大小相同的金属圆管规则排列（正方或密排 6 方）就构成一类特殊的多胞材料——圆管堆 (tube array)。这种圆管堆用作缓冲保护十分有效。有许多人实验研究圆管堆在冲击载荷作用下，圆管压溃的传播过程^[24-26]。圆管堆的这种缓冲作用同所用的圆管的动力性质有关。可以根据圆管的动力性质，建立相应的模型，模拟压溃的传播过程。

3 泡沫材料的力学行为

当泡沫材料被压缩时，应力应变曲线也可以分为 3 个阶段，和蜂窝材料面内加载十分相像（见图 5）。当应变很小时，它呈现线弹性；然后出现一个平台，这时应变增大很多而应力几乎恒定不变；最后胞壁被挤压在一起，材料被压实，应力又迅速增大。但是，泡沫材料要比蜂窝材料复杂。除了胞体几何形状比 2 维蜂窝材料要复杂得多外，还有开孔、闭孔之分。胞内的气体或液体对材料的力学性质也有影响。

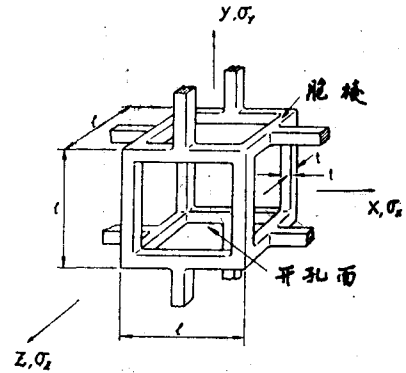


图 13 泡沫材料的正立方体模型

泡沫材料胞体的几何形状太复杂，无法像蜂窝材料那样精确分析。通常采用量纲分析的方法，也就是选取某种几何形状的胞体模型，分析其性质同相对密度、胞壁材料的关系。这种关系只是按量级估计的，表达式中保留有一待定常数，需要通过实验确定。实践表明，这种量纲分析的结果只依赖于所假定的变形模式，对所选取的胞体模型不敏感。对于开孔各向同性泡沫材料，通常取图 13 所示的正立方体模型^[1,9]。根据初等梁理论计算变形量，并注意到 $\rho^*/\rho_s \propto (t/l)^2$ ，可以得到开孔泡沫的模量为

$$E^*/E_s = C_1(\rho^*/\rho_s)^2 \quad (23)$$

$$G^*/E_s = C_2(\rho^*/\rho_s)^2 \quad (24)$$

其中 C_1, C_2 为常数。通过和大量实验数据比较得出 $C_1 \approx 1, C_2 \approx 3/8$ 。真实的泡沫的 ρ^*/ρ_s 由 0.5 到 0.005 变化 10^2 倍，因而泡沫的 E^* 相应地可变化 10^4 倍，这给实际应用提供了宽阔的选择范围。

当应变较大（例如超过 5% 或某个更小的值）时，泡沫材料不再保持为线弹性，而是出现应力平台。这时对于低密度弹塑性的泡沫，通常是胞壁（或棱杆）发生弹性屈曲。按杆的弹性屈曲理论可求出相应的临界应力为

$$\sigma_{e1}^* = C_4 E_s (\rho^*/\rho_s)^2 \quad (25)$$

对于密度较高的弹塑性泡沫，由于胞壁（或棱杆）较厚，在发生可能的屈曲之前材料已经进入塑性，于是其失效由某种塑性坍塌机构所控制。这时塑性极限载荷与材料的屈服应力有关，可表示为

$$\sigma_{p1}^* = C_5 \sigma_{ys} (\rho^*/\rho_s)^{3/2} \quad (26)$$

C_4, C_5 由实验定出， $C_4 \approx 0.05, C_5 \approx 0.3$ 。

对于弹脆性泡沫，其失效则是由于胞壁（或棱杆）的弯曲断裂而引起的材料脆性压溃。可以类似地给出其脆性压溃临界应力 σ_{cr}^* ，以及泡沫材料的拉伸断裂韧度 K_{Ic}^* ，

$$\sigma_{cr}^* = C_6 \sigma_{fs} (\rho^*/\rho_s)^{3/2} \approx 0.65 \sigma_{fs} (\rho^*/\rho_s)^{3/2} \quad (27)$$

$$K_{Ic}^* = C_7 \sigma_{fs} (\pi l)^{1/2} (\rho^*/\rho_s)^{3/2} \approx 0.65 \sigma_{fs} (\pi l)^{1/2} (\rho^*/\rho_s)^{3/2} \quad (28)$$

其中 σ_{fs} 为胞壁材料的拉伸断裂强度。

从上述分析我们看到，无论是泡沫材料的刚度还是强度，都是由相对密度 ρ^*/ρ_s 控制的。低密度 ($\rho^*/\rho_s \approx 0.01$) 的弹性泡沫材料刚度很小，适合于包装小的精密器件，如电唱机唱头、电子管等等。密度稍大 ($\rho^*/\rho_s \approx 0.05$) 的弹性泡沫材料具有适中的刚度和强度，

适于制作床垫和坐垫等。密度更大的泡沫材料则用来包装较重的器件或小型机具。对于计算机、电视机等采用聚苯乙烯“硬”泡沫塑料包装，可以有效地防止搬运过程中被撞坏或摔坏。这时，泡沫材料应力应变曲线中的长平台部分得到了充分的应用，它吸收了碰撞过程中的大部分能量。

泡沫材料的力学行为还同温度、应变率有关。一方面这是因为胞壁材料往往是高分子聚合物，本身性质就与温度、应变率有关，另一方面则是由于胞内气体或液体的影响。当泡沫材料变形时，其内的气体（或液体）或是被迫变形（闭孔），或是被迫从一个胞流到另一个胞（开孔）。气体的可压缩性与温度有关，这就引入了新的温度依赖关系。对于开孔泡沫，排出或吸入流体要克服其粘性做功，也引入新的应变率依赖关系。

还可以应用其他模型，如 4 杆模型，来研究泡沫的力学行为^[10,27]。

4 工程应用举例——包装设计

泡沫材料大量用于包装。防护性包装的实质是要吸收外来撞击的能量，并使得作用在被包装物体上的力小于某个许可值。

泡沫材料在压缩过程中所吸收的能量主要在平台阶段。对于某一给定的包装，有一最佳的泡沫密度。

泡沫密度太低，会在能量还没完全吸收时，就被压实了，最后作用力有显著提高。若密度太

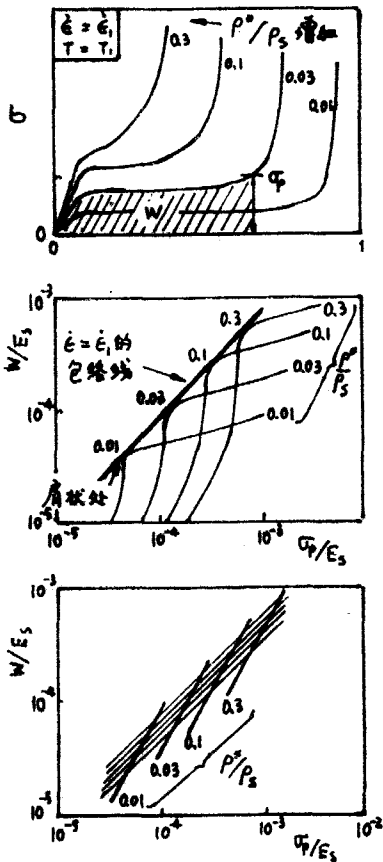


图 14 能量吸收图

高,其平台应力可能超过被包装物的应力许可值。因此,“理想”的泡沫密度应当是其平台应力正好低于包装应力许可值,而平台下的面积等于所要吸收的动能。

为了指导选择合适的泡沫材料用于包装,人们提出了Janssen因子、缓冲因子、Rusch曲线和能量吸收图(energy absorption diagram)等方法^[9]。其中能量吸收图被认为是最好的,这里对它作一简要介绍。

首先,对某种泡沫材料取相对密度在某个范围内的一批试件作压缩试验。试验是在相同温度和相同应变率下进行的。这样给出一组曲线,见图14a。第二步,测出每条曲线下直至 σ_p 的面积 W ,并作出无量纲化的 $W/E_s \sim \sigma_p/E_s$ 曲线,如图14b。对于每种密度的材料,都有一个最佳选择的 σ_p ,它对应于图14b能量曲线的肩状处。图中的粗线就是通过这些最佳点的不同密度曲线的包络线。这条包络线描述了在给定温度下,应变率为 $\dot{\epsilon}_1$ 时最佳密度的泡沫材料的 W/E_s 与 σ_p/E_s 间的关系。

对于不同应变率 $\dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3, \dots$ 可以分别得到相应的这种包络线,见图14c。图中另一族与之相交的曲线是密度相等的点的连线。由最后得到的这族曲线可以得到“最佳”相对密度下的包装许可应力及所吸收的能量。因而可以用来指导人们选择泡沫材料的密度、泡沫材料与被包装物的接触面积、泡沫材料的厚度等参数。

5 天然多胞材料

由于多胞材料具有独特的力学性质,许多动植物的组成部分在其长期进化过程中,逐渐形成了完美的多胞结构。目前人们研究得比较多的有木材、软木和松质骨等,下面简要介绍木材和松质骨的研究情况。

5.1 木材^[9]

木材是最古老也是用得最广的结构材料之一。木材的种类很多,性质很不相同。人们感兴趣的性质有弹性模量、压溃强度和韧度等。

用低倍显微镜观察,可以发现木材是多胞固体,它的胞体通常是6棱柱形的。在高倍显微镜下,可以发现胞壁是纤维加强的复合材料。关于胞壁的性质,人们作了细致的测定^[28,29]。

理想化的木材胞状结构如图15所示。它由平行排列的6棱柱形胞体、辐射纹、管帽和横膜所组成。根据蜂窝材料的结果,我们知道木材的性质也取决于胞壁的性质、胞体的几何形状和相对密度。而对于某一种木材的力学性质可以用其相对密度 ρ^*/ρ_s 表示。

例如切向杨氏模量 E_T^* 可写成

$$E_T^*/E_s = C_1(\rho^*/\rho_s)^3 \quad (29)$$

轴向杨氏模量 E_A^* 则可写成

$$E_A^*/E_s = C_2(\rho^*/\rho_s) \quad (30)$$

轴向和切向压溃强度 σ_T^* 和 σ_A^* 可分别表示为

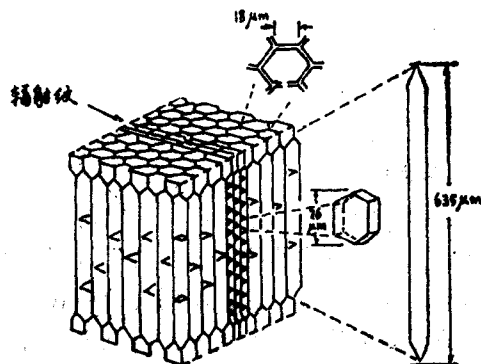


图15 木材的多胞结构模型(美洲轻木 balsa)

$$\sigma_T^*/\sigma_{y_s} = C_5(\rho^*/\rho_s)^2 \quad (31)$$

$$\sigma_A^*/\sigma_{y_s} = C_6(\rho^*/\rho_s) \quad (32)$$

式中 E_s 为轴向胞壁的杨氏模量, σ_{y_s} 为轴向胞壁的屈服强度, 常数 C_1, C_2 等通过实验定出^[6,30,31]。虽然木材与蜂窝材料不同, 它还有辐射纹、管帽和横膜等, 但根据蜂窝材料理论所给出的结果, 可以得到木材的力学性质与其相对密度在量纲上的关系。

木材在动力作用下的行为对许多工程应用是重要的, 这方面研究工作也在进行中。

5.2 松质骨

骨是十分精巧的夹层结构: 外层是密实的壳体, 内部是多胞状结构。这种结构形式使得骨的重量轻, 同时又能满足其力学功能要求。这种骨的内部多胞状结构就是松质骨。了解松质骨的力学性质与许多生物医学课题有关, 例如可使人工设计的替换假骨的性能更接近于真骨。

在低倍显微镜下可以发现松质骨的多胞结构^[32]。密度较小的骨就像杆的网络, 是开孔的; 当密度增大时, 这些杆就变宽了, 变成板状了, 最后就变成了几乎是闭孔了。胞体的形状与骨所受到的载荷有关^[7]。若 3 个主应力几乎相等, 则胞体是等轴的, 若有 1 个方向的应力比其他 2 个方向大, 则胞壁就趋向这个方向, 并变宽、变厚, 即所谓应力取向(stress-oriented)。

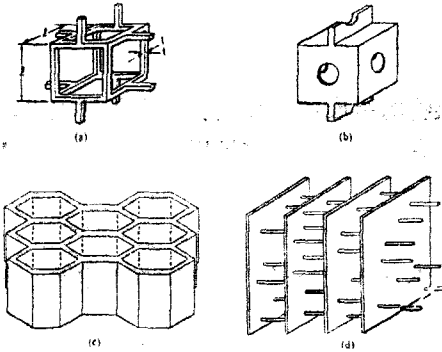


图 16 松质骨的多胞结构模型 (a) 低密度等轴结构; (b) 高密度等轴结构; (c) 应力取向棱柱形结构; (d) 应力取向平行板结构

图 16 为 4 种不同松质骨的多胞结构模型。图 16a, b 分别是低密度与高密度等轴胞体模型; 图 16c, d 则是应力取向胞体模型。根据类似的分析, 可以得到松质骨的力学性质与其相对密度的关系, 其结果也得到了实验的支持^[33]。还有不少问题有待研究。例如骨的各向异性、骨的断裂韧度和结构、密度间的关系等。

图 16 为 4 种不同松质骨的多胞结构模型。图 16a, b 分别是低密度与高密度等轴胞体模型; 图 16c, d 则是应力取向胞体模型。根据类似的分析, 可以得到松质骨的力学性质与其相对密度的关系, 其结果也得到了实验的支持^[33]。还有不少问题有待研究。例如骨的各向异性、骨的断裂韧度和结构、密度间的关系等。

6 结束语

多胞材料的应用日益广泛, 人们对多胞材料的认识也日渐深入。多胞材料弹性性质的预测已有了一套比较成熟的方法, 其失效面的形状也有了一定的了解。人们还在进一步深入研究多轴应力下的失效模式、不同失效模式(如弹性屈曲和塑性坍塌)之间的交互作用, 以及破坏后的大变形等非线性现象。研究多胞材料在动载荷作用下的响应有重要意义。从具有微极性质的胞体的动力特性出发, 分析多胞材料动力响应的特点, 是很有趣味和有实际意义的问题。这些问题的研究对于天然多胞材料同样是十分重要的。目前, 在我国应用多胞材料理论指导工程设计有着特殊的重要性。

参 考 文 献

- Gibson L J. *Mat. Sci. Engng.* A110 (1989): 1-36
- Griffin J D, Skochdopole R E. in *Engineering Design for Plastics*, ed. Baer E (1964)

- 3 Suh K W, Skochdopole R E. Encyclopedia of Chemical Technology. 3rd edn. ed. Kirk-Othmer, Vol. II (1980) : 82
- 4 Hilyard N C(ed). Mechanics of Cellular Plastics. Applied Science, London (1982)
- 5 Allen H G. Analysis and Design of Structural Sandwich Panels. Pergamon, Oxford (1969)
- 6 Bodig J, Jayne B A. Mechanics of Wood and Wood Composites. New York (1982)
- 7 Currey J D. The Mechanical Adaptions of Bones. Princeton University Press (1984)
- 8 Wainwright S A, et al. Mechanical Design in Organism. Princeton University Press (1976)
- 9 Gibson L J, Ashby M F. Cellular Solids; Structures & Properties. Pergamon Press (1988)
- 10 —, et al. *Int. J. Mech. Sci.*, **31** (1989) : 635
- 11 Triantafillou T C, et al. *ibid*, **31** (1989) : 665
- 12 Gibson L J, et al. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A382** (1982) : 25—42
- 13 Horne M R. *ibid*, **A274** (1963) : 343
- 14 Klintworth J W, Stronge W J. *Int. J. Mech. Sci.*, **30** (1988) : 273
- 15 张大军, 余同希. 上海交通大学学报, 5—6 (1990)
- 16 —. 北京大学力学系硕士论文 (1990)
- 17 Zhang J, Ashby M F. CUED/C-MATS/TR 157 (April 1989)
- 18 王颖坚. 固体力学学报, 待发表
- 19 McFarland R K. *AIAA Journal*, **1** (1963) : 1380
- 20 Wierzbicki T. *Int. J. Impact Engng.*, **1** (1983) : 157
- 21 Klintworth J W. Ph. D. thesis. Cambridge University. Engineering Department (1989)
- 22 Eringen A C. *J. Math. Mech.*, **15** (1966) : 909
- 23 Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford (1986)
- 24 Stronge W J, Shim V P-W. *Int. J. Mech. Sci.*, **29** (1987) : 381
- 25 —, —. *J. Engng. Mat. Tech.*, **110** (1988) : 185
- 26 Reddy T Y, et al. Paper presented at Int. Conf. Mech. Prop. Materials at High Rates of Strain, Oxford (1989) : 447
- 27 Warren W E, Kraynik A M. *J. A. M.*, **55** (1988) : 341
- 28 Cave I D. *Wood Sci. Tech.*, **2** (1968) : 268
- 29 —. *ibid*, **3** (1969) : 40
- 30 Goodman J R, Bodig J. *J. Str. Div., ASCE*, **ST11** (1970) : 2301
- 31 Easterling K E, et al. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A383** (1982) : 31
- 32 Dyson E D, et al. *Nature*, **225** (1970) : 957
- 33 Stone J L. *J. Biomech.*, **16** (1983) : 743

MECHANICAL BEHAVIOUR OF CELLULAR SOLIDS

Hua Yun-long

Beijing Agricultural Engineering University

Yu Tong-xi

Department of Mechanics, Beijing University (Peking University)

Abstract Materials with a cellular structure have unique mechanical properties, and find increasingly wider use in engineering. Man-made cellular materials can be categorized into those of honeycomb type and foam type. This paper reviews recent studies on mechanical behaviour of materials of both honeycomb type and foam type under various loading conditions. Cellular structures of some natural materials, such as wood and cancellous bone, and their models are described briefly as well.

Keywords *cellular solid; honeycomb; foam; elastic modulus; failure surface; wood; cancellous bone*