

动力分析中的边界元法 (II)

D. E. Beskos

希腊 Patras 大学土木工程系

3 其他边界方法

第 1, 2 两节较详细介绍了频域中和时域中的直接边界元法。这种边界元法称为直接的, 是因为它讨论了具有重要物理意义的量, 例如位移和拉力等, 从而成为不仅在弹性动力学中而且在这种方法的所有其他力学应用中最广泛采用的边界元法。反之, 以没有物理意义的某些虚拟量或源密度表述问题的间接边界元法是不太流行的, 尽管事实上它具有比直接法更长的历史, 而且与积分方程法方面的经典工作密切相关。

除了这两种边界元法外, 过去几年中还发展了其他一些边界方法, 看来它们很有前途。本节首先讨论间接边界元法及其一种改进形式, 随后简要介绍某些应用于弹性动力学的其他边界方法。

3.1 间接边界元法 考虑具有体力 \mathbf{b} 和零初条件的在一表面 S 包围之内的各向同性、均匀、线弹性区域 V 的运动。在 S 上未知密度 $\varphi(\xi, t)$ 的虚拟源的引入允许人们分别将位移场 $u_i(\mathbf{x}, t)$ 和拉力场 $t_i(\mathbf{x}, t)$ 表达为在 S 和 V 上的与 φ 和 \mathbf{b} 相关的单位解的下列形式积分^[26]:

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_S u_{ij}^0 * \varphi_j dS(\xi) + \int_V u_{ij}^0 * b_j dV(\xi) \quad (3.1)$$

$$t_i(\mathbf{x}, t) = \int_S t_{ij}^0 * \varphi_j dS(\xi) + \int_V t_{ij}^0 * b_j dV(\xi) \quad (3.2)$$

此处星号 (*) 表示例如下述意义上的卷积:

$$\int_S u_{ij}^0 * \varphi_j dS(\xi) = \int_0^t d\tau \int_S u_{ij}^0(\mathbf{x}, \tau; \xi, t) \varphi_j(\xi, t - \tau) dS(\xi) \quad (3.3)$$

令 \mathbf{x} 在 S 的内部趋于在边界上的一点 \mathbf{x}_0 , 方程 (3.1) 和 (3.2) 变为边界积分方程

$$u_i(\mathbf{x}_0, t) = \int_S u_{ij}^0 * \varphi_j dS(\xi) + \int_V u_{ij}^0 * b_j dV(\xi) \quad (3.4)$$

$$t_i(\mathbf{x}_0, t) = -\frac{1}{2} \varphi_i(\mathbf{x}_0, t) + \int_S t_{ij}^0 * \varphi_j dS(\xi) + \int_V t_{ij}^0 * b_j dV(\xi) \quad (3.5)$$

此处假定 \mathbf{x}_0 不是 S 的拐角或边缘。上述边界积分方程以类似于直接边界元法中所用的方式数值地求解, 得到虚拟密度 φ_j 后, 从 ((3.1) 和 (3.2) 可确定 u_i 和 t_i 。频域间接边界元法得出与 (3.4) 和 (3.5) 同样形式的方程但不带卷积, 并应把 u_{ij}^0 和 t_{ij}^0 理解为在频域中的, 且所有各量均为频率 ω 的函数。

最近几年, Wong^[325, 326], Sánchez-Sesma^[254, 255] 和 Dravinski^[97-107] 为求解在平面应变或反平面应变谐运动的条件下的波散射问题, 已发展了一个在频域中的特殊的间接边界元法。他们的方法, 例如, 对于零体力的平面应变运动情形, 包括首先按 (1.15)_i 将位移场

用两个位移势 φ 和 ψ 表示, 然后试图在频域中用间接边界元法^[97]解方程 (1.16), 即

$$[\nabla^2 + (\omega/c_1)^2]\varphi(\mathbf{x}, \omega) = 0, [\nabla^2 + (\omega/c_2)^2]\psi(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (3.6)$$

最后 φ 和 ψ 表达为分布于表面 S 上的未知虚拟密度 q_1 和 q_2 的下列形式的积分:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, \omega) &= \int_S q_1(\xi) G_1(\mathbf{x}, \xi, \omega) dS(\xi) \\ \psi(\mathbf{x}, \omega) &= \int_S q_2(\xi) G_2(\mathbf{x}, \xi, \omega) dS(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

此处 G_1 和 G_2 为对应于方程 (3.6) 的 Green 函数。将边界条件用 φ 和 ψ 表示并使用 (3.7), 这使我们能得到可对虚拟密度 q_1 和 q_2 数值地求解的边界积分方程, 由此 φ 和 ψ 从而 u 均可确定。边界条件的应用是通过配置法作出, 而 q_1 和 q_2 的求解是在最小二乘意义上实现的。为避免由于 G_1 和 G_2 出现引起的奇性, 积分不在 S 上而在非常靠近 S 的辅助面 S^* 上进行。对于涉及半平面的问题, 在表述方式中使用的 G_1 和 G_2 是满足在自由半平面表面上零拉力边界条件的那些 G_1 和 G_2 。

这种方法已成功地应用于由于表面或次表面不规则性 (包括对于地震学和无损检测是重要的峡谷、冲积层和内含物或空穴) 引起的 SH 波, SV 波, P 波和 Rayleigh 波的绕射的各种半平面弹性动力学问题的求解。

3.2 广义边界法 按照这些方法, 在频域中表述的弹性动力学问题的求解是在边界上进行的, 但并不采用奇异积分方程。这是将解表达为满足问题的控制微分方程并形成 c -完备系的函数的线性组合而实现的。然后此解表达式的系数通过迫使边界上的边界条件在最小二乘意义下得到满足而求出。显然此处主要困难是对于各种运动情形以系统而严格的方式构造解的 c -完备系, 这一困难已由于 Herrera^[126] 的开拓性工作在很大程度上得到克服。此法已成功地由 England et al^{[110], [111]} 和 Sánchez-Sesma et al^[266, 268] 用于二维中各种波绕射问题的求解, 并由 Sánchez-Sesma^[267] 用于三维。

另一边界方法是由 Quinlan^[246] 对于弹性静力学问题开始发展的边缘函数法。此法在解的表达式中不仅采用只满足控制微分方程的函数, 而且还要加上采用具有如下性质的函数, 即此函数随着离边界边缘的距离的增加而迅速衰减, 而此边界是用平表面来近似。此处的困难是这些特殊的渐近函数的构造, 但是一旦构成, 问题就能容易地以比前一方法用更少的函数求解。边缘函数法已见到对于板和扁壳的自由振动问题的有限的应用^[215, 228]。

3.3 T 矩阵法 近几年来在频域中的各种二维和三维的弹性波散射问题已成功地用所谓 T 矩阵法解出。它是由 Waterman^[312, 313] 首先对声波和电磁波提出的, 后来由 Waterman^[314], Varadan & Pao^[307] 推广到弹性波。按照此法, 已知的入射场、未知的散射场和此问题的 Green 函数都展开成以基函数 (例如球函数) 组来表示, 而此问题的积分表达式用来构成转换矩阵即 T 矩阵, 它将散射场展式的未知系数与入射场展式的已知系数相关联。由带有已知被积式 (基函数的组合) 的边界积分组成的 T 矩阵的元素, 是用 Gauss-Legendre 求积公式进行数值计算的。关于此法及其应用, 进一步的介绍可在 Kristenson & Ström^[174], Boström et al^[47-49], 特别是 Varadan et al^[299-306, 243, 175] 的工作中找到。

3.4 Born 近似法 最近, 量子力学中关于波绕射问题的著名的 Born 近似法, 已被 Mal & Knopoff^[183], Gubernatis et al^[123, 124], Chu, Askar & Cakmak^[67-71, 21], Hudson & Heritage^[127] 以及 Kanwal^[138] 成功地应用于频域中的平面弹性动力学问题。此法包括

将问题表述为如直接边界元法那样的积分形式，然后以迭代方式求解所得的边界积分方程。于是位移场的解最终求得为逐次近似解的有限和（Born 级数）。最近，Schuster^[263-265] 以 Born 近似法的概念为基础，对于声波（或弹性动力学中反平面应变波）散射问题的求解，已提出两个有效的格式，即扰动 Born 级数法和边界元法 + Born 级数的混合法。

3.5 以质量矩阵概念为基础的动力边界元法 近几年中 Nardini & Brebbia^[210-214,55] 对于结构的自由和受迫动力分析发展了一种新方法，它把问题简化成了下列形式的关于时间的二阶常微分矩阵方程的求解问题：

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (3.8)$$

此方程是此问题的有限元或有限差分表述得出的标准形式。然而，在方程 (3.8) 中质量矩阵 $[M]$ ，刚度矩阵 $[K]$ ，外载矢量 $\{F\}$ 和位移矢量 $\{U\}$ ，都只和边界节点有关，从而大大减小了问题的规模。这种表述从广义 Maxwell-Betti 互易定理开始，最后导出边界积分表达式^[213]

$$c_{ki}u_i + \int_S t_{ki}^* u_i dS - \int_S u_{ki}^* t_i dS + \rho \left(c_{ki} \phi_{i,i} + \int_S t_{ki}^* \phi_{i,i} dS - \int_S u_{ki}^* \eta_{i,i} dS \right) \ddot{a}_i = 0 \quad (3.9)$$

此处 u_{ki}^* 和 t_{ki}^* 组成此问题的静力基本解对， $a_i^j(t)$ 通过下列关系式定义：

$$u_i(\xi, t) = a_i^j(t) f^j(\xi) \quad (3.10)$$

对于无界域附带有 $f^j(\xi)$ 满足静力方程

$$\bar{\sigma}_{l_{i,m};m} + \delta_{li} f^i = 0 \quad (3.11)$$

而 $\phi_{i,i}$ 和 $\eta_{i,i}$ 为方程 (3.11) 的位移解和相应的拉力。将边界 S 离散为边界元，接着把 (3.9) 写成矩阵形式

$$[H]\{U\} - [G]\{P\} + \rho([H]\{\phi\} - [G]\{\eta\})\{\ddot{a}\} = 0 \quad (3.12)$$

最后使用变换

$$\{\alpha\} = [E]\{U\}$$

使 (3.12) 变成由 (3.8) 给出的形式，并有

$$\left. \begin{aligned} [M] &= \rho([H]\{\phi\} - [G]\{\eta\})[E] \\ [K] &= [H], \{F\} = [G]\{P\} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

对于自由振动问题有 $\{F\} = 0$ ，而 (3.8) 简化为本征值问题

$$([K] - \omega^2[M])\{U_0\} = 0 \quad (3.14)$$

此处

$$\{U\} = \{U_0\} e^{i\omega t} \quad (3.15)$$

此法结合了边界元法和有限元法或有限差分法的优点，已成功地用于二维中各种自由和受迫振动问题的求解。最近，Ahmad & Bancrjee^[10] 发表了一个类似的方法。

4 动力土壤-结构相互作用

非常有意义而且重要的动力土壤-结构相互作用一类问题是边界元法最成功应用的一个示范。的确，边界元法是处理模拟土壤介质的无限或半无限弹性体的理想方法，因为它将问题的空间维数减少 1 个，并自动计入了无穷远处的辐射条件，从而不需要非反射的边界，后

者是诸如有限元法或有限差分法之类的域型方法的基本副产品。结构的处理可用边界元法或更好用有限元法进行。在后一情形中,必须注意适当地将边界元法和有限元法相结合。本节叙述边界元法在动力土壤-结构相互作用中的下列应用。

4.1 地下结构的动力行为 为确定任意形状的隧道和山洞对二维或三维情况下地震波或外载荷的稳态响应或暂态响应,频域法和时域法均已与边界元法一起使用。已考虑了无限介质或半平面介质中的排成一列和不成一列的空腔。

地震波冲击在排成一列的隧道上的最重要的情形对于土壤和衬砌均采用边界元法处理为波绕射问题,土壤和衬砌则通过协调和平衡在界面处耦合起来。对于无限土壤情形,采用第1节中给出的无限空间 Green 函数之一;而对于半平面或半空间情形,可采用满足拉力边界条件的特殊 Green 函数,也可采用无限空间 Green 函数。在前一情形中不需要表面的离散化,但在后一情形中这种离散化当然是需要的,尽管它是限制于所关心区域周围自由表面相当小的有限部分之内。

在讨论边界元法在地下结构动力分析中的应用的某些工作中,可以提及的有:对于二维频域情形, Niwa et al^[278,217], Kobayashi & Nishimura^[155-158,160,164,169], Tan^[283], Manolis & Beskos^[184,187], Kitahara et al^[149], Hamada et al^[125], Kontoni et al^[173], 以及 Vardoulakis et al^[308] 的工作;对于频域中反平面运动, Ohtsu & Vesugi^[230] 的工作;对于二维时域情形, Niwa et al^[218] 和 Manolis^[187] 的工作;对于时域中反平面运动, Rice & Sadd^[248] 的工作;对于三维频域情形, Rizzo et al^[250-253], Kitahara & Nakagawa^[151,208], Banerjee et al^[28-30] 的工作;以及对于三维时域情形, Manolis^[188] 和 Banerjee et al^[28-30] 的工作。

4.2 由表面地形引起的波绕射 由表面不规则性(例如深沟、峡谷、近表面的内含物或有限范围的土壤分层)引起的波绕射问题,在地球物理学、地震学和土木工程中都具有很大的重要意义。这些问题在二维情况下已由 Wong et al^[323,324] 及 Toki & Sato^[291] 用常规的频域直接边界元法研究,或用如第3节概述的其他特殊的频域边界法研究^[325,326,97-107,254-256,258,110,111,67-71,21]。近来,包括 P 波和 SH 波的三维应用也已考虑^[127,257,226]。各种类型的波,例如引起反平面应变运动的 SH 波^[328,324,98,102,104,67-70,254-256,110,111,291] 引起平面应变运动的 P 波、SV 波和 Rayleigh 波^[326,326,97-101,103,105,107,71,21,127,257,258] 已经研究。研究不规则场地条件影响结构的地震响应的 Kobori & Shinozaki^[170-172] 的工作也应提及。

最近, Emad & Manolis^[109] 和 Beskos et al^[35,36,38,40] 对于二维, Dasgupta et al^[83,84] 对于三维,均已用频域直接边界元法解出了因开挖地沟或充填地沟使结构对地面传递的表面波被动隔震或主动隔震的有趣的工程问题。提到下述情况是使人感兴趣的:在所有上述文献中,扰动源(例如基础或爆炸载荷)处理为整个问题的部分,关于来自源的波的类型和实际上由地沟引起的绕射波的类型没有作什么假定,例如[97-99,325,326]。

4.3 基础 本节讨论频域或时域中的直接边界元法应用于最重要的动力土壤-结构相互作用问题即基础的动力分析问题。作为例子,下面将简要概述求出任意形状的三维表面刚性无质量的基础对外力的动力响应的过程。在本问题的表述中,出发点是在时域中[方程(1.27)]或在频域中[方程(1.46)]控制土壤性状的边界积分方程。此方程由土壤与基础界面上的协调方程

$$\{u\} = [S]\{D\} \quad (4.1)$$

和平衡方程

$$\{P\} = [K]\{t\} \quad (4.2)$$

所补充, 此处 $\{u\}$ 为对应于界面边界元中心的位移矢量, $\{D\}$ 为基础的刚体位移矢量, $\{P\}$ 为外加作用载荷矢量, 而 $\{t\}$ 为未知的界面拉力矢量。都假定上述方程对于时域表述在 N 个时间段上是适用的, 或对于频域表述是变换后的量。解方程组 (1.27)[或 (1.46)], (4.1) 和 (4.2), 求得矢量 $\{D\}$ 和 $\{t\}$ 。基础对斜入射地震波的响应, 用类似方法求解, 此方法从下列关系式出发:

$$\{u\} = \{u_i\} + \{u_s\} \quad (4.3)$$

它表明整个位移场 $\{u\}$ 是入射场 $\{u_i\}$ 和散射场 $\{u_s\}$ 的叠加。

Dominguez^[89,90]显然是首先用频域直接边界元法研究受外力或地震波作用的二维和三维表面或埋置刚性基础的。Karabalis & Beskos^[39,139] (三维情形) 以及 Spyrakos & Beskos^[34,278] (二维情形) 也是首先研究同一问题的, 并用时域直接边界元法补充考虑基础的柔性对响应的影响。在关于此课题的工作中可以提到的文献有: 对于分别在平面应变和三维条件下在频域中研究土壤-基础相互作用问题的[1—4, 13—15, 91, 93, 128, 129, 316, 317, 261, 293, 309]和[128, 129, 143, 205, 232, 233, 251, 259], 以及对于在时域中研究此问题的[275—280, 141]和[139—142, 144—146, 275]。最近, Spyrakos et al^[277]考虑了在时域中的二维和三维柔性埋置基础, 而 Gaitanaros & Karabalis^[118]则考虑了在频域中的同样问题。Matsuoka et al^[197]和 Gomez-Lera et al^[120]为了有效处理轴对称基础的稳态运动, 提出了特殊的轴对称基本解。

在 Luco & Wong^[179,189]的全面的工作中详细论述了建造在半空间土壤介质上的三维地上结构对斜入射地震波的响应的确定, 而同一课题的简要论述也可在 Karabalis & Beskos^[148]中找到。

4.4 桩的动力分析 近来埋置于半空间中的桩和桩群在频域方面的动力分析, 对于均匀土由 Aubry & Chapel^[22], Davies et al^[85]和 Sen et al^[266]所研究, 而对于非均匀(层状)土介质则由 Sen et al^[267], Davies et al^[86]以及 Chapel & Crépeil^[66]所研究。同时文献[85, 266, 267, 86]研究了外力, [22, 66]研究了地震激发。在此问题中遇到的桩结构被理想化为承受轴向和横向运动的梁, 其行为由动力刚度矩阵法方便地描述, 而土壤介质假定为线弹性半无限体, 其行为则通过边界元法来描述。在桩-土壤界面上应用协调条件和平衡条件可确定接触应力, 根据它们可确定桩的全部行为。

4.5 边界元法与有限元法的结合 在许多土壤-结构相互作用问题中, 一种很有好处的办法是将边界元法和有限元法相结合, 努力造出一个最佳的混合数值格式, 其特点是具有两种方法的主要优点, 并且减少或甚至完全消除了它们各自的缺点。这样一来, 例如, 结构可作为有较小的体积与表面积之比的一个有限量用有限元法处理, 而土壤由于其半无限的范围则用边界元法处理。有限元法也可用于不止是模拟结构, 而且还模拟结构周围土壤介质的一个较小的有限部分。用这种方式, 人们能够在时域表述中考虑结构和/或周围土壤的非线性行为。

Toki & Sato^[289,290], Underwood & Geers^[295], Bielak et al^[44,45], Murakami &

Luco^[207], Mita & Takanashi^[203], Miura et al^[204], Kitahara et al^[160], Goto et al^[122], Kobayashi et al^[161,162], Mathews & Geers^[196] 以及 Ohtsu^[231] 都曾利用边界元法和有限元法的某些结合, 求解了频域中二维土壤-结构相互作用问题。Ottenstreu^[233], Kobayashi et al^[165,166,168] 以及 Gaitanaros & Karabalis^[118] 已考虑了频域中三维土壤-基础问题。对于土壤介质用边界元法而对于基础用有限元法, Spyrakos & Beskos^[34,277,279] 以及 Karabalis & Beskos^[33,142] 分别考虑了时域中二维及三维问题。由 Kobayashi et al^[165,166,168] 所考虑的若干问题的高度复杂性, 清楚地说明了这种混合方法的潜力。

4.6 更实际的土壤模型 当边界元法用于模拟土壤介质时, 通常做出均匀、各向同性、线弹性半平面或半空间的假定。然而, 在涉及强非均匀性、各向异性、能量耗散或多孔效应的许多情形中, 即使在线性材料行为的范围内, 理想化的土壤模型也可能是不适用的。较符合实际的土壤模型, 是那些结合了某些或全部这些附加特性的模型。关于这一题目的透彻的讨论可在 Karabalis & Beskos^[146] 中找到, 以下的评论就是以它为根据的。

在频域边界元法的表述中, 利用对应性原理, 可以非常容易地考虑线粘弹性材料的行为^[186,200,162,168,169]。沿着这样的思路, 考虑土壤粘弹性的一种在实践中用得很多的近似办法, 是将弹性常数 λ 和 μ 用下列复数代替:

$$\lambda^* = \lambda(1 + 2ig), \quad \mu^* = \mu(1 + 2ig) \quad (4.4)$$

此外 g 为滞后阻尼系数, 假定它与频率无关^[38,144]。也有考虑粘弹性材料行为的时域边界元法表述的报道^[114]。然而, 这些表述限于有限体, 不能用于半无限土壤介质。当然, 在频域中对于粘弹性材料构造的基本解可以借助于数值变换反演以数值形式用在时域中^[320]。

近几年由于分层产生的土壤非均匀性是受到很大注意的课题。对水平土壤分层的情形频域中的基本解最近已由 Luco & Apsel^[181,18], Kausel^[147,148] 以及 Wolf & Darbre^[316,317] 构造出。对于具有任意几何形状的分层的情形, 在边界元法表述中界面的离散化可能是唯一解。然而, 此法需要大量的计算机存储, 迄今只应用于涉及 1 个^[1,4,300], 3 个^[102] 或更多 (多至 18 个水平的)^[40] 顶层的频域中的二维问题。

在弹性动力学中处理非均匀体的另一办法, 是在表述中采用均匀体的基本解并将所得的体积分看做等效的体力。此思想首先由 Butterfield^[64] 提出并应用于势流问题的求解, 并由 Tanaka & Tanaka^[285] 首先联系到弹性动力学问题予以叙述而不带应用。Niwa et al^[224,225,227] 首先成功地将此思想应用于某些平面弹性动力学问题, 在它们的表述中采用了均匀弹性静力学的基本解。然而, 此法需要除边界离散化外加上内部离散化, 实际上限于有限体, 因此对于半无限土壤介质不能使用。

原则上, 若适当的基本解为已知, 则土壤的各向异性可以很容易用边界元法处理。对于至少一种各向异性的特殊类型——横观各向同性, 在时域中的基本解在 Payton^[239-242] 的工作中是可获得的。最近 Kobayashi et al^[167] 采用 Payton 的基本解^[242] 在时域边界元法中解出某些简单的各向异性半平面问题。Niwa et al 的工作^[227] 连同 [224,225] 以如前述的非均匀体同样的方式处理各向异性情形。

尽管在所有上述非均匀性、各向异性和粘弹性三种情形中, 主要问题是构造出适当的基本解, 且边界元法表述仍与均匀、各向同性和弹性材料的情形一样, 但涉及 Biot^[46] 型的完全饱和多孔的弹性土壤模型却不仅需要知道基本解, 还要加上知道问题的积分表述。关于问

题的基本解的资料可以在 Paul^[237,238]以及 Burrige & Vargas^[82]中找到,而采用对于时间的 Laplace 变换的边界元法表述,在 Predeleanu 最近一篇论文^[244]中可以获得。然而,还没有人试图用边界元法求出数值解。

5 断裂力学中的动力学问题

本节讨论动态断裂力学的两个重要领域,即裂纹自动扩展和由裂纹引起的波绕射。在这两种情形中,假定裂纹存在于无限或半无限范围的线弹性体中。这两类问题已成功地用边界元法解出,在下列两小节中将简要地叙述。

5.1 裂纹扩展 在研究地震源机理的努力中,近几年许多地球物理学家非常忙于用直接时域边界元法研究线弹性无限体中的自动破裂扩展现象。显然首先用此法确定由于二维裂纹扩展引起的位移和应力场的是 Burrige^[81]。然而他的分析限于裂尖扩展的固定速度情形。随后 Das & Aki^[80]以时域直接边界元法结合临界应力跳跃断裂判据,解出二维(平面和反平面运动)裂纹扩展问题,该判据允许人们在求解过程中根据在裂纹上强度分布条件确定破裂速度。Das^[81,82]将此法推广于三维和任意形状的剪切裂纹。在此课题方面具有理论性质不带数值结果的类似工作是 Archambeau & Minster^[23]的。

5.2 由裂纹引起的波绕射 近来有很多研究是直接求解涉及弹性介质中的缺陷(裂纹或夹杂)引起的波绕射的问题以努力改进无损检测技术。边界元法是理想地适合于此类问题的,并已由 Achenbach et al^[6-9,57,16,17,281], McMaken^[182]以及 Van der Hijden & Neerhoff^[297,298]以特殊形式对于无界或部分有界弹性体成功地用于求解频域中的二维和三维问题。一种这样的特殊的边界元法^[6,7,57]包括将散射位移场 u 以两个位移场 φ 和 ψ 表示,它们满足 (3.6) 并可按 (3.7) 表达为积分形式,其中 q_1 和 q_2 具有位错密度的物理意义。随后使用问题的边界条件导出带有沿裂纹轴定义的积分的奇异积分方程组。由于大多数裂纹的几何形状非常简单,积分路径通常是一条直线段,采用将全部直线边界处理为单个边界元的特殊求积法则^[112],积分是数值地作出的。

6 梁、膜、板和壳的动力分析

尽管在所有上述各节中对于严格的弹性动力学分析来说边界元法的可用性已充分得到说明,在本节仍要指出,边界元法也可以成功地与近似的弹性动力学理论——例如控制梁、板、扁壳的动力行为的那些理论——一起应用。更详细的情况可参看 Beskos^[37]最近写的关于这一课题的综述文章。

最近 Providakis & Beskos^[246]已借助于直接边界元法数值上研究了 Bernoulli-Euler 型梁的自由和受迫弯曲振动。自由振动情形处理为本征值问题,而受迫振动则借助于对时间的 Laplace 变换来研究。常轴力、粘弹性阻尼、弹性基础对响应的影响也作了考虑。例如,对于弯曲梁自由振动,控制微分方程为

$$d^4y/dx^4 - \lambda^4 y = 0, \quad \lambda^4 = m\omega^2/EI \quad (6.1)$$

此处 y 为横向位移, ω 为频率, m 为每单位梁长的质量, EI 为弯曲刚度。此问题的积分表达式为^[246]

$$y(\xi) = [SG - MF + \theta E - yD]_0^l, \quad \theta(\xi) = [SG' - MF' + \theta E' - yD']_0^l \quad (6.2)$$

此处 $\theta(\xi) = dy(\xi)/d\xi$, $G = G(x, \xi, \lambda)$ 为此问题的自由空间 Green 函数,撇号表示对 ξ 的导数, l 为梁长,而

$$\left. \begin{aligned} M = M(x) = -EI(d^2y/dx^2), S = S(x) = -EI(d^3y/dx^3), F = F(x, \xi, \lambda) = dG/dx \\ E = E(x, \xi, \lambda) = -EI(d^2G/dx^2), D = D(x, \xi, \lambda) = -EI(d^3G/dx^3) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

方程(6.2)是在边界点 $\xi = 0$ 和 $\xi = l$ 上计算的, 通过使用此问题的特定边界条件, 最后可获得本征值问题

$$[H(\lambda)]\{y\} = 0 \quad (6.4)$$

需解出本征频率 λ 和本征模态 $\{y\}$. 此工作的主要结论是, 对于一维问题, 边界元法失去减少维数的主要优点, 表现为充其量与特殊有限元法(在频域中的^[72]或 Laplace 变换域中的^[32]动力刚度矩阵法)同等有效.

对于膜自由振动, 控制微分方程为

$$\nabla^2 w + K^2 w = 0, \quad K^2 = \omega^2(m/s) \quad (6.5)$$

此处 w 为横向位移, ω 为频率, m 为表面密度, s 为表面张力. 方程(6.5)象方程(1.42)一样是 Helmholtz 方程, 它控制自由反平面弹性动力学运动或线性声学, 而其积分表达式已在第 1 节讨论过. 关于膜的自由振动分析的数值结果可在 Hutchinson^[130,133] 中找到, 而补充资料可从声学中获得, 例如 Tai & Shaw^[482] 的工作.

弹性薄板自由弯曲振动的控制微分方程为

$$\nabla^4 w - \lambda^4 w = 0, \quad \lambda^4 = m\omega^2/D \quad (6.6)$$

此处 w 为板的侧向挠度, m 为每单位表面的质量, ω 为频率, D 为板的弯曲刚度. 此问题的直接边界元法表述的下列简要概述是基于 Wong & Hutchinson^[322] 以及 Niwa et al^[219] 的. 更详细的情况可查阅 Beskos^[37] 的评论文章. 方程(6.6)可通过下列带有 K 个拐角的 Rayleigh-Green 恒等式, 即

$$\int_V (G\nabla^4 w - w\nabla^4 G) dV = \frac{1}{D} \int_S \left[V_n(G)w - M_n(G) \frac{dw}{dn} + \frac{dG}{dn} M_n(w) - GV_n(w) \right] dS - \frac{1}{D} \sum_{k=1}^K \langle M_t(w) \rangle G - \langle M_t(G) \rangle w \quad (6.7)$$

简化为积分形式, 此处 $V_n(w)$, $M_n(w)$, $M_t(w)$, dw/dn , n 分别为有效剪力, 法向弯矩, 扭矩, 法向斜率, 外法向矢量, $\langle \cdot \rangle$ 代表在弧长增大方向上的间断跳跃, 而 G 为问题的基本解或 Green 函数并具有下列形式:

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{i}{8\lambda^2} [H_0^{(1)}(\lambda r) - H_0^{(1)}(i\lambda r)] \quad (6.8)$$

其中 $r = |x - \xi|$. 容易看出, 由于(6.6)和 G 的定义, (6.7) 中的体积分简化为 w , 第二个独立的积分方程通过取方程(6.7)的方向导数而获得. 然后这两个积分方程通过取极限过程而引到边界上, 所得边界积分方程与该问题的边界条件一起数值地求解. 显然 Vivoli & Filippi^[310,311] 是首先用间接边界元法考虑板的自由振动的. Niwa, Kobayashi & Kitahara^[219,233] 以及 Kitahara^[152] 用间接和直接边界元法提供了此问题的最全面的处理, 而 Bézine^[42] 引入了一种混合的边界元法-有限元法来研究同一问题. Hutchinson & Wong^[131,322,132] 用直接边界元法研究了弯曲板的自由振动, 而 Akkari & Hutchinson^[12] 采用类似于第 3 节中提到的 Herrera et al^[126,110,111,256-258] 所用的边界元法研究同一问题. 对于某些特殊的板动力学情形, Conway^[74,75] 更早些采用了类似的边界法. 最后, 基于第 3

节中讨论的边缘函数法联系自由板振动的, 可以提到 Nash et al^[216] 以及 O' Callaghan & Studdert^[228] 的工作。板的受迫振动问题曾由 Bézine & Gamby^[43] 用时域边界元法解出, 它大概是关于此课题唯一可获得的工作。

这里还可以提及 Dominguez & Alarcon^[92] 以及 Niwa et al^[222], Nardini & Brebbia^[210], Ahmad & Banerjee^[10] 在平面应力条件下分别在板的谐和振动和自由振动方面的工作。另一有趣的边界元法联系在平面内的板振动问题的是 Shaw^[271] 的工作, 它将板考虑为三维结构并用边界元法将问题化为二维从而达到板理论的目的, 即, 控制方程的维数减少且并不付出物理近似的相应代价。

就笔者所知, 还不存在边界元法在壳的自由或受迫振动分析方面的应用。然而, Nash et al^[216] 已发表采用边缘函数法对扁壳的自由振动分析。

7 数值算例

本节简要叙述边界元法的某些有代表性的弹性动力学应用。

例 1 图 1 表示由于 Rayleigh 波冲击埋置于半平面中的椭圆形夹杂而引起的归一化表面位移振幅。它是用频域间接边界元法求得的^[101]。

例 2 图 2 给出埋置于无限弹性空间中的球腔, 由于突然施加内压力而引起径向位移与时间的关系。它是用时域和 Laplace 变换域的直接边界元法求得的^[29]。

例 3 图 3 表示具有球腔时由于 Rayleigh 波的绕射引起的半空间自由表面的位移。它是用频域直接边界元法求得的^[251]。

例 4 图 4 表示半平面受谐变入射 SV 波时, 埋置于半平面中的柱的顶端 A 的侧向位移振幅。它是用频域直接边界元法求得的^[164]。

例 5 图 5 描述平面应力条件下半无限梁受一突加弯矩时梁的横向位移。它是用时域直接边界元法求得的^[194]。

例 6 图 6 提供平面应变条件下由于入射 Rayleigh 波引起的刚性表面基础的摇摆运动随频率的变化。它是用时域直接边界元法求得的^[278]。

例 7 图 7 描述放于半空间上的刚性方形基础的竖向柔度作为频率的函数。它是用时域和频域直接边界元法求得的^[89,139,146]。

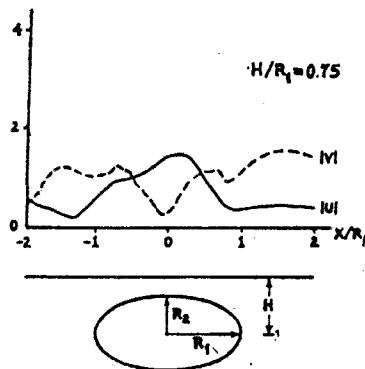


图 1 对于具有椭圆夹杂时入射的 Rayleigh 波, 归一化的水平和竖向位移振幅与半平面表面上距离的关系曲线

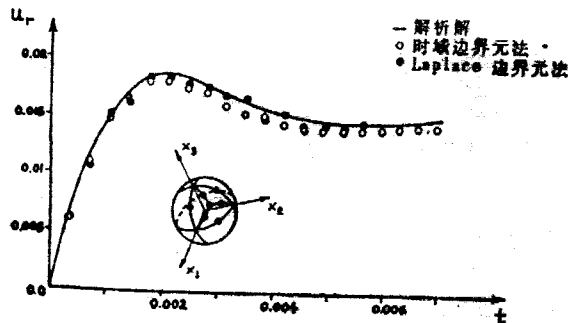


图 2 无限空间中球腔受突加径向压力时径向位移的时间历程

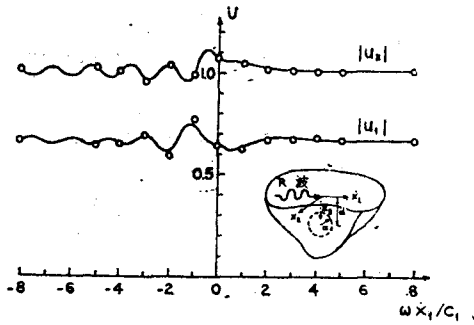


图3 具有球腔时由于入射 Rayleigh 波引起的半空间自由表面的位移振幅

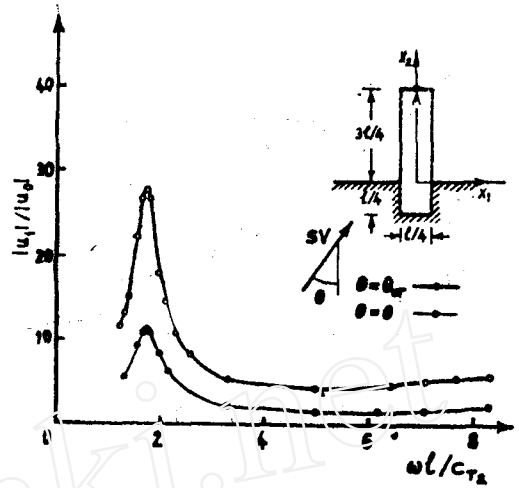


图4 半平面受入射SV波时,在埋置于半平面中的柱顶端A处侧向位移振幅对频率的关系; $E_1/E_2=10$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\nu_1=\nu_2=1/4$; 下标1为柱,下标2为土

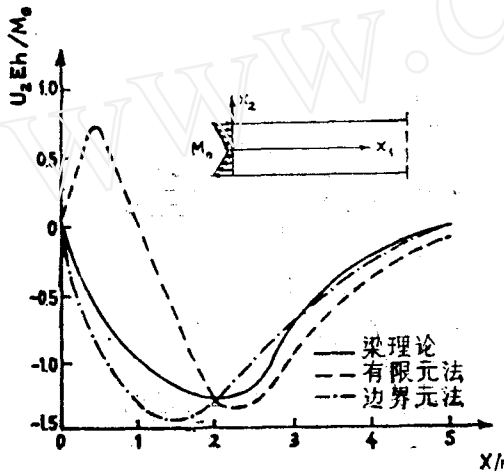


图5 受突加弯矩 M_0 的半无限梁的横向位移 (时间 $t = 5r/c_0$; r 为梁截面的回转半径, c_0 为一维波速)

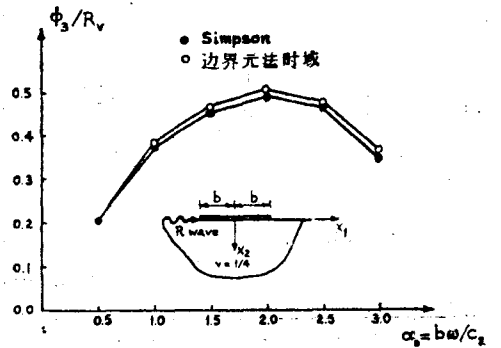


图6 对于刚性条基础的摇摆运动,由于入射 Rayleigh 波引起的角振幅与频率的关系; R_v 为由于 Rayleigh 波引起的竖向自由表面位移

例8 图8表示放于半空间上的方形柔性基础的竖向脉冲响应。它是对土壤和板分别用时域边界元法-有限元法组合求得的^[142]。

例9 图9提供为机器基础的被动隔振,在平面应变条件下开挖地沟时表面位移振幅与距离的关系。它是用频域直接边界元法求得的^[88]。

例10 图10描述简支圆板在其中心受竖向矩形脉冲时中心挠度的时间历程。它是用直接时域边界元法求得的^[49]。

8 结论和建议

根据上面的讨论,可得出下列结论并可提出对于未来进展的建议。

①对于一大类线性动力学分析问题,边界元法同有限元法及有限差分法之类的域型方法相比,具有突出的优点。

②在用边界元法进行动力学分析的领域中已取得显著进展,尤其是在最近几年间,而且

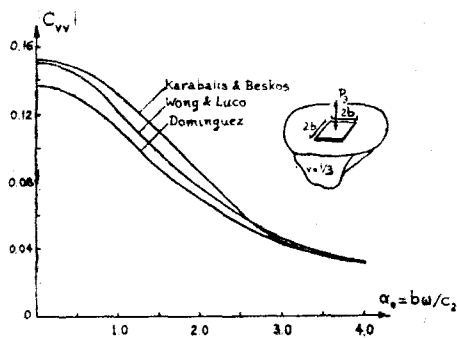


图7 对于方形刚性表面基础，竖向柔度与频率的关系

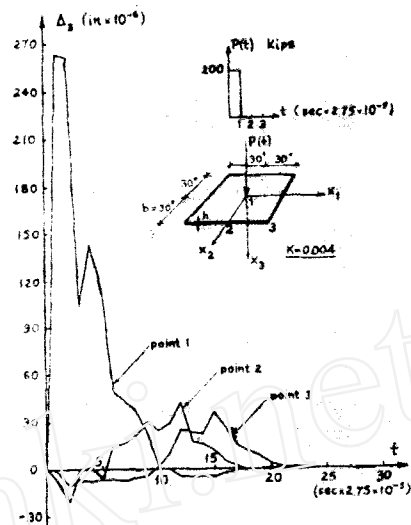


图8 受集中竖向脉冲力的方形柔性表面基础的竖向位移的时间历程

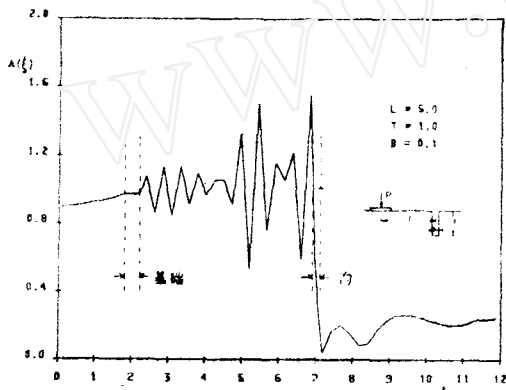


图9 作为刚性基础的竖向谐运动产生的波的堵截器的地沟，开挖前和开挖后的归一化竖向表面振幅 $A=A(\xi)$ ； $\xi=x/L_R$ ， $T=t/L_R$ ， $B=b/L_R$ ， $L=1/L_R$ ， L_R 为Rayleigh 波长

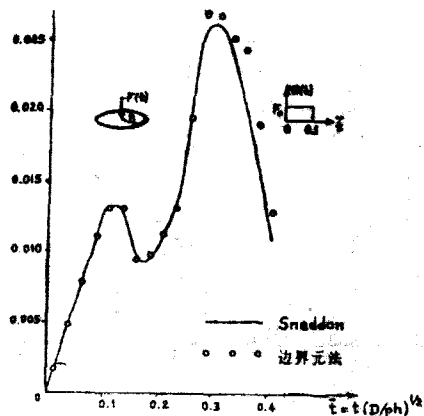


图10 在竖向脉冲荷载作用于圆板中心时筒支圆板中心挠度的时间历程

这种进展正以增长的速度持续下去。

③除了极少的例外，迄今动力边界元法只限于线弹性或粘弹性材料行为和小变形，在这些例外中，可以提到非线性土壤-结构相互作用问题，包括由Wolf & Oberhuber^[318,319]所研究的部分基底上升力；对于涉及弹塑性土壤行为的土壤-结构相互作用问题，有Underwood & Geers^[284]的双渐近法；以及由O'Donoghue^[228]所做的在大挠度理论前提下板的动力响应分析。

④对于以非线性材料行为和/或非线性几何形状为特征的非线性系统的动力学分析，在有效的边界元格式或混合（边界元法+有限元法）格式的发展方面，需要进行大量的工作。超级计算机的使用当然将有助于这一努力。自适应程序和结构控制的研究也是需要研究的其他两个领域。

参考文献 (326篇，略)

钟宏九译自: *Appl. Mech. Rev.*, 40, 1 (1987):1-23. (梁 培校)