

板壳塑性屈曲中的佯谬及其研究进展

章亮炽

浙江大学力学系, 杭州 (邮政编码310027)

余同希 王仁

北京大学力学系 (邮政编码100871)

提要 本文详细论述了板壳塑性屈曲中的佯谬及其研究进展, 并对现有的各种观点作了分析讨论。

关键词 板壳; 塑性屈曲; 佯谬

1 引言

薄板薄壳结构在工程中占有非常重要的地位。因此, 作为这种结构的主要破坏形式之一的“屈曲”也就历来很受重视。近百年来, 数以千计的论文从各种角度去研究屈曲的原因、预报方法以及屈曲后的性态等等。可以说, 由于众多学者的努力, 板壳弹性屈曲的线性和非线性理论已渐趋完善; 但塑性屈曲的研究却由于塑性屈曲中的佯谬的阻碍, 至今实质上仍陷于困境。

板壳塑性屈曲中的佯谬是从对平板的塑性受压屈曲的研究提出来的。Handelman 和 Prager^[1] 在40年代末用一般认为理论上合理的等向强化 J_2 流动理论求出了无限长简支平板塑性屈曲问题的解。几乎同时, Bijlaard^[2] 和 Stowell^[3] 则用一般认为理论上不合理的 J_2 变形理论求解了同一问题。但两种理论结果比较却很出人意料。认为是不合理的变形理论结果与实验值符合良好^[4], 而认为是合理的流动理论结果却反而与实验值相差很远^[5]。1956年, Gerard^[6] 重新计算了 Bijlaard 等的问题, 也得出基本相同的结论。Pearson^[7] 认为, 之所以出现这种情况, 是由于文[1]在求解时作了板截面上会产生部分卸载的假定。他认为, 若在板的塑性屈曲研究中也采用 Shanley^[8] 解决杆的塑性屈曲佯谬时那样认为板在屈曲时全截面加载, 就会降低由流动理论得出的屈曲载荷值。Pearson 由此得到的结果尽管较前有所改善, 但与实验仍有很大差距。后来 Bijlaard^[9] 在评论 Pearson 的工作时认为, Pearson 得到的改善结果与他在计算中取弹性变形的 Poisson 比为 0.5 有关。因此 Pearson 的工作说明不了问题的症结。

为了进一步认识这种现象, 人们又做了大量的实验^[10,11], 期望从对两种本构方程的比较研究来解释上述现象, 他们将一根圆柱加压进入塑性变形阶段, 然后保持该压力再使之受

扭。对于这样的加载方式，变形理论得出的初始等效剪切模量为 GE_s/E ，而流动理论给出的值为 G 。显然，这时流动理论给出了合理的结果。

令人难以理解的事就出在屈曲上。我们知道，弹性简支无限长板的屈曲应力为

$$\sigma = G(t/b)^2 \quad (1)$$

其中 t 为板厚， b 为板宽。因此一般可解释为板在扭转扰动下屈曲。若将塑性屈曲的应力表达式也化为 (1) 的形式，则只须将 (1) 中的 G 改为相应的等效剪切模量 \bar{G} 。由实验得 $\bar{G} = GE_s/E$ ，这与变形理论得出的

$$\bar{G}_d = \frac{GE_s}{E} \frac{2(1+\nu)}{3 + (2\nu-1)E_s/E} \quad (2)$$

很接近，但流动理论却得出 $\bar{G}_f = G$ 。

这样，就产生了所谓的板的塑性屈曲中的佯谬：合理的 J_2 流动理论得出的屈曲载荷反而远不如由不合理的变形理论得出的结果更符合实验结果。

以后，人们仍希望能找出与佯谬相反的例子。这项工作一直延续至今。但不幸的是，几乎所有的结果都支持¹⁾ 变形理论^[12-14]。而且少数文献^[15,16] 还报道，如果板的柔度变小，则流动理论会导致更差的结果。表 1 和表 2 列出了最近 El-Ghazaly 等^[13,14] 对 W 形试验所作的比较 (W 形试验的试件及加载方式见图 1)。表 1 和表 2 的数据给出了两种理论结果差别的定量概念。

表 1 W 形试验的屈曲载荷比较^[14] (单位: kN)

试件型号 [*])	实 验	变 形 理 论	流 动 理 论
A	370.4	378.0	448.0
H	264.6	288.0	352.0

^{*}) 试件型号不同，其几何尺寸和加载距离(如图 1 中的 l_2) 也不同。

表 2 W 形试验的理论结果与实验结果的比较误差^[13]

8 个型号试件的比较	变 形 理 论	流 动 理 论
平均误差 (%)	+6.2	+33.5
最大误差 (%)	+8.8	+62.5

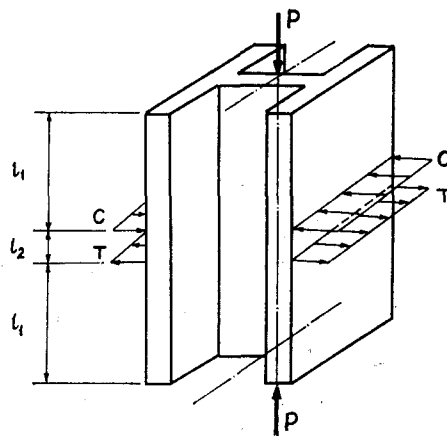


图 1 W 形试验的试件和加载方式

2 历史上人们对佯谬的研究和解释

佯谬的出现使塑性屈曲的研究工作受到很大的阻碍。但几十年来各国学者的努力也取得了一定的进展，并进一步推动了塑性本构方程的深入研究。据笔者看到的资料，人们对佯谬的看法可大致归纳为以下几点 (下述的流动理论均指等向强化 J_2 流动理论，变形理论均指 J_2 变形理论)：

① Shanley^[19] 认为，流动理论之所以不能很好预报屈曲载荷，是因为它不能计及因应力

¹⁾ 据 Batterman^[17] 的报道，Kuranishi^[18] 曾于 1950 年用近似方法考虑卸载后按流动理论得出与实验一致的结论，笔者未见原文，无法作更多评论。

主轴的转动而产生的塑性剪应变。他以十字形截面柱的屈曲为例指出, 扭转扰动产生的主轴转动是与扭转剪应力增量 $\delta\tau$ 的小大同量级的, 故必须加以考虑。Shanley 利用 Mohr 圆指出, 如果假定应力应变主轴始终保持一致, 那么变形理论的结果就包含了这种主轴转动所引起的剪应变, 而流动理论则不能。他因此提出, 在塑性屈曲的研究中应优先使用变形理论。Bijlaard^[2,9] 提出了与 Shanley 十分相似的解释。他将十字形截面柱在屈曲初始时刻的应力状态与先受压进入塑性再使之受扭的圆管的应力状态作了对比, 然后也用 Mohr 圆说明了 Shanley 观点的正确性。Bijlaard 还认为, 他的分析结果与 Feigen^[20] 的实验结论一致。

若干年后, Dubey 等^[21-24] 进一步深化了 Shanley 和 Bijlaard 的观点, 定性地研究了弹塑性固体中主轴转动对剪切模量的影响^[24]。他们证明, 考虑主轴转动, 可使等效剪切模量从原来的弹性值大大降低。Dubey^[23] 的结论可简单地叙述为: 流动理论是认为塑性应变增量 $\delta\epsilon_{ij}^p$ 沿着屈服面的法向达到分叉应力水平 σ_{ij} 的, 但若考虑由于扰动应力 $\delta\tau_{ij}$ 产生的应力主轴的转动, 那么塑性应变增量就应当是指向定义于 $\sigma_{ij} + \delta\tau_{ij}$ 的屈服面的法向。

②Batdorf 和 Budiansky^[25] 认为, 佯谬的产生, 说明了无论是变形理论还是流动理论都有缺陷, 因此就有必要提出一个新的理论。根据金属晶体在一定剪应力作用下会产生滑移的现象, 他们假定, 一切塑性变形均由滑移引起, 且滑移沿最大剪应力平面发生, 并假定某平面某方向上的滑移量仅依赖于该方向上的变形历史; 因此应变强化是各向异性的, 而且这种各向异性只产生在发生滑移的那些面和方向上。据此, 他们提出了加载面出现尖角的理论, 即著名的塑性滑移理论。他们认为, 只要在变形理论和某一流体理论(哪怕这种流动理论非常复杂)间能建立联系, 那么, 变形理论所预报的屈曲载荷就可用这种相应的流动理论得到。基于这一想法, Batdorf^[26] 用塑性滑移理论较好地解释了单向受压无限长筒支板的屈曲佯谬。后来, Sanders^[27] 用[25]的观点讨论了滑移理论与 I_2 变形理论间的关系。

60年代末到70年代初, 由 Sewell^[28-30] 提出的板的弹性和非弹性屈曲的一般理论实质上是对塑性滑移理论的发展。他结合滑移理论以及 Hill^[31,32] 关于弹塑性固体的稳定性理论, 在一般情形下研究了屈曲。他指出, 屈曲应力对局部加载面的法线方向非常敏感。他对单向受压四边筒支板的计算结果表明, 带尖角的 Tresca 型加载面的结果可比 Mises 型的光滑加载面的屈曲载荷低 10—30%。Sewell 由此认为, 由于上述敏感性的存在, 实验测量屈曲载荷也应注意这一点。因此, 将以前的理论结果与没有计及这一现象的实验比较是没有什么意义的。他还认为, Shanley 关于在塑性屈曲研究中优先使用变形理论的结论下得还为时过早。在此应特别提出的是, 在 Sewell 的理论中, 所用的等效剪切模量仍然是弹性值 G 。

70年代末, Christofferson 和 Hutchinson^[33] 在前述基础上发展了更为一般的唯象角加载面理论。作为特例, 他们推出了所谓的 I_2 角加载面理论, 并求解了板条的拉伸失稳问题(该问题中也有与受压屈曲类似的佯谬), 从结果来看较为令人满意。

③Lay^[34] 建议, 在按 I_2 流动理论求解塑性屈曲载荷时, 应采用形如

$$\bar{G} = \frac{2G}{1 + E/[4E_t(1 + \nu)]} \quad (3)$$

的等效剪切模量来使结果更近于实验。因此他采用的剪应力增量与剪应变增量之间的关系为

$$\delta\tau = G\delta\gamma \quad (4)$$

后来, Dawe 和 Kulak^[35] 以及 El-Ghazaly^[36] 都曾采用 Lay 的公式计算薄壁梁柱结构的

塑性屈曲载荷,取得了与实验相近的结果。

但是, Bushnell^[37] 在用该公式解算了大批问题后发现,对于象单向受压长板、十字形截面柱等屈曲模态中包含有扭转扰动的这一类问题,用 \bar{G} 来代替流动理论中的 G 会有一定效果;而对于屈曲前和屈曲时都不涉及截面内剪应力的问题,这种做法是徒劳的。Dawe 和 Grondin^[12] 在将理论与实验(腹板及翼板的屈曲)作了大量比较后也指出, Lay 的这一修正法的结果与实验值间的误差范围为 $-22.5\sim 137\%$ 。可见这种方法没有普遍意义。

④ Амбарцумян^[38] 在考虑横向剪切变形的条件下用流动理论求解了非弹性简支长板的屈曲后指出,这时的结果可比不考虑剪变形时降低 13% 左右。后来, Shrivastava^[16] 也从该观点出发研究了各种尺寸矩形板在不同边条件下的单轴受压问题。结果表明,这样做尽管使临界载荷有所降低,但却普遍高于变形理论的结果,且对于低柔度的板,差别更大。

⑤最后一种观点,也就是目前广泛采用的初缺陷学说。这是 Onat 和 Drucker^[39] 在1953年首先提出来的。他们研究的就是塑性屈曲中较为著名的例子——受压十字形截面柱。他们的研究指出,只要考虑了微小初缺陷,那么由流动理论得出的屈曲载荷就会大幅度下降。在这一点上,后来也得到了 Hutchinson^[40], Hutchinson 和 Budiansky^[41] 的支持。

由于在实际结构中初缺陷的确是难以避免的,因此这一观点一般认为很合理,实际中也乐于应用(如[42—44])。但随着研究的深入,人们又发现了一些无法解释的现象:

①对一些相对说来较厚的板壳,屈曲载荷不具有这种初始缺陷敏感性;或者采用精心加工的(如电镀法)几乎完善的薄壳,流动理论仍给出比实验高得多的屈曲载荷^[17,45,46];

②尽管考虑了初缺陷后可降低某些问题的屈曲载荷,但得出的理论屈曲模态却与实验观察到的不一致。而不计初缺陷的理论屈曲模态反而与实验现象一致^[47]。

此外,结构上的初缺陷分布形式是随机的。即使是缺陷敏感机构,要弄清楚屈曲载荷对初缺陷的依赖性,首先须弄清楚这种随机分布的影响。

总之,在塑性屈曲的佯谬问题上,还处于众说纷纭的阶段。人们为了解决具体问题,往往采用折衷的办法,同时考虑他们认为是应当重视的因素。如文[42]同时考虑了初缺陷和横向剪切效应,而文[48]则同时考虑了边条件、初缺陷和屈服面的夹角等因素。

3 对上述观点的分析讨论

通过以上关于塑性屈曲佯谬的文献综述,可以看出, Onat 和 Drucker 的初缺陷观点, Амбарцумян 和 Shrivastava 考虑横向剪切的观点,以及 Lay 等用等效剪切模量 \bar{G} 来取代流动理论中的 G 的观点,都没有从本质上去研究佯谬。尽管他们的做法在某些特定问题上有一定效果,但只是从一些次要因素的考虑上来调和流动与变形理论间出现的矛盾,因此有时会导致新的矛盾。所以这些做法不具有普遍意义。

相比之下, Dubey, Batdorf 和 Budiansky 的看法是较为涉及本质性的。他们从本构方程本身是否完善来研究问题。特别是 Sewell 以及 Christofferson 和 Hutchinson 等人的工作,使该观点在 Hill 弹塑性稳定性理论的基础上得到了应用。特别有意义的是, Sewell 在使用弹性剪切模量 G 的情况下取得了比光滑加载面低的临界载荷值。这实际上说明,采用等效剪切模量的办法是一种治表的办法。但是也不难看到, Batdorf 等的塑性滑移理论目前还不能从本质上完全解释佯谬,因为还有下列问题没有回答:①滑移理论的结果未能完全消除与实验及变形理论结果间的差别;②如何解释对是否出现尖角加载面不敏感的问题^[49];

③ 滑移理论的出发点是晶体的滑移，这在微观范围内是可以理解的；但这种晶面滑移在加载面形状上的宏观反映是否一定出现尖角还难以肯定（关于这方面的详细讨论见[53]）。

还应当注意到，在前述塑性屈曲分析中大都是采用静力准则和能量准则来判别屈曲的发生。而实际上，对于塑性屈曲这样的非保守系统的稳定性问题，只有动力准则才是正确的。

据上述讨论，笔者认为，产生塑性屈曲的佯谬可能有以下两个主要原因：① 以往使用的等向强化 J_2 流动理论过于简单，无法准确反映塑性屈曲发生时的应力状态变化。如果采用适应复杂但又合理的流动理论，这一缺陷有望得到弥补。滑移理论取得的应用效果已经展示了这一前景。② 静力和能量准则可能会导致不当的结果。

那么，为什么变形理论反而会给出较好的结果呢？笔者认为，这并非变形理论本身比流动理论具有什么更大的潜在合理性，而是由于在采用变形理论的那些例子中，屈曲发生时各应力分量增量的微小变化的总体效应恰好与该理论所能描述的物理性质相近。Bijlaard^[2,9] 用 Mohr 圆对变形理论的描述，以及 Sanders^[27] 通过复杂加载面来联系流动与变形理论的论证正是说明了这一点。笔者相信，变形理论也必定会在某些问题上出现与实验结果的矛盾。

4 我们研究的进展

最近，根据对佯谬的上述看法，作为进一步探索研究的第一步，笔者^[51] 将自己新近发展的修正自适应动力松弛方法（modified adaptive Dynamic Relaxation method, 简称 maDR）^[60] 与李雅普诺夫的稳定性动力准则自然结合，细致研究了圆板在中部受载的横向弯曲过程中周界附近的塑性皱曲，并与相应的实验结果^[52] 做了系统比较。结果表明，对于圆板在轴对称弯曲后的塑性皱曲，用等向强化 J_2 流动理论和动力准则给出了与实验相当一致的结果。笔者^[53] 利用 maDR 方法及实验手段的更进一步研究还表明，上述圆板的皱曲对微小初缺陷是不敏感的，并且变形理论对于某些加载条件下的板在皱曲前阶段就会给出远离实际的结果。

这些研究结果揭示了以下具有重要意义的事实：① 等向强化 J_2 流动理论并非对所有问题都得出理想的结果；② 能量及静力准则在某些问题上会导致不当结果；③ 变形理论并不具有一般所想象的那么大的潜力。

但是，目前离最后解决佯谬还有一定距离，还需要作更多更细致的研究。

参 考 文 献

- 1 Handelmann G H, Prager W. NACA TN 1530 (1948)
- 2 Bijlaard P P. *J. Aero. Sci.*, **16** (1949) : 529—541
- 3 Stowell E Z. NACA TN 1556 (1948)
- 4 Pride R A, Heimerl G J. NACA TN 1817 (1949)
- 5 Prager W. 7th Int. Congr. Appl. Mech. (1948) : 5—11
- 6 Gerard G. NACA TN 3726 (1956)
- 7 Pearson C E. *J. Aero. Sci.*, **17** (1950) : 417—424
- 8 Shanley F R. *J. Aero. Sci.*, **14** (1947) : 261—268
- 9 Bijlaard P P. *J. Appl. Mech.*, **23** (1956) : 27—34
- 10 Prager W. NACA TN 1501 (1948)
- 11 Drucker D C. Proc. 1st Ann. Symp. Appl. Math. Brown Univ. (1947) : 2—4
- 12 Dawe J L, et al. *J. Struct. Eng.*, **111** (1985) : 95—107
- 13 El-Ghazaly H A, et al. *SM Archives*, **10** (1985) : 257—287
- 14 El-Ghazaly H A, Sherbourne A N. *Comput. & Struct.*, **22** (1986) : 131—149
- 15 El-Ghazaly H A, et al. *Comput. & Struct.*, **18** (1984) : 201—213

- 16 Shrivastava S C, *Int. J. Solids Struct.*, **15** (1979) : 567—575
- 17 Batterman S C, *AIAA J.*, **3** (1965) : 316—325
- 18 Kuranishi M, *J. Soc. Appl. Mech. Japan.* **3** (1950) : 139—144
- 19 Shanley F R, Proc. Symp. Plast. nella Sci. delle Constr. Tenut. Villa Mona. (1956)
- 20 Feigen M, Proc. 2nd U. S. Nat. Cong. Appl. Mech. (1954)
- 21 Dubey R N, *Trans. CSME.* **4** (1976/77) : 181—188
- 22 Dubey R N, SMD, Univ. Waterloo (1979)
- 23 Dubey R N, Lind N C, *Mech. Res. Comm.*, **3** (1976) : 411—415
- 24 Dubey R N, Pindera M J, *J. Struct. Mech.*, **5** (1977) : 77—85
- 25 Batdorf S B, Budiansky B, NACA TN 1871 (1949)
- 26 Batdorf S B, *J. Aero. Sci.*, **16** (1949) : 405—408
- 27 Sanders J L, Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., eds.: Naghdi F M, et al (1955)
- 28 Sewell M J, *J. Mech. Phys. Solids.* **11** (1963) : 377—393
- 29 Sewell M J, *J. Mech. Phys. Solids.* **12** (1964) : 279—297
- 30 Sewell M J, *J. Mech. Phys. Solids.* **21** (1973) : 19—45
- 31 Hill R, in: Probs. Continuum Mech. (1961)
- 32 Hill R, *J. Mech. Phys. Solids.* **6** (1958) : 239—249
- 33 Christofferson J, Hutchinson J W, *J. Mech. Phys. Solids.* **27** (1979) : 465—487
- 34 Lay M G, *J. Struct. Div.*, **91** (1965) : 95—116
- 35 Dawe J L, Kulak G L, Struct. Eng. Rept. 95, Univ. Alberta, Canada (1981)
- 36 El-Ghazaly H A, et al, SMD, Univ. Waterloo (1983)
- 37 Bushnell D, *Int. J. Solids Struct.*, **10** (1974) : 1287—1305
- 38 Амбарцумян С А, ПИММ, **27** (1963) : 753—757
- 39 Onat E T, Drucker D C, *J. Aero. Sci.*, **20** (1953) : 181—186
- 40 Hutchinson J W, *J. Mech. Phys. Solids.* **21** (1973) : 163—190
- 41 Hutchinson J W, Budiansky B, Proc. IUTAM, Symp. Buckling Struct., Harvard Univ. (1974) : 98—105
- 42 周承刚, 薄壳弹塑性稳定性理论, 国防工业出版社 (1979)
- 43 中国科学院力学研究所固体力学研究室板壳组, 加筋圆柱曲板与圆柱壳, 科学出版社 (1983)
- 44 姜稚清, 应用数学和力学, **4**, **4** (1983)
- 45 Gellin S, *J. Appl. Mech.*, **46** (1979) : 125—131
- 46 Roche R L, Autrussón B, *J. Pres. Ves. Tech.*, **108** (1986) : 138—145
- 47 Bushnell D, *J. Pres. Ves. Tech.*, **104** (1982) : 51—72
- 48 Batterman S C, *J. Eng. Mech.*, EM2 (1969)
- 49 Neale K W, *Trans. CSME.* **4** (1976/77) : 47—54
- 50 章亮焱, 余同希, 王仁, maDR方法及其应用, 计算结构力学及其应用 (待发表)
- 51 章亮焱, 余同希, 王仁, 判别板壳弹塑性屈曲分叉的一条新途径, 力学学报 (英文版), **5** (1989) : 145—151
- 52 Zhang L C (章亮焱), Yu T X (余同希), Wang R (王仁), Experimental study of elastic-plastic wrinkling of circular plates, *Int. J. Mech. Sci.*, **31** (1989) : 301—308
- 53 章亮焱, 金属圆薄板弹塑性压弯成形的力学分析, 北京大学博士论文 (1987年12月)

THE PARADOX IN PLASTIC BUCKLING OF PLATES AND SHELLS AND THE RESEARCH PROGRESS

Zhang Liang-chi

Dept. of Mechanics, Zhejiang University

Yu Tong-xi Wang Ren

Dept. of Mechanics, Beijing University (Peking University)

Abstract The paper systematically summarizes the paradox in plastic buckling of plates and shells and its research progress over past decades, and discusses various theories on the paradox.

Keywords *plate; shell; plastic buckling; paradox*