第19卷 第4期 力学进展 Vol. 19 No. 4
1989年11月25日 ADVANCES IN MECHANICS Nov. 25, 1989

经典锥壳理论的新发展

孙博华 黄义
兰州大学（邮政编码730000） 西安冶金建筑学院（邮政编码710055）

提要 本文在评述前人有关锥壳理论研究的基础上，介绍了我国学者近年来的一系列研究成果。

关键词 锥壳；位移函数

随着科学技术的发展，人们愈来愈多地在各种结构设计中使用板、壳等作为结构元件。特别在航空、航天等尖端工程中，壳体的应用更加普遍。在各种常见的壳体中，锥壳的重要性尤其突出。这不仅是由于它被用于各种飞行器的头部，工况较复杂；而且也是因为锥壳的计算理论并不象圆柱壳那样完善，以致在设计时，不得不过于依赖实验。以前人们虽然也提出了各种各样的计算理论，但都由于各自的局限性，没能彻底解决锥壳的弯曲、振动和稳定这些经典问题。

1 历史回顾

在几种常见壳体如圆柱壳、球壳、环壳和锥壳中，锥壳的难度最大。从数学上讲，主要是由于它的控制方程组为变系数，且阶数较高（位移型方程为8阶变系数方程组）。因此，在1950年前，人们对它的研究并不多。随着50年代航空及航天事业的发展，有关锥壳的研究才引起人们的注意。

Hoff[1] 在一定近似下，用变分法导出了锥壳在任意载荷作用下的位移型控制方程，且指出如何构造齐次方程的特征函数并对任意载荷求特解。Hoff 的近似是在剪应变

$$\gamma = v_{,x} - (1/x\sin\alpha)[v\sin\alpha - u_{,\varphi}]$$

中，$v\sin\alpha$ 这一项可以去掉。理由是 v 的量级大约与 $u_{,\varphi}$ 相同。但他把 v 与一个小量 $\sin\alpha$ 相乘，从而得到 $\gamma = v_{,x} + (1/x\sin\alpha)u_{,\varphi}$。应指出当 α 较大时，他的这种近似将在分析中带来不准确性。其结果只适用于小锥度的情况（$\alpha<30°$）。他由此得到 w 方向平衡方程作用于 w 的算子中含有Poisson比。这是Hoff 计算理论的缺点。后来，Pohle[2] 指出 Hoff 所得的级数收敛性较差。Seide[3] 保留 Hoff 省略了的 $v\sin\alpha$ 项，同样用变分法导出了锥壳的Donnell型方程。他的径向平衡方程 $D\nabla^4 w - \frac{N_\theta}{s}\mathrm{ctg}\alpha - q = 0$ 中，作用于 w 的算子中不含有 Poisson 比 ν。其理论归结为求方程 $\bar\nabla^4\zeta + \frac{1}{s}\frac{\partial^2\zeta}{\partial \bar s^2} = K(\bar\theta, \bar s)$ 的一般解。但他没有给出一般解，并认为

以上方程的解是今后研究的课题．笔者在［25］及一篇未发表的论文中[32]，用广义超几何函数给出了其一般解．Wilson[4] 用 Голбденвейзер 的理论研究了锥壳的非对称弯曲问题．他用分离变量及级数法求解．Хлебной[5] 研究了 Winkler 地基上锥壳的轴对称问题．其等厚度锥壳方程组为

$$\left.\begin{aligned}&U^{\mathrm{IV}}+\ddot{U}/2x^2-\dot{U}/x^3+25U/16x^4=\lambda E\delta\,\mathrm{tg}\,\alpha x^{-1/2}(\ddot{W}-\dot{W}/x+\\&\qquad+3W/4x^2)+\lambda^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,x^{-1/2}\Phi(\lambda x)\\&W^{\mathrm{IV}}+\ddot{W}/2x^2-\dot{W}/x^3+41W/16x^4=-(\lambda/D)\,\mathrm{tg}\,\alpha x^{-1/2}(\ddot{U}-\dot{U}/x+\\&\qquad+3U/4x^2)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

对于方程组（1.1），他采用渐近解．后来，黄义[6] 指出Хлебной[5] 的基本方程有问题并作了修改．在改后基本方程的基础上，他用幂级数方法求得了问题的精确解．黄义[6] 得到的方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^4U}{dx^4}+\frac{1}{2x^2}\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{1}{x^3}\frac{dU}{dx}+\frac{25}{16}\frac{U}{x^4}=\lambda^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,x^{-1/3}\frac{d\Phi(\lambda x)}{dx}\\&\qquad+\lambda Eh\,\mathrm{tg}\,\alpha x^{-1/2}\left[\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{dW}{dx}+\frac{3}{4}\frac{W}{x^2}\right]\\&\frac{d^4W}{dx^4}+\frac{1}{2x^2}\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{1}{x^3}\frac{dW}{dx}+\frac{41}{16}\frac{W}{x^4}=-\frac{\lambda}{D}\mathrm{tg}\,\alpha x^{-1/2}\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{x}\frac{dU}{dx}+\frac{3U}{4x^2}\right]\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

唐照千[7] 研究了锥壳的固有振动问题．他假设在运算中还将采取一项运算措施，即用 $(1+\mu)$ 代替方程中的第一和第二式内皆有的系数 $(3-\mu)/2$ [7]．由此他得到关于振型 $W(x)$ 的独立方程为

$$\left.\begin{aligned}&[\Delta^4-\Delta^2+c]\,W+\frac{h^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{12(1-\mu^2)}L[x^2\cdot\nabla_x^2\nabla_x^2(W)]=\frac{\Omega^2\mathrm{tg}^2\,\alpha}{(1-\mu^2)}L(x^2W)\\&c=\frac{\nu^2}{2}\left[\frac{1-2\mu-3\mu^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)}\right]\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

唐照千取变系数方程（1.3）的解为

$$W(x)=\sum_{s=0}C_sx^{r+s}\tag{1.4}$$

得指标方程

$$(r^2-\nu^2)[(r-2)^2-\nu^2][(r-2)^4-2(\nu^2+1)(\nu-2)^2+d]=0\tag{1.5}$$

其根为

$$r_1,r_2=+\nu;\quad r_3,r_4=\pm\nu+2,r_5,r_6,r_7,r_8=\pm\left[(\nu^2+1)\pm\nu\sqrt{\frac{3(1+\mu^2)}{2(1-\mu)}}\,]^{1/2}+2\right]\tag{1.6}$$

由（1.6）知，指标 r_5,r_6,r_7,r_8 都与Poisson 比 μ 有关．据微分方程级数解理论[8]，（1.4）形式解的性质与指标值有关．也就是说唐照千对 μ 所做的假设，直接影响到其独立方程的精确解．孙博华[9] 对此作了修改并真正第一次求得了锥壳固有振动的精确解．罗祖道[10] 用边界效应理论研究锥壳的轴对称问题．孙博华[11] 直接积分控制方程，用广义超几何函数给出

旋转抛物扁壳的一般解。Weingarten[12,13] 用 Galerkin 方法先后研究了锥壳的自由振动和在扭矩作用下的振动。Vinson[14] 研究了锥壳的边界载荷解，得到了锥壳理论的一个重要特征尺寸：弯曲边界层宽度 $L_c=4\sqrt{R_\theta h}$。解法是渐近法。他所得的方程为

$$\phi''+\left[2\mu^2 i^3\frac{1}{y}-\frac{3}{4}\frac{1}{y^2}\right]\phi=\left(\frac{\sin\beta}{y}\right)^{1/2}[F-iG] \tag{1.7}$$

同年，Weingarten和Gelman[15] 用差分法研究了悬臂锥壳的弯曲问题。Flügge 和 Blythe[16] 研究了锥壳在锥顶受轴对称载荷作用下的奇异性问题。其方程为

$$[D^6-8D^5+23D^4-28D^3+12D^2+(\beta^2/k)s^2(1-\nu^2)D^2]W=0 \tag{1.8}$$

其解用超几何函数表示。Dreher 和 Leissa[17] 使用 Mushtari-Vlasov 方程研究了锥壳轴对称振动问题，所得方程为

$$\left.\begin{aligned}&x^3\frac{d^6W}{dx^6}+7x^2\frac{d^5W}{dx^5}+8x\frac{d^4W}{dx^4}+N\left[(1-\lambda x^2)x\frac{d^2W}{dx^2}\right.\\&\qquad\left.+(1-5\lambda x^2)\frac{dW}{dx}-3\lambda xW\right]=0\\&x^4\frac{d^8\Phi}{dx^8}+8x^3\frac{d^7\Phi}{dx^7}+4x^2\frac{d^6\Phi}{dx^6}-8x\frac{d^5\Phi}{dx^5}+8\frac{d^4\Phi}{dx^4}\\&\qquad+N\left[x^3\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)-\lambda x^4\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2\Phi\right]=0\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

解取成

$$W(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\quad \Phi(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n \tag{1.10}$$

但他没有研究一般振动问题。另外，Сельский[18]，Коваленко[19] 等人都深入研究过锥壳的弯曲问题。他们的特点是使用Новожилов[20] 的复数变换方法推导锥壳的控制方程（并不要 Donnell 简化）。对轴对称问题和一般弯曲问题都给出典型函数解。在最近的一篇综述中[21]，指出开口正交各向异性锥壳的弯曲[22] 和振动的解析解都没有得到[22]。

由以上可看出：①方程的类型有混合型，复数型和位移型。②解法多是近似法。即使是精确法也有不足之处。有些解有矛盾，有些只是轴对称问题，有些方法不能推广到振动和稳定上去，等等。可见，经典锥壳线性理论问题远没有解决。

下面介绍我国学者在经典锥壳理论研究中的新成果。我们完全使用优点最多的位移解，它可以统一地处理弯曲、振动和稳定问题。

2 我国学者的新成果

我们使用锥壳的 Donnell 型位移基本方程组。通过引入一个位移函数，或称 H-S 位移函数[22]（在极限情况下，它将退化成 Власов 对于圆柱壳所引入的位移函数）和一广义载荷。将各向同性单层锥壳弯曲、稳定和振动的位移型基本方程组，化成为一个 8 阶可解偏微分方程——各向同性单层锥壳的位移型统一方程。这个方程经化简，可得到许多常见问题的新型控制方程。在此基础上，我们又将以上结果推广到正交各向异性单层锥壳及两种类型的夹层锥壳上去。

2.1 各向同性单层锥壳的位移型统一方程[25] 考虑振动、稳定、地基影响等因素，锥壳的位移型基本方程组可写成

$$\left.\begin{aligned} &L_{11}(u)+L_{12}(v)+L_{13}(w)+s^2q_1/K=0\\ &L_{21}(u)+L_{22}(v)+L_{23}(w)+s^2q_2/K=0\\ &L_{31}(u)+L_{32}(v)+L_{33}(w)=s^4q_3/D \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中算子

$$\left.\begin{aligned} &L_{11}=D_s^2-1=\frac{1-\mu}{2}\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2,\quad L_{12}=\sec\varphi\left(\frac{1+\mu}{2}D_s-\frac{3-\mu}{2}\right)\partial_\theta\\ &L_{13}=\mathrm{tg}\varphi(\mu D_s^2-1),\quad L_{21}=\sec\varphi\left(\frac{1+\mu}{2}D_s+\frac{3-\mu}{2}\right)\partial_\theta\\ &L_{22}=\frac{1-\mu}{2}(D_s^2-1)+\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2,\quad L_{23}=\sin\varphi\sec^2\varphi\,\partial_\theta\\ &L_{31}=s^2\frac{K}{D}\mathrm{tg}\varphi(\mu D_s+1),\quad L_{32}=s^4\frac{K}{D}\mathrm{tg}\varphi\sec\varphi\,\partial_\theta\\ &L_{33}=[(D_s-2)^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2](D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2)+s^2\frac{K}{D}\mathrm{tg}^2\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

广义载荷

$$q_3=T_1^0\kappa_1+T_2^0\kappa_2+T^0\tau-kw+G_p\nabla^2w-\frac{\rho h}{g}\partial_t^2w+q_n \tag{2.3}$$

且有

$$\left.\begin{aligned} &\kappa_1=-\frac{1}{s^2}D_s(D_s-1)w,\quad \kappa_2=-\frac{1}{s^2}(\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2+D_s)w\\ &\tau=-\frac{\sec\varphi}{s^2}(D_s+1)\partial_\theta w \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

由（2.2）可以看出，方程组（2.1）是变系数的线性偏微分方程组，直接求解非常困难。但由算子 D_s 的可交换性，引入位移函数，即 H-S 位移函数 $U(s,\theta,t)$，当位移分量 u,v,w 与 H-S 位移函数 $U(s,\theta,t)$ 存在如下关系时

$$\left.\begin{aligned} &u=-\sin\varphi\cos^3\varphi L_u^s(U)-\cos^2\varphi L_{up_1}^s(\phi_1)+\cos^2\varphi L_{up_2}^s(\phi_2)\\ &v=-\sin\varphi\cos^3\varphi L_v^s(U)+\cos^2\varphi L_{vp_1}^s(\phi_1)-\cos^2\varphi L_{vp_2}^s(\phi_2)\\ &w=\cos^4\varphi L_w^s(U) \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

方程（2.1）的前二式自动满足。其中 ϕ_1,ϕ_2 是两个与 q_1,q_2 有关的未知函数，它们满足

$$L_w^s(\phi_i)=-\frac{2}{1-\mu}\frac{q_is^2\sec^2\varphi}{K}\qquad(i=1,2) \tag{2.6}$$

实际上一般不要求方程(2.6)的全部，只要是特解就可以了。因为即使是这样，方程（2.1）的前二式也是自动满足的。

将（2.5）代入（2.1）第三式，即可得H-S位移函数应满足的方程

$$L_1^sL_2^s(U)+\frac{s^2}{D}\{(1-\mu^2)K\,\mathrm{tg}^2\varphi L_3^s(U)-G_pL_G^sL_2^s(U)\}$$
$$+\frac{s^2}{D}[T_1^0L_s^{T_1^0}+T_2^0L_s^{T_2^0}+T^0L_s^{T^0}]L_2^s(U)+\frac{s^4}{D}\left(k+\frac{\rho h}{g}\partial_t^2\right)L_2^s(U)=Q \tag{2.7}$$

自由项

$$Q(s,\theta,t)=\frac{q_n s^4\sec^2\varphi}{D}+\frac{1-\mu}{2}\,\frac{K}{D}s^2\sec^3\varphi\sin\varphi\,\{[\mu(D_s^3-D_s)$$

$$-(\sec^2\varphi+D_s)\partial_\theta^2+D_s^2-1]\phi_1+\sec\varphi[\partial_\theta^2+(2+\mu)D_s^2-(1-\mu)D_s+1]\partial_\theta\phi_2\} \tag{2.8}$$

其中算子

$$\left.\begin{aligned}
&L_u^s=(D_s-1)[(D_s-1)(\mu D_s-1)-\sec^2\varphi\partial_\theta^2]\\
&L_v^s=\sec\varphi[(2+\mu)D_s^2+\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2+(1-\mu)D_s+1]\partial_\theta\\
&L_w^s=(D_s^2+\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2)^2-2(D_s^2-\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2)+1\\
&L_{up_1}^s=\frac{1-\mu}{2}(D_s^2-1)+\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2\\
&L_{up_2}^s=\sec\varphi\left(\frac{1+\mu}{2}D_s-\frac{3-\mu}{2}\right)\partial_\theta\\
&L_{vp_1}^s=\sec\varphi\left(\frac{1+\mu}{2}D_s+\frac{3-\mu}{2}\right)\partial_\theta\\
&L_{vp_2}^s=D_s^2-1+\frac{1-\mu}{2}\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2\\
&L_1^s=[(D_s-2)^2+\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2](D_s^2+\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2)\\
&L_2^s=L_w^s,\quad L_3^s=(D_s^2-1)D_s^2,\quad L_s^{T_1}=D_s^2-D_s\\
&L_s^{T_2^0}=D_s+\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2,\quad L_s^{T^0}=\sec\varphi(D_s-1)\partial_\theta\\
&L_G^s=D_s^2+\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

方程 (2.7) 就是各向同性单层锥壳的位移型统一方程．由它可以得到许多常见问题的如下新型方程：

① $$L_1^sL_2^s(U)+(1-\mu^2)(K/D)\,\mathrm{tg}^2\varphi\,s^2L_3^s(U)=Q \tag{2.10}$$

即锥壳的一般弯曲问题的控制方程，系黄义[23]首先导出的；

② $$L_1^sL_2^s(U)+(1-\mu^2)\frac{K}{D}\mathrm{tg}^2\varphi\,s^2L_3^s(U)+s^2\frac{\rho h}{gD}\partial_t^2L_2^s(U)=Q \tag{2.11}$$

即锥壳的振动方程[9]；

③ $$L_1^sL_2^s(U)+(1-\mu^2)\frac{K}{D}\mathrm{tg}^2\varphi\,s^2L_3^s(U)+s^4\frac{k}{D}L_2^s(U)=Q \tag{2.12}$$

即 Winkler 地基上锥壳一般弯曲问题的方程[24]；

④ $$L_1^sL_2^s(U)+(1-\mu^2)\frac{K}{D}\mathrm{tg}^2\varphi\,s^2L_3^s(U)-s^2\frac{G_p}{D}L_G^sL_2^s(U)$$

$$+s^4\frac{k}{D}L_2^s(U)=0 \tag{2.13}$$

即双参数地基上锥壳一般弯曲问题的方程[28]；

⑤ $$L_1^sL_2^s(U)+(1-\mu^2)\frac{K}{D}\mathrm{tg}^2\varphi\,s^2L_3^s(U)+\frac{s^4}{D}\left(k+\frac{\rho h}{g}\partial_t^2\right)L_2^s(U)=Q \tag{2.14}$$

即 Winkler 基上锥壳的振动方程[29]；

⑥ $$L_1^s L_2^s(U)+(1-\mu^2)\frac{K}{D}\mathrm{tg}^2\varphi\, s^2 L_3^s(U)$$

$$+\frac{s^2}{D}[T_1^0 L_s^{T_1^0}+T_2^0 L_s^{T_2^0}+T^0 L_s^{T^0}]L_2^s(U)=0 \tag{2.15}$$

即锥壳的稳定方程．与一般的混合型方程相比，其优点是显而易见的．

由此可见，方程(2.7)包含着大量的信息．可根据需要，从中选取适当的方程．另外，内力和内矩也都可用H-S位移函数表示：

$$\left.\begin{aligned}
&T_1=(1-\mu)K\cos^2\varphi\left\{(1+\mu)\sin\varphi\cos\varphi L_{T_1}^s(U)-\frac{1}{2}[L_{T_1P_1}^s(\phi_1)+L_{T_1P_2}^s(\phi_2)]\right\}\\
&T_2=(1-\mu^2)K\cos^2\varphi\left\{(1+\mu)\sin\varphi\cos\varphi L_{T_2}^s(U)-\frac{1}{2}[L_{T_2P_1}^s(\phi_1)+L_{T_2P_2}^s(\phi_2)]\right\}\\
&T=(1-\mu)K\cos^2\varphi\left\{(1+\mu)\sin\varphi\cos\varphi L_T^s(U)-\frac{1}{2}[L_{TP_1}^s(\phi_1)+L_{TP_2}^s(\phi_2)]\right\}\\
&M_1=-D\cos^4\varphi L_{M_1}^s(U),\quad M_2=-D\cos^4\varphi L_{M_2}^s(U),\quad H=-D\cos^4\varphi L_H^s(U)\\
&N_1=-D\cos^4\varphi L_{N_1}^s(U),\quad N_2=-D\cos^4\varphi L_{N_2}^s(U)
\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

等效剪应力

$$V_1=-D\cos^4\varphi L_{V_1}^s(U),\quad V_2=-D\cos^4\varphi L_{V_2}^s(U)$$

其中算子

$$\left.\begin{aligned}
&L_{T_1}^s=\frac{1}{s}[D_s(D_s^2-\sec^2\varphi\partial_\theta^2-1)+\sec^2\varphi\partial_\theta^2 D_s^2]\\
&L_{T_1P_1}^s=\frac{1}{s}[D_s(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2-1)+\mu(D_s^2-\sec^2\varphi\partial_\theta^2-1)+(1+\mu)\sec^2\varphi\partial_\theta^2 D_s]\\
&L_{T_1P_2}^s=\frac{\sec\varphi}{s}[\mu(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2+1)-(1+\mu)D_s^2+(3+\mu)D_s]\partial_\theta\\
&L_{T_2P_1}^s=\frac{1}{s}[\mu D_s(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2-1)+(D_s^2-\sec^2\varphi\partial_\theta^2-1)-(1+\mu)\sec^2\varphi\partial_\theta^2 D_s]\\
&L_{T_2P_2}^s=\frac{\sec\varphi}{s}[(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2+1)+(1+u)D_s^2-(1-\mu)D_s]\partial_\theta\\
&L_T^s=\frac{\sec\varphi}{s}D_s^2(D_s-1)\partial_\theta\\
&L_{TP_1}^s=\frac{\sec\varphi}{s}[1-\mu D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2-(1-\mu)D_s]\partial_\theta\\
&L_{TP_2}^s=\frac{1}{s}[D_s(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2-1)-(D_s^2-\sec^2\varphi\partial_\theta^2-1)-(1+\mu)\sec^2\varphi\partial_\theta^2 D_s]\\
&L_{M_1}^s=\frac{1}{s^2}[D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2-(1-\mu)(D_s+\sec^2\varphi\partial_\theta^2)]L_w^s\\
&L_{M_2}^s=\frac{1}{s^2}[\mu(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2)+(1-\mu)(D_s+\sec^2\varphi\partial_\theta^2)]L_w^s\\
&L_H^s=\frac{\sec\varphi}{s^2}(D_s-1)\partial_\theta L_w^s\\
&L_{N_1}^s=\frac{1}{s^3}(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2)(D_s-2)L_w^s
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

$$\left.\begin{aligned}
L_{N_2}^s &= \frac{\sec\varphi}{s^3}(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2)\partial_\theta L_w^s \\
L_{V_1}^s &= \frac{1}{s^3}\{(D_s-1)[D_s^2+(2-\mu)\sec^2\varphi\partial_\theta^2]-(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2)L_w^s \\
L_{V_2}^s &= \frac{\sec\varphi}{s^3}[(D_s^2+\sec^2\varphi\partial_\theta^2)+(1-\mu)(D_s-1)(D_s-2)]\partial_\theta L_w^s
\end{aligned}\right\}$$

另外，两种极限情况的结果，也可由以上各式导出。

2.1.1 $\varphi\to\pi/2$ 时，有 $s\cos\varphi\to a$，即对应于圆柱壳的情形。为方便，引入无量纲量

$$\xi=s/a,\quad \beta=h^2/12a^2 \tag{2.18}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\mu\frac{\partial^3U}{\partial\xi^3}+\frac{\partial^3U}{\partial\xi\partial\theta^2}-\left[\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\phi_1+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi} \\
v &= -(2+\mu)\frac{\partial^3U}{\partial\xi^2\partial\theta}-\frac{\partial^3U}{\partial\theta^3}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}-\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\phi_2 \\
w &= \nabla_c^4U
\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

$$\nabla_c^4\phi_i=-\frac{2}{1-\mu}\frac{q_ia^2}{K}\qquad(i=1,2) \tag{2.20}$$

$$\nabla_c^8U+\frac{1-\mu^2}{\beta}\frac{\partial^4U}{\partial\xi^4}-a^2\frac{G_p}{D}\nabla_c^6U+\frac{a^2}{D}\left[T_1^0\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+T_2^0\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+T^0\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\theta}\right]\nabla_c^2U$$
$$+\frac{a^2}{D}\left(k+\frac{\rho h}{g}\partial_t^2\right)\nabla_c^4U=Q_c \tag{2.21}$$

自由项为

$$Q_c=\frac{a^4q_n}{D}+\frac{1-\mu}{2}\frac{K}{D}a^2\left\{\left[\mu\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}-\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\theta^2}\right]\phi_1+\left[(2+\mu)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\theta}+\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\right]\phi_2\right\} \tag{2.22}$$

方程（2.21）为圆柱壳的位移型统一方程。由之可导出许多简单方程：

① $$\nabla_c^8U+\frac{1-\mu^2}{\beta}\frac{\partial^4U}{\partial\xi^4}=Q_c \tag{2.23}$$

即圆柱壳的 Власов 方程[33]；

② $$\nabla_c^8U+\frac{1-\mu^2}{\beta}\frac{\partial^4U}{\partial\xi^4}+a^4\frac{\rho h}{gD}\partial_t^2\nabla_c^4U=Q_c \tag{2.24}$$

即圆柱壳的振动方程；

③ $$\nabla_c^8U+\frac{1-\mu^2}{\beta}\frac{\partial^4U}{\partial\xi^4}+a^2\frac{k}{D}\nabla_c^4U=Q_c \tag{2.25}$$

即 Winkler 基上圆柱壳的方程[34]；

④ $$\nabla_c^8U+\frac{1-\mu^2}{\beta}\frac{\partial^4U}{\partial\xi^4}-a^2\frac{G_p}{D}\nabla_c^6U+a^4\frac{k}{D}\nabla_c^4U=Q_c \tag{2.26}$$

即双参数基上圆柱壳的方程[25]；

⑤ $$\nabla_c^8U+\frac{1-\mu^2}{\beta}\frac{\partial^4U}{\partial\xi^4}+\frac{a^2}{D}\left[T_1^0\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+T_2^0\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+T^0\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\theta}\right]\nabla_c^2U=0 \tag{2.27}$$

即圆柱壳的稳定性方程．等等．

2.1.2 $\varphi\to 0$ 时，s 和 $s\cos\varphi\to r$．即对应于圆板的情况．这时有

$$\left.\begin{aligned}u&=-\left[\frac{1-\mu}{2}(D_r^2-1)+\partial_\theta^2\right]\phi_1+\left[\frac{1+\mu}{2}D_r-\frac{3-\mu}{2}\right]\partial_\theta\phi_2\\v&=\left[\frac{1+\mu}{2}D_r+\frac{3-\mu}{2}\right]\partial_\theta\phi_1-\left[D_r^2-1+\frac{1-\mu}{2}\partial_\theta^2\right]\phi_2\end{aligned}\right\}\tag{2.28}$$

$$\left.\begin{aligned}&[(D_r^2+\partial_\theta^2)^2-2(D_r^2-\partial_\theta^2)+1]\phi_i=-\frac{2}{1-\mu}\quad\frac{q_ir^2}{K}\qquad(i=1,2)\\&[(D_r-2)^2+\partial_\theta^2](D_r^2+\partial_\theta^2)w-r^2\frac{G_p}{D}(D_r^2+\partial_\theta^2)w+\frac{r^2}{D}[T_1^0(D_r^2-D_r)\\&\quad+T_2^0(D_r+\partial_\theta^2)+T^0(D_r-1)\partial_\theta]w+\frac{r^4}{D}\left(k+\frac{\rho h}{g}\partial_t^2\right)w=\frac{r^4q_n}{D}\end{aligned}\right\}\tag{2.29}$$

不难验证，(2.28) 表示圆板的平面应力状态；(2.29) 表示圆板的弯曲、稳定和振动状态．同样由 (2.29) 也可化成许多常见问题的已知方程[25]．

由以上极限结果的正确性，充分说明了一般结果的正确性．

2.2 正交各向异性单层锥壳的位移型统一方程[22] 问题的位移基本方程组为

$$\left.\begin{aligned}L_{11}^a(u)+L_{12}^a(v)+L_{13}^a(w)+s^2q_1&=0\\L_{21}^a(u)+L_{22}^a(v)+L_{23}^a(w)+s^2q_2&=0\\L_{31}^a(u)+L_{32}^a(v)+L_{33}^a(w)&=s^4q_3\end{aligned}\right\}\tag{2.30}$$

其中算子

$$\left.\begin{aligned}&L_{11}^a=K_1(D_s+\mu_1)D_s+K_{12}\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2-K_2(1+\mu_2D_s)\\&L_{12}^a=[K_1\mu_1D_s+K_{12}(D_s-1)-K_2]\sec\varphi\,\partial_\theta,\quad L_{13}^a=\mathrm{tg}\,\varphi(K_1\mu_1D_s-K_2)\\&L_{21}^a=\sec\varphi[K_{12}D_s+K_2(1+\mu_2D_s)+K_{12}]\partial_\theta\\&L_{22}^a=[K_{12}(D_s-1)D_s+K_2\sec^2\varphi\,\partial_\theta^2+K_{12}(D_s-1)]\\&L_{23}^a=K_2\sec\varphi\,\mathrm{tg}\varphi\,\partial_\theta,\quad L_{31}^a=K_2\,\mathrm{tg}\varphi\,s^2(1+\mu_2D_s),\quad L_{32}^a=K_2\,\mathrm{tg}\varphi\sec\varphi\,s^2\partial_\theta\\&L_{33}^a=K_2\,\mathrm{tg}^2\varphi\,s^2-(D_s-2)\{-D_1(D_s-1)[D_s(D_s-1)+\mu_1(D_s+\sec^2\varphi\partial_\theta^2)]\\&\qquad+2D_{12}\sec^2\varphi\partial_\theta^2(1-D_s)+D_2[\sec^2\varphi\partial_\theta^2+D_s+\mu_2D_s(D_s-1)]\}\\&\qquad-\sec^2\varphi\{2D_{12}(1-D_s)D_s+D_2[\sec^2\varphi\partial_\theta^2+D_s+\mu_2D_s(D_s-1)]\}\partial_\theta^2\end{aligned}\right\}\tag{2.31}$$

由 (2.31) 可知，方程 (2.30) 也是线性变系数偏微分方程组，不易直接求解．类似于前节，我们引入一个位移函数，即 H-S 位移函数 $\widetilde{U}(s,\theta,t)$，当位移分量 u,v,w 与 H-S 位移函数 $\widetilde{U}(s,\theta,t)$ 有如下关系时

$$\left.\begin{aligned}u&=\mathscr{L}_u^s(\widetilde{U})+\mathscr{L}_{up_1}^s(\widetilde{\phi}_1)-\mathscr{L}_{up_2}^s(\widetilde{\phi}_2)\\v&=\mathscr{L}_v^s(\widetilde{U})-\mathscr{L}_{vp_1}^s(\widetilde{\phi}_1)+\mathscr{L}_{vp_2}^s(\widetilde{\phi}_2)\\w&=\mathscr{L}_w^s(\widetilde{U})\end{aligned}\right\}\tag{2.32}$$

方程组 (2.30) 的前二式自动满足，将(2.32)代入到(2.30)第 3 式中，即可得 $\widetilde{U}(s,\theta,t)$ 应满足的方程

$$\mathscr{L}_1^s\mathscr{L}_2^s(\widetilde{U})-s^2\mathscr{L}_3^s(\widetilde{U})-s^2G_pL_G^s\mathscr{L}_2^s(\widetilde{U})+s^2[T_1^0L_s^{T_1^0}+T_2^0L_s^{T_2^0}+T^0L_s^{T^0}]\mathscr{L}_2^s(\widetilde{U})+s^4\left(k+\frac{\rho h}{g}\partial_t^2\right)\mathscr{L}_2^s(\widetilde{U})=\widetilde{Q}(s,\theta,t) \tag{2.33}$$

其中 $\widetilde{\phi}_1,\widetilde{\phi}_2$ 是与 $\widetilde{q}_1,\widetilde{q}_2$ 有关的，以下方程的特解：

$$\mathscr{L}_w^s(\widetilde{\phi}_i)=-s^2q_i \qquad (i=1,2) \tag{2.34}$$

其中算子

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}_u^s=L_{12}^aL_{23}^a-L_{13}^aL_{22}^a,\quad \mathscr{L}_v^s=L_{11}^aL_{23}^a-L_{21}^aL_{13}^a\\&\mathscr{L}_w^s=L_{11}^aL_{22}^a-L_{12}^aL_{21}^a,\quad \mathscr{L}_{up_1}^s=L_{22}^a,\quad \mathscr{L}_{up_2}^s=L_{12}^a\\&\mathscr{L}_{vp_1}^s=L_{21}^a,\quad \mathscr{L}_{vp_2}^s=L_{11}^a\end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1^s=(D_s-2)\{&-D_1(D_s-1)[D_s(D_s-1)+\mu_1(\sec^2\varphi\partial_\theta^2+D_s)]+2D_{12}(1-D_s)\sec^2\varphi\partial_\theta^2\\&+D_2[\sec^2\varphi\partial_\theta^2+D_s+\mu_2D_s(D_s-1)]\}-\sec^2\varphi\{2D_{12}(1-D_s)D_s\\&+D_2[\sec^2\varphi\partial_\theta^2+D_s+\mu_2D_s(D_s-1)]\}\partial_\theta^2\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}_2^s=\mathscr{L}_w^s,\quad \mathscr{L}_3^s=\frac{1}{s^2}(L_{31}^a\mathscr{L}_u^s+L_{32}^a\mathscr{L}_v^s)+K_2\,\mathrm{tg}^2\varphi\,\mathscr{L}_w^s$$

自由项为

$$\widetilde{Q}(s,\theta,t)=s^4q_n-[L_{31}^aL_{22}^a-L_{32}^aL_{21}^a]\widetilde{\phi}_1+[L_{31}^aL_{12}^a-L_{32}^aL_{11}^a]\widetilde{\phi}_2 \tag{2.36}$$

统一方程（2.33）也可以化成许多常见问题的方程[25]，及两种极限情况[26]。

2.3 两种类型夹层锥壳的位移型统一方程[32] 一般夹层壳的本构方程为

$$\left.\begin{aligned}&T_1=K_1\varepsilon_1+K_\nu\varepsilon_2+A_\nu\kappa_2,\quad T_2=K_\nu\varepsilon_1+K_2\varepsilon_2+A_\nu\kappa_1,\quad T=K_{12}\omega-2A_{12}\tau\\&M_1=D_1\kappa_1+D_\nu\kappa_2+A_1\varepsilon_1+A_\nu\varepsilon_2,\quad M_2=D_\nu\kappa_1+D_2\kappa_2+A_\nu\varepsilon_1+A_2\varepsilon_2\\&H=-A_{12}\omega+2D_{12}\tau\end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

① 对称铺层，即层厚和每层的材料性质都对称于壳中面．这时系数 A_ν,A_1,A_2,A_{12} 都为零，使得此时的本构方程与正交各向异性单层壳体的本构方程类似．从而得到如下结论：对称铺层夹层锥壳的位移型统一方程和正交向异性单层锥壳的位移型统一方程相似[32]．

② 每层都是各向同性，且具有相同的 Poisson 比时，可通过定义新的参考面，将这时的方程化成类似于各向同性单层锥壳的方程[32]．

3 符 号

a 圆柱壳的平均半径

h 壳体总厚度

g 重力加速度

ρ 壳体材料的密度

$D,K,\mu;K_1,K_2,K_{12};\ D_1,D_2,D_{12};\ \mu_1,\mu_2;\ A_1,A_2,A_{12},A_\nu;\ K_\nu,D_\nu$ 壳体材料的物理常数

k Winkler 基模量

G_p 地基剪切模量

T_1^0,T_2^0,T^0 壳体无矩状态的中面内力

s 锥壳的母线坐标，从顶点算起

θ 圆锥壳的圆周向角坐标（逆时针方向为正）

t 时间变量

φ 锥壳的法线与其轴线的夹角

u, v, w 分别为母线、周向及法线方向上的位移分量

q_1, q_2, q_n 分别为母线、周向及法线方向上的载荷分量

$D_s = s\frac{\partial}{\partial s}$, $D_r = r\frac{\partial}{\partial r}$, $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$

$\nabla_c^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (= \partial_\xi^2 + \partial_\theta^2)$

参 考 文 献

1 Hoff N J. *J. Appl. Mech.*, **22** (1955) : 557—562

2 Pohle F V. *J. Appl. Mech.*, **23**, 2 (1956) : 322—323

3 Seide P. *J. Appl. Mech.*, **24** 4, (1957) : 547—552

4 Wilson B. *J. Eng. Mech.*, EM3, June (1960)

5 Хпебной Я Ф. 弹性地基上锥面壳的计算. 壳体结构文汇, 第一册

6 黄义. 弹性地基上锥壳计算的若干问题. 西安冶金建筑学院学报

7 唐照千. 力学学报, 2 (1963) : 133—153

8 Ince E L. Ordinary Differential Equations. Dover (1956)

9 孙博华. 力学学报, **19**, 2 (1987) : 136—145

10 罗祖道, 潘纪浩. 力学学报, 3 (1963) : 200—218

11 孙博华. 抛物旋转扁壳的一般弯曲问题 (待发表).

12 Weingarten V I. *J. Eng. Mech.*, *EM*1 (1968)

13 Weingarten V I. *J. Eng. Mech.*, *EM*4 (1965)

14 Vinson J R. *J. Eng. Mech.*, *EM*1 (1966)

15 Weingarten V I, Gelman A P. *J. Eng. Mech.*, *EM*6, (1967)

16 Flugge W, Blythe W. *J. Eng. Mech.* (1968)

17 Dreher J F, Leissa A W. Axisymmetric vibration of thin conical shells. Proc. of Applied Mechanics, USA

18 Сеньский Ю С.О РавновесииКонческой Оболочки при Произольной Распределенной Нагрузке

19 Коваленко А Д, Григоренко Я М, Ильин Л А. Теория тонких коническх оболочек. УССР, Киев (1963)

20 В. В. 诺沃日洛夫. 薄壳理论. 科学出版社 (1959)

21 Guz A N, Chernyshenko I S, Chekhov Val N, Chekhov Vik N, Shnerneko K I. *Prikladnaya Mechanics*, **15**, 11 (1979) : 3—37

22 孙博华, 黄义. 正交各向异性锥壳的位移型统一理论. 兰州大学学报 (待发表)

23 Huang Yih (黄义). The theory of conical shells and its application. Proc. Fifth Eng. Mech., eds. Boresi and Chong K P. USA (1984) : 539—542

24 Huang Yih (黄义), Sun Bohua (孙博华). The general solution of conical shells on the elastic foundation. "Shells, Membranes and Space Frames, Proc. IASS Symp.", Vol. 1, OSAKA, Japan (1986) : 193—200

25 孙博华. 弹性薄锥壳的位移型统一理论. 西安冶金建筑学院硕士论文 (1986, 3)

26 Sun Bohua (孙博华), Huang Yih (黄义). The exact solution of conical shells on the elastic foundation, Proc. 2nd ICEPMESC, Guangzhou, China (1987), to be published

27 黄义, 孙博华. 锥壳轴对称弯曲变形的位移解. 固体力学学报 (待发表)

28 孙博华, 黄义. 弹性基上锥壳一般弯曲问题的精确解. 应用数学和力学 (待出版).

29 孙博华, 黄义. 弹性基上锥壳固有振动的精确解. 兰州大学学报, 待发表. 或第3届全国振动会议论文集.

30 孙博华. 锥壳的弯曲、稳定和振动问题的位移型统一方程及其应用. 第1届青年计算力学会议论文集 (1986)

31 孙博华. 弹性地基上锥壳弯曲问题的精确解. 第3届全国空间结构会议论文集 (1986, 7)

32 孙博华. 两种类型夹层锥壳的位移型统一理论 (待发表)

32 孙博华, P. Seide 方程的精确解 (待发表)

33 Власов В З. 壳体的一般理论. 人民教育出版社 (1960).

34 蔡益铣, 高理伟. 弹性地基上的柱壳. 空间薄壁结构经验交流会论文 (1985)

NEW DEVELOPMENT IN CLASSICAL THEORY OF CONICAL SHELLS

Sun Bo-hua
Lanzhou University
Huang Yi
Xi'an I stitute of Metallurgy and Construction Engineering

Abstract This paper reviews studies on conical shells, especially those recently completed by our scholars.

Keywords *conical shells; displacement function*

（上接第 558 页）

相关，并且与孔隙和裂纹的存在格外相关．因而同样的材料，由于它们甚至在高温下也能以高度欠完美的晶体形式（有时是非晶体形式）稳定存在，所以适当注意微结构，同样可以提供最低的热导体．

为了使固体中具有可能的最低热导率，人们必须使①固体的热传导，②气体的对流，③红外辐射传热，④**气体**分子的热传导等降到最小值．获得条件①是通过采用高度欠完美的无机电介质绝缘体．条件②的获得是通过保证有小空洞来消除对流．由于Stefan定律，在100℃以上温度时③是主要的热传导过程．必须通过加入不透光剂而使其下降；不透光剂可以是有适当频带-间隙的半导体（例如碳黑），或是具有高折射率的散射体（金属氧化物）．结果得到含90％空洞的固体（泡沫材料）．通过保证泡沫壁之间的距离小于静止空气的平均自由程（在标准温度和压力下为100nm），可以进一步把热导率减小到小于静止空气的热导率．所得到的无机泡沫材料当然是非常脆弱的，需加入纤维使它有足够的强度．它通常是一种由微孔硅石制成的无机泡沫材料的原型；Dickson(1975) 讨论了在制造这样的材料中所涉及的一些原理．复合材料原理现在已经用于把足够小粒子尺寸的空气固定在应有的位置上作为一种工程材料．

程屏芬译自：*Phil. Trans. R. Soc. London*, *A* **322**, 1567 (1987)：409—423．**（董务民校）**