

柔性系统力学中的主要课题

周 起 钊

北京大学力学系 (邮政编码100871)

提要 本文对多刚体系统力学的研究结果进行简要的小结, 介绍了柔性系统的力学模型以及该领域中的主要研究课题。

关键词 多刚体系统; 柔性系统; 弹性变形

1 多刚体系统力学理论的小结

多刚体系统力学要研究解决以下四个问题: ①应用适当的数学工具描述系统的运动学特征, 并给出各个运动学特征量之间的关系式; ②给出建立系统动力学方程组的一般方法, 要求所列出的动力学方程组或者是表达形式简洁, 从理论上来看非常优美, 便于从理论上解释问题, 或者要在实现计算机解算时, 便于程序化, 能够避免各种虚运算及重复运算, 以提高整个运算速度, 当然两者兼顾则更是人们努力的研究目标; ③建立专用或通用的计算机程序, 解决数值计算中的算法问题; ④针对各种具体的应用领域将一般性的理论个性化。

1.1 运动学问题 运动学的特征量是指描述系统中的每一个刚体的位置(方位)级量(零级)、速度级量(一级)和加速度级量(二级), 如表1所示。

表 1

刚 体	零 级	一 级	二 级
质 心	向 径	速 度	加 速 度
基 点	向 径	速 度	加 速 度
连 体 基	方 位	角 速 度	角 加 速 度

运动学主要解决三个问题: ①选用各种不同的数学工具来表达上述特征量。最基本的工具是向径和方位矩阵(转换矩阵), 其次有方位角(即广义坐标, 常用的是Euler角, Bryant角), 伪坐标(只有相应的伪速度有实际意义), 四元数, 齐次坐标, 旋量和旋转向量等等。各种数学工具有各自的特点, 其优劣只能结合具体的应用或理论讨论的方便来评价。孤立地讨论哪一种工具最好或不好, 只能把问题引入歧途。理论研究工作者的任务不应

是去肯定或否定某一种工具而是要致力于深刻揭示各种表达方式的长处和短处,以及它们之间的内在联系。②运动特征量都具有相对性,理论上要解决各相对量与绝对量之间的转换问题,给出方便的转换公式。转换矩阵和速度、角速度的合成原理起了关键的作用。③最主要的问题是处理约束,其任务是把约束条件吸收进来,将运动特征量通过独立的变量(广义坐标或伪速度)表出。问题的复杂性来自约束性质和状况的多样化。有完整、非完整约束,完整约束中又有各种不同的铰接。约束状况反映在各种形式的系统结构上,有树形结构,非树形结构,有根,无根等等。描述约束状况的有效工具是关联矩阵,这是本研究领域中非常重要的创造性发展。笔者认为整个多刚体系统运动学的核心问题是约束问题,通过将约束条件吸收到运动学方程中去,进一步吸收到动力学方程中去,使得动力学方程中的基本未知量是独立的。

1.2 动力学方程问题 这里主要解决两个问题:

①研究的目的是给出通用的一般性方程还是给出建立方程的一般性方法。这个问题在多刚体系统理论发展的初期曾经产生过对立的看法,现在已经基本上得到协调。人们认识到,从理论研究的角度来看更应该着重于一般方法的研究,而从程序实现的角度看,希望一个程序能够解决更加广泛的问题,因此需要一般性的方程。但是这种一般性最好有适当的范围,例如可以是工业机械手动力学的一般方程以及相应的程序,或者用于人体运动研究的一般性方程以及相应的程序。看来适用于这两者的一般性方程在实际上似乎并无必要,当然为了理论上的完整性而研讨一下最为一般性的方程又应作别论。

②建立动力学方程的出发点放在何处?存在三个主要的出发点:1)从牛顿-欧拉方程(即质心动量定理及动量矩定理)出发。此方法先对被隔离的单刚体列出动力学方程,然后消去理想约束力和约束力矩,最后得出系统的方程组。2)从达朗伯原理(或若当原理)出发。这种方法有许多变形,最成功的是 Kane^[63]提出的,随后又发展成为更加一般性的广义动静法^[68]。拉格朗日方程、海默方程、阿沛尔方程以及拉格朗日算子的基本思想源出于分析力学,在应用到刚体系统上时有了某些变形,是分析力学与刚体力学紧密结合的产物。整个这一类方法的突出优点是理想约束力(矩)在方程中自然不出现,建立方程的过程更加程式化。3)从高斯原理出发。这种方法开辟了一个不必建立运动微分方程的新途径,可直接应用优化计算方法进行动力学分析。

我国研究工作者已经充分认识到以上三种出发点有其各自的特点;应并存发展互为补充,同时认识到不管是哪一种出发点最后必然是殊途同归。

在多刚体系统力学研究领域中存在一些名称上的混乱。这种混乱可能是起始于 Kane 本人以及他的支持者。他们把由达朗伯原理变形发展而来的等价方程称为 Kane 方程,相应地产生 Kane 方法的说法,于是就有一系列的名称产生,诸如 R-W 方法, Huston 方法, Попов 方法,还有牛顿-欧拉方法,矩阵分块方法,四元数方法,旋量方法等等。这些混乱的名称给初学者带来迷茫,给研究同行之间交流讨论也会带来一些误会,因为各种方法的划分准则并不统一。科学名词的统一规范化是深入发展科学研究所必不可少的步骤。笔者认为现在我国已到了可能进行统一名称的阶段了。从实际情况来看,划分的标准无非有两种可能:一种是根据建立动力学方程出发点;另一种是根据描述运动所使用的数学工具。而前者是更带有根本性的。笔者建议从方法来说可以分为三个体系,简称牛顿-欧拉法、达朗伯原

理和极值原理法。Kane, Roberson, Witenburg, Huston 等人以及我国研究工作者所作的研究工作只是这些方法的某种变形因而各具特点, 可以称为 $\times\times\times$ 的发展或 $\times\times\times$ 的工作。至于不同数学工具的应用则可以称为 $\times\times\times$ 在刚体力学中的应用或 $\times\times\times$ 表述法, 例如矩阵表述法、四元数表述法、旋量表述法等等。

1.3 算法和程序问题 这里要解决两个问题:

①多刚体系统的运动学和动力学分析最终要落实到计算机程序上加以实现, 因此从实用的角度来看, 我们要研究怎样把运动学关系和动力学方程表述得更加适合于计算机程序的实现, 同时还要研究算法使得运算次数少, 存储量小。例如应用关联矩阵表述树结构系统运动学关系和动力学方程在形式上非常简洁, 然而由于关联矩阵之中大多数是零元素, 如果应用计算机去实现这种运算关系式就要进行大量的虚运算, 浪费了机时, 所以计算机程序中不宜采用关联矩阵, 倒是采用联接列阵更为合适。一般说来在表达方面, 用向量比用矩阵更节省运算量。在运算流程方面, 用递推运算比用求和运算更节省运算量和存储空间。需要结合各类具体问题研究专门的表达方法(一般理论的个性化)和计算流程, 例如工业机械手的结构是简单运动链, 采用完全向量和递推的表达和算法是最为合适的方法^[67]。

②70年代以来, 国外已经研究成功了多种类型的大型通用软件, 同时还开辟了实现符号运算的研究方向。在人力、财力都比较缺乏的我国应该如何看待这个动向, 笔者认为似乎并无完全“跟进”的必要。花力气编写程序的目的是为了实用, 一个程序可以对付刚体数目任意, 结构形式任意以及各种约束条件的系统, 这是否有真正的必要, 通用性强调得过头, 就会使软件变成华而不实。软件的通用性和专用性是相对的, 开发泛泛的通用软件不如开发用于某种专门问题中的软件, 例如用于航天器的软件, 研究机械手的软件, 研究人体腾空运动的软件等等, 在这个前提下尽量地扩大其通用性。

2 柔性系统力学中的基本问题

考虑系统中物体或铰点弹性变形带来的影响, 建立起相应的理论基础与计算方法称为柔性系统力学。这是刚体力学、分析力学同弹性体振动及结构动力学相结合的产物, 其中有不少饶有兴趣的理论问题值得探讨, 同时比起纯粹的刚体系统理论更具有实用价值, 它是当前本领域内最主要的一个研究发展方向。

2.1 问题的提出 问题首先在人造卫星、宇宙飞船的动力学分析中被提出来。它们的天线、太阳帆板的伸展尺度与本体尺度相比可以大几倍到十几倍, 因而弹性变形的影响往往不可忽略。同样在工业机械手、高速机械及高速车辆中有些部件的变形相当大。于是人们要问: 这种变形可能给稳定性和动态响应带来什么后果? 下面来看例子。

带有天线的人造卫星可简化成如图1所示的平面问题^[53], A 为卫星体, 可认为是刚体; B 为天线认为是悬臂梁; O 为地心引力点。要求卫星体的一面(装有摄影机)始终对准地面, 即 $\theta = 0 \pm \delta$, δ 为允许的误差。

卫星受地心引力和一个控制力矩 T 作用(见图1), 卫星体 A 的质量 $M_A = 120 \text{ kg}$, 惯量主值 $J_1 = 100 \text{ kg m}^2$, $J_2 = 50 \text{ kg m}^2$, $J_3 = 130 \text{ kg m}^2$, 几何尺寸 $b = 1 \text{ m}$, 梁长 20 m , 密度 $\rho = 0.2 \text{ kg/m}$, 抗弯刚度 $EI = 5 \text{ N m}^2$, $T = -0.07S\dot{\phi}$ 。其中 $S = [m_A(b+L) + m_B L/2]/(m_A + m_B)$, M_B 是梁的质量, ϕ 为假定梁无变形时直线 OS^* 和 A^*S^* 之间的夹角(见图2), S^* 是系统(A 和 B)的质心, A^* 是 A 的质心。经动力学数值计算, θ 的动态曲线如图3a所示, 图3b

为梁端点的挠度。

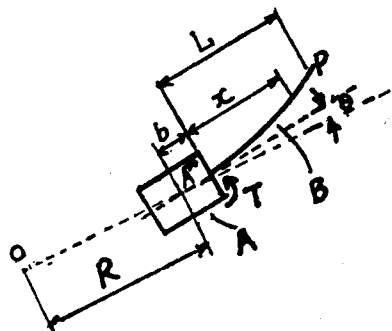


图 1

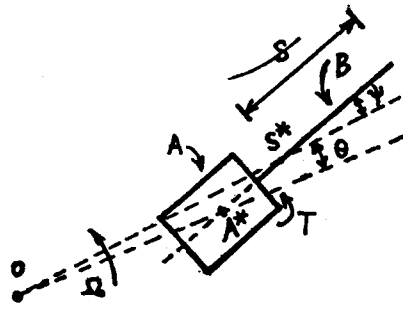


图 2

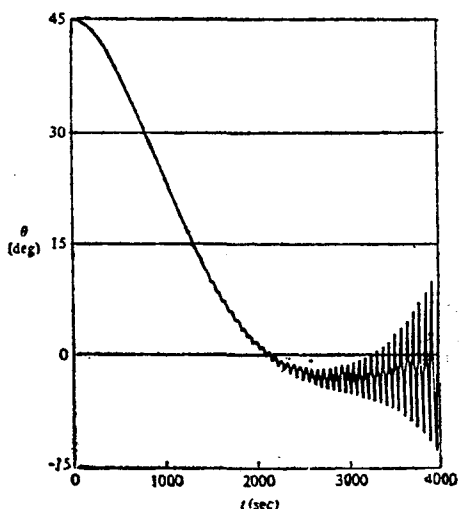


图 3 a

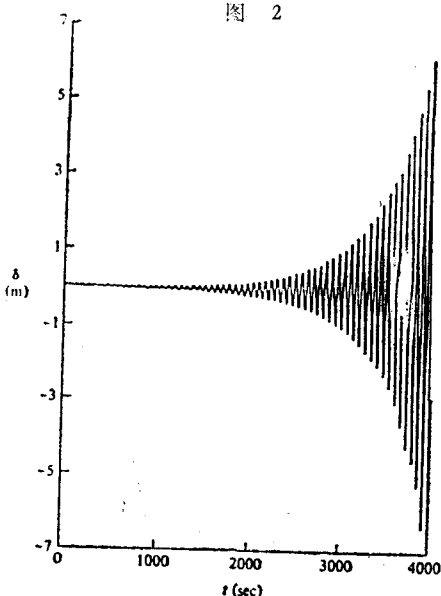


图 3 b

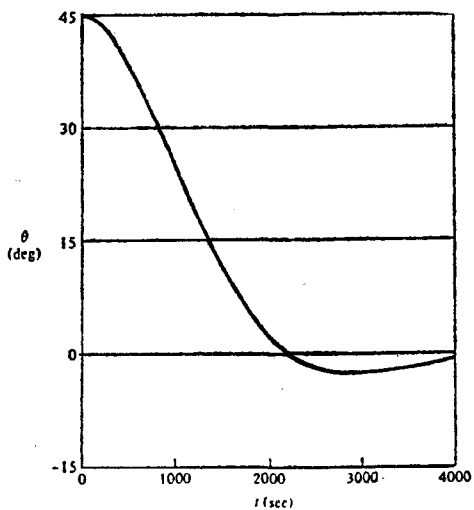


图 4

很明显，天线弹性变形的影响使卫星体不稳定(如果把梁当作刚体处理，卫星体是稳定的)。有两个办法可以使卫星体稳定：①改变 T 的控制规律，如令 $T = -1.5\phi$ ，则 θ 的动态曲线如图4所示；②改变天线的形状和尺寸如图5所示。天线 B 分为 C 和 D 两段， D 段的参数为 $\rho_D = 0.2 \text{ kg/m}$ ， $(EI)_D = 5 \text{ N m}^2$ ， $L_D = 10 \text{ m}$ ； C 段的

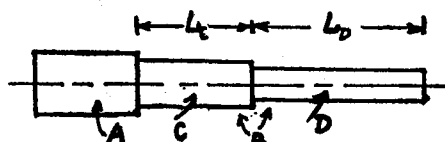


图 5

参数为 $\rho_c = 0.8 \text{ kg/m}$, $(EI)_c = 80 \text{ N m}^2$, $L_c = 10 \text{ m}$. 这时 θ 的动态曲线如图 6a 所示, 图 6b 是误差量.

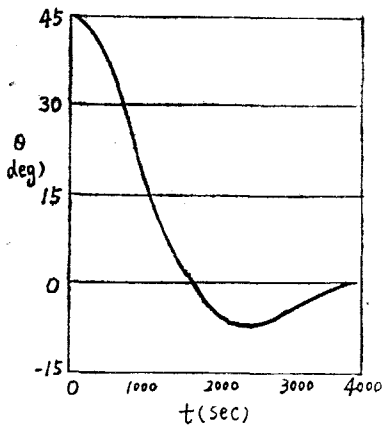


图 6a

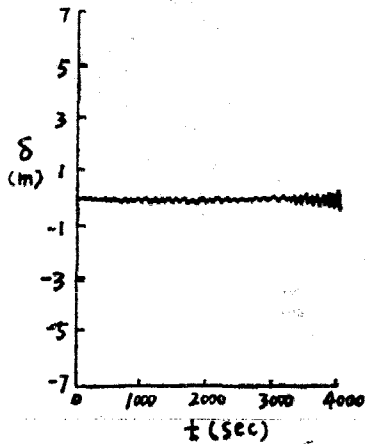


图 6b

第二个例子是航天飞船上的机械手^[34] (图 7), 控制要求是将柱形被抓取物体放入机舱内, 物体上 B 点 (空间坐标为 $[x, y, z] = [22.7, 3.94, 18.12]$) 的理想轨迹是直线达到 C 点 ($[x, y, z] = 22.03, 3.96, 0.43$). 由于机械手臂弹性变形的影响, 经过动力学分析计算, B 点的轨迹如图 8 所示.

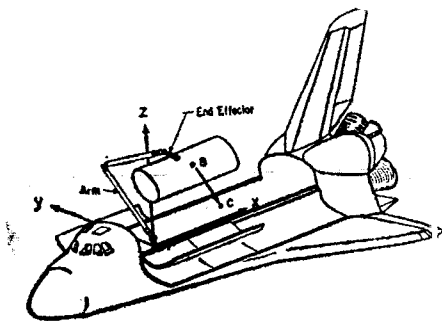


图 7

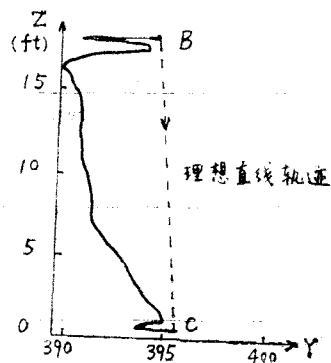


图 8

第三个例子考虑一个工业机械手及其控制系统 (图 9), $X \in R^6$ 为工作空间的位形变量 (位置和方位). 由于弹性变形带来了误差, 有

$$X = X^* + \delta X$$

要求校正控制系统以保证系统的稳定性并达到必要的重复精度. 于是出现了以下的理论问题. 设考虑一个多体系统 (图 10), 弹性变形的影响有可能来自两个方面:

① 某个物体 B_i , 在运动过程中弹性变形不可忽略. 于是物体上任一微元 dm 的绝对向径由两部分合成 (图 11):

$$r = (r_c + \rho) + u$$

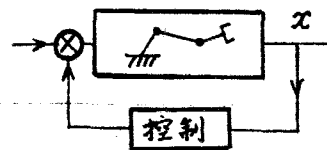


图 9

u 为由于弹性变形所引起的项。

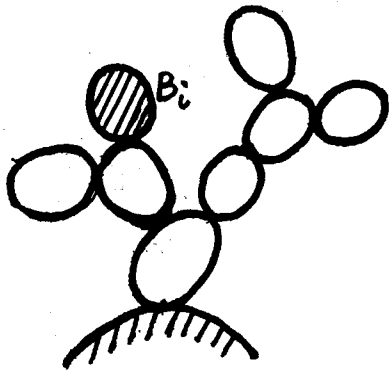


图 10

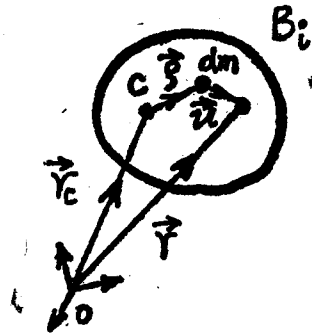


图 11

② 联接某一对相邻接物体铰链 a 的弹性变形不可忽略。为了叙述方便，假设两物体 B_i, B_j 是刚体， $e^{(i)}$ 和 $e^{(j)}$ 为刚体的连体系（图12）。在铰链节点两侧分别取 $e^{i'a}$ 和 $e^{j'a}$ 系（图13）。于是 $e^{j'a}$ 相对 $e^{i'a}$ 的位置和方位可以分离成两部分，一部分是铰链转动和平动所造

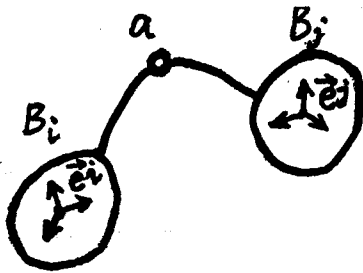


图 12

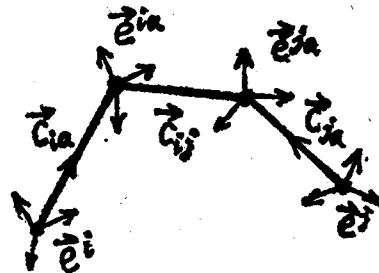


图 13

成的，用两个量来描述，它们是向径 $C_{ij} = C_{ij}(q_a)$ 和转换矩阵 $G_{ij} = G_{ij}(q_a)$ ，其中 q_a 是铰链的广义坐标列阵。另一部分是弹性变形所造成的，反映在 $e^{i'a}$ 与 $e^{i'}$ 之间的关系（以及 $e^{j'a}$ 与 $e^{j'}$ 之间关系）之中，也可以用向径和转换矩阵两个量来描述：

$$C_{ia} = C_{ia}(\xi_i); \quad G_{ia} = G_{ia}(\xi_i)$$

其中 ξ_i 是弹性变形坐标向量。同理 $e^{j'a}$ 和 $e^{j'}$ 之间也有类似的量

$$C_{ja} = C_{ja}(\xi_j); \quad G_{ja} = G_{ja}(\xi_j)$$

柔性系统力学要解决的问题是当部分物体或全部物体的弹性变形不可忽略时，或者部分铰链或全部铰链的弹性变形不可忽略时或者兼而有之时，①系统的运动学量的表达方式；②系统动力学方程的建立与化简；③提供有效的数值计算方法，分析弹性变形对静态偏差，稳定性，动态响应的影响；④选择合理的结构、参数或控制规律，消除弹性变形带来的不利影响，或者利用弹性变形的影响，使其产生积极的效果。

当系统中一部分物体可认为是刚体，另一部分可认为是变形体时，例如人造卫星系统，其基体可看作刚体，而天线和太阳帆板考虑成变形体，这种半柔性系统在理论处理上带来一些方便，因为可以取某个刚体作为主体，从而选择较确定的刚体连体系作为参考基准，某些文献就是这样来考虑的^[14]。

2.2 考虑弹性变形情况下的力学模型 当物体产生了弹性变形时, 与刚体情况相比, 根本的特征可以用理论力学中所熟知的非常简单的相对运动模型来说明。考虑一个系统如图 14 所示, 管状体 A 是刚体, 绕固定点 O 作空间定点运动, B 是质点, 由弹簧联接在 O 点, 系统受重力作用。刚体 A 的动力学方程为

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = L + \dot{r} \times N' \quad (1)$$

其中 L 是重力对 O 点的矩, N' 为管壁的约束反力。质点 B 的动力学方程为

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_c - kx\mathbf{e}_3 \quad (2)$$

其中 $\mathbf{N} = -\mathbf{N}'$

$$\mathbf{F}_c = -m\dot{\omega} \times \mathbf{r} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}); \quad \mathbf{F}_c = -2m\omega \times \mathbf{v}_r$$

取连体系 $[O, e]$ 如图 14 所示, 有

$$\mathbf{r} = (x_0 + x)\mathbf{e}_3; \quad \mathbf{v}_r = \dot{x}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{a}_r = \ddot{x}\mathbf{e}_3; \quad \mathbf{N} = -\mathbf{N}' = N_1\mathbf{e}_1 + N_2\mathbf{e}_2$$

将 (1) 和 (2) 写成分量形式并消去 N_1 和 N_2 , 最后得出不包含约束力的四个独立运动微分方程

$$[J_1 + m(x_0 + x)^2]\dot{\omega}_1 + [(J_3 - J_2) - m(x_0 + x)^2]\omega_2\omega_3 = L_1 - mg_2(x_0 + x) - 2m(x_0 + x)\omega_1\dot{x}$$

$$[J_2 + m(x_0 + x)^2]\dot{\omega}_2 + [(J_1 - J_3) + m(x_0 + x)^2]\omega_3\omega_1 = L_2 + mg_1(x_0 + x) - 2m(x_0 + x)\omega_2\dot{x}$$

$$J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = L_3$$

$$m\ddot{x} = mg_3 - kx + (x_0 + x)(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

方程中最值得注意的是 A 运动和 B 运动之间的交叉作用项, 其物理意义是 A 的运动依赖于 B 的运动, 反之 A 的运动又影响 B 的运动。在实际问题中一般说来刚体 A 的运动范围 (位移和转角) 比较大, 而运动本身是慢变的 (即 $\omega, \dot{\omega}$ 不大); B 的运动是高速微振动, 即 x 为小量, 而 \dot{x} 和 \ddot{x} 比较大, 因此交叉项实际上是一种慢变大位移和高速小变形的相互作用, 这将对数值计算带来麻烦。

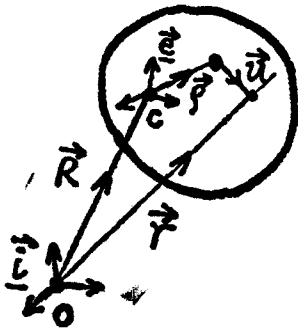


图 15

实际上当一个物体在运动过程中产生变形时, 就相当于其中每一个质量微元相对于未变形的物体有了(三维)相对运动。考虑一个弹性变形体在空间的运动 (图15), 取动系 $[c, e]$, c 为未变形时物体的质心, e 为未变形时物体的连体系, 物体上一微元 dm 的向径为 $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho} + \mathbf{u}$, 速度为

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \omega \times \boldsymbol{\rho} + \dot{\mathbf{u}}$$

取 $\omega = \mathbf{e}G\dot{\theta}$, $\mathbf{u} = \mathbf{e}\Psi\xi$, $\mathbf{e} = \mathbf{i}Q$, 其中 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ 是 \mathbf{e} 基相对于 \mathbf{i} 的方向角, Ψ 是模态矩阵, ξ 是 γ 维模态主坐标, 于是可以写成

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}[\mathbf{Q}^T \dot{R} + \rho \mathbf{G} \dot{\theta} + \Psi \dot{\xi}] = \mathbf{e}[\mathbf{Q}^T, \rho \mathbf{G}, \Psi] \begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \mathbf{e} \mathbf{P} \dot{q}$$

其中 $q = [R, \theta, \xi]^T$ 是 $6 + \gamma$ 维列阵, 由此得出物体的动能表达式

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dm = \frac{1}{2} \int (\dot{q}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \dot{q}) dm = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M} \dot{q}$$

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{P}^T \mathbf{P} dm = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \int E dm, \quad M_{22} = \int (\mathbf{G}^T \rho^T \rho \mathbf{G}) dm = \mathbf{G}^T \mathbf{J} \mathbf{G}$$

$$M_{12} = M_{21}^T = \int (\mathbf{Q} \rho \mathbf{G}) dm = \mathbf{Q} \left(\int \rho dm \right) \mathbf{G}$$

$$M_{13} = M_{31}^T = \int (\mathbf{Q} \Psi) dm = \mathbf{Q} \left(\int \Psi dm \right)$$

$$M_{23} = M_{32}^T = \int (\mathbf{G}^T \rho^T \Psi) dm = \mathbf{G}^T \left(\int \rho^T \Psi dm \right)$$

物体的弹性应变能可以写成 (\mathbf{K}' 是物体的刚度矩阵)

$$U = \frac{1}{2} \xi^T \mathbf{K}' \xi = \frac{1}{2} q^T \mathbf{K} q, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}' \end{bmatrix}$$

于是根据拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6 + \gamma$$

得出物体的动力学方程组

$$\mathbf{M} \ddot{q} + \mathbf{K} q = \mathbf{Q} + \mathbf{D}(q, \dot{q}), \quad \mathbf{D} = - \left(\frac{d\mathbf{M}}{dt} \right) \dot{q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$$

上式可以写成

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^R \\ Q^\theta \\ Q^\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D^R \\ D^\theta \\ D^\xi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ \theta \\ \xi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & 0 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{R} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix}$$

等号右边最后一项是加速度级耦合项, 倒数第三项是刚体平动、转动与弹性微振动的交叉作用项。这一组方程是由两部分组成的, 一部分描述刚性平动与转动, 另一部分描述弹性变形运动。如果物体的弹性变形可以忽略, 则应该有 $\Psi = 0$ 和 $\xi = 0$, 于是有 $M_{13} = M_{23} = M_{33} = 0$, 方程组成为

$$M_{11} \ddot{R} = Q^R + D^R - M_{12} \ddot{\theta}, \quad M_{22} \ddot{\theta} = Q^\theta + D^\theta - M_{21} \ddot{R}$$

由于动系 $[c, \mathbf{e}]$ 原点取在刚体的质心, 所以有

$$M_{12} = M_{21}^T = \mathbf{Q} \left(\int \rho dm \right) \mathbf{G} \equiv 0$$

于是方程退化成为熟知的刚体牛顿-欧拉方程。由此可见耦合项 $-M_{12}\ddot{\theta}$ 和 $-M_{21}\ddot{R}$ 是由于动系原点不在物体质心所带来的惯性力，而耦合项 $-M_{13}\ddot{\xi}$ 和 $M_{23}\ddot{\xi}$ 则是弹性振动所带来的惯性力。如果物体不存在刚性平动与转动即 $R = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ ，则只剩下一组方程

$$M_{33}\ddot{\xi} + K'\xi = Q^{\xi}$$

这就是熟知的微振动方程。由于实际上存在刚性平动和转动，所以带来了耦合项 $-M_{31}\ddot{R}$ 和 $-M_{32}\ddot{\theta}$ ，这可以认为是由于刚性运动所造成的加在振动微元上的惯性力。

2.3 柔性系统力学所研究的几个问题 目前人们所感兴趣的主要理论问题在以下几个方面。

2.3.1 与刚体系统中所遇到的问题类似，导出动力学方程可以有几种出发点。通常是虚位移原理或虚速度原理

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_{m_i} \delta \mathbf{r} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} dm - d\mathbf{F}) + \delta p_i \right] + \delta P = 0$$

其中 δp_i 为物体 B_i 中弹性内力的虚功率， δp 为两物体之间连接铰中弹簧力、阻尼力、驱动力（矩）的虚功率。由此演变出第二类拉格朗日方程（见上节）或拉格朗日第一类方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial \alpha} = Q - J_a \lambda$$

其中 $\alpha = [R_1^T, \theta_1^T, \xi_1^T, \dots, R_n^T, \theta_n^T, \xi_n^T]^T$ ，拉格朗日乘子 $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_s]^T$ ， J_a 为下列约束条件的雅可比矩阵：

$$f(\alpha, t) = [f_1(\alpha, t), \dots, f_s(\alpha, t)]^T = 0$$

如同我们所熟知的 Kane 在刚体系统中所做的那样，可以避免引入动力学函数 T 而直接应用虚位移或虚速度原理。此时除了引进刚体运动部分的偏速度和偏角速度以外，还要引进模态主坐标所对应的偏速度。

Hooker^[63] 和 Singhs^[40] 在推导动力学方程时直接应用动量定理和动量矩定理（即牛顿-欧拉方法）。这种方法或许对于半柔性系统比较合适，特别是当系统中有一个刚性主体的情况。

2.3.2 由单个物体方程过渡到系统方程。这个问题实际上就是怎样处理好约束条件的问题。设系统由 n 个物体组成，每一个物体有一组运动学变量 $\alpha_i = [R_i^T, \theta_i^T, \xi_i^T]^T$ 共 $6 + \gamma_i$ 维，整个系统的运动学变量为 $\alpha = [\alpha_1^T, \dots, \alpha_n^T]^T$ 。由于约束的存在，所以 $R_i^T, \theta_i^T, \dots, R_n^T, \theta_n^T$ 诸元素之间是不独立的。设整个系统刚性运动部分独立坐标为 $q = [q_1, \dots, q_s]^T$ ，模态坐标为 $\xi = [\xi_1^T, \dots, \xi_r^T]^T$ ，则有如下四种方法来获得系统方程：

① 写出系统动能表达式

$$T(\alpha, \dot{\alpha}) = \sum_{i=1}^n T_i(\alpha_i, \dot{\alpha}_i)$$

引进拉格朗日乘子，把约束条件吸收进来，或者直接使用拉格朗日第一类方程，这种办法最后所得出的是动力学方程（微分方程）和约束方程（代数方程）的联立方程，在解算中会出现一定的麻烦；

②根据约束条件将每个物体刚性部分的质心速度和动标架的角速度表成 q 和 \dot{q} 的表达式, 从而使系统的动能成为 q , \dot{q} 和 ξ , $\dot{\xi}$ 的函数, 于是可以应用拉格朗日第二类方程;

③直接应用虚速度原理 (或虚位移原理) 得出系统方程

$$[\delta \dot{R}^T, \delta \omega^T, \delta \dot{\xi}^T] \left\{ G \begin{bmatrix} \ddot{R} \\ \dot{\omega} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} + H \right\} - \delta P = 0$$

其中

$$\delta \dot{R}^T = [\delta \dot{R}_1^T, \dots, \delta \dot{R}_n^T], \quad \delta \omega = [\delta \omega_1^T, \dots, \delta \omega_n^T]$$

和 $\delta \dot{\xi}^T = [\delta \dot{\xi}_1^T, \dots, \delta \dot{\xi}_m^T]$. 根据约束条件求出

$$\delta \dot{R} = \beta_1 \delta \dot{q} + \beta_2 \delta \dot{\xi}; \quad \delta \omega = \gamma_1 \delta \dot{q} + \gamma_2 \delta \dot{\xi}$$

$$\ddot{R} = \beta_1 \ddot{q} + \beta_2 \ddot{\xi} + S(q, \dot{q}, \xi, \dot{\xi})$$

$$\dot{\omega} = \gamma_1 \dot{q} + \gamma_2 \dot{\xi} + W(q, \dot{q}, \xi, \dot{\xi})$$

$$\delta P = \delta \dot{q}^T Q_1 + \delta \dot{\xi}^T Q_2$$

代回原方程, 由于 δq 和 $\delta \xi$ 诸元素是独立的, 最后得出系统的方程

$$J^T G J \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = -J^T (GD + H) + Q$$

其中

$$J = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} S \\ W \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

④应用动量定理及动量矩定理列出隔离的单个物体的动力学方程, 方程中包含有理想约束力 (矩), 然后以约束条件 (完整约束) 为依据消去约束力 (矩), 在多刚体系统中对此我们已有经验, 这种方法只在简单链系统的情况下是可取的。

2.3.3 变形模态的选择问题。在小变形情况下, 系统中物体 B_i 的弹性变形表示为 $u_i = \Psi_i \xi_i$ 。重要的问题是选择好适当的模态矩阵。其要求是描述弹性变形的自由度 (即 ξ_i 的维数) 要尽可能取得少, 同时又要能尽可能地反映变形运动的真实情况。为此可以采用两类方法。一类方法是将变形物体作为线性连续体处理, 采用假定模态法或者 Rayleigh-Ritz 法来选定模态函数。这特别适用于如下的半柔性系统: 只有在结构边缘的某些物体是变形体, 其余的都是刚体, 而且这些变形体是梁或者薄板。另一类方法是将变形体划分成离散的单元, 应用有限元方法, 通过特征方程求出自由振动模态。我们必需舍弃与零频率对应的刚性模态, 即排除多余的自由度。应用自由振动模态的缺点是收敛比较慢, 需要多阶模态才能比较好地描述变形运动。结构力学中常用静态更正 (静力修正) 模态来更替振动模态, 这样就可以减少所取模态的阶次。振动模态能够反映快速的变化, 静态更正模态适合于慢变的情况。因此可以采取两种模态组成的混合模态来解决某些实际问题^[65]。

2.3.4 动标架的选择问题。在刚体的情况下我们选择刚体的连体系为动坐标架。前面

已经讨论过，当动标架原点选在刚体质心时，可以消除加速度级耦合项。同时我们也知道，将动标架基向量选在刚体的主轴方向，惯量张量具有最简单的对角线形式。因此不言而喻，我们总是喜欢选质心主坐标架作为动标架。如果物体是弹性体，则连体标架这个词不再有确定的含义，因为根本不存在一个在每一时刻都可以依附的刚体。此时我们只能选择一种相对于所研究的物体浮动的动标架^[18]。选择的原则是使最后得出的动力学方程尽量消除耦合项。可以有两种方法。一种是选浮动质心主轴系，原点选在变形体的瞬时质心上，基向量方向选在变形体每一瞬时的主轴方向。另一种选择是所谓平均轴系，其原点的选择与以上方法相同，方向的选择使得弹性相对位移模的平方取极小值（Bucken 条件），即

$$\delta\left(\int u^T u \, dm\right) = 0$$

这相当于应变能取极小值。如果取弹性体相对动标架的动能最小（Tisserand 条件），即

$$\delta\left(\frac{1}{2} \dot{u}^T \dot{u} \, dm\right) = 0$$

经过线性化处理，也可以得出上述同样的结果。在选用平均轴动标架的情况下，变形体相对动系的动量和动量矩为零，从而变形体的动力学方程具有比较简单的形式，即所有惯性耦合项全部被消除，物体的动力学方程成为

$$M_{11} \ddot{R} = Q^R + D^R; \quad M_{22} \ddot{\theta} = Q^\theta + D^\theta; \quad M_{33} \ddot{\xi} + K' \xi = Q^\xi + D^\xi$$

选择平均轴的条件可以通过变形模态来表示，同时根据自由振动模态的正交性可以证明，当我们用非零频率的自由振动模态作为变形模态时平均轴条件是满足的，也就是说自由振动模态所对应的直角坐标系就是平均轴系。同时还可以证明当使用自由振动模态时，质量矩阵和刚度矩阵都可以对角化。

2.3.5 近似处理问题。弹性变形模态坐标的引进使方程的自由度数大大增加，尽管在适当选择动标架以后方程形式有所简化，但仍然是比较复杂的。从工程应用的角度来看，有必要进行近似处理，在尽可能减少计算量以及尽可能反映真实情况之间选取折中的近似计算方案。近似处理包括两个步骤。一是对动力学方程进行近似处理，另一是算法上的近似处理。对动力学方程的近似处理又可以从两方面进行。一方面是选择弹性变形描述中模态的适当阶次，以少数 N 项模态表达式来近似反映真实的运动，这反映在有限元方法中就相当于选择适当的单元划分数目。另一方面，我们假定弹性变形的模态坐标 $\xi_i (i=1, \dots, \nu)$ 是小量，即 $|\xi_i| = o(\varepsilon)$ ，同时我们又假定 ξ_i 为具有正弦特征的函数，所以有 $|\dot{\xi}_i| = o(\omega_i \varepsilon)$ 和 $|\ddot{\xi}_i| = o(\omega_i^2 \varepsilon)$ 。我们可以根据这一性质估计方程中各项的量级（相当于 ε 的量级），可以认为在忽略全部变形项情况下的纯刚体运动是基本运动，变形项是对基本运动的扰动，所以纯刚体运动方程中的各项应保持不能忽略，在此前提下，略去 ε 的高阶小量（略去的界限可以根据具体情况来分析确定），从而使动力学方程得到简化。

参 考 文 献

- 1 Shabana A A, Wehage R, *ASME J. Mechanisms, Transmission and Automation in Design*, **105** (1983) : 371—378
- 2 Shabana A A, Wehage R, *J. Struc. Mech.*, (1983) : 401—431
- 3 Shabana A A, *Computer and Structure*, **20**, 4 (1985)
- 4 Shabana A A, *Computer Meths, Appl. Mech, Engng.*, **54** (1986) : 75—91
- 5 Shabana A A, *J. Sound and Vibration*, **108**, 3 (1986) : 487—502
- 6 Ibrahim A E, Misra A K, *J. Guidance and Control*, **5** (Sept-Oct., 1982)
- 7 Erdman A G, Sandor G N, Oakberg R G, *J. of Eng. for Industry*, **94** (1972) : 1193—1205
- 8 Truckenbrodt A, *VDI Zeitschr.*, **8** (1980) : 33
- 9 Deveubeke B F, *Int. J. Eng. Sci.*, **14** (1976) : 895—913
- 10 Turcic D A, Askok Midha, *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **106** (Sept., 1984) : 243—248
- 11 Hang E J, Wu S C, Kim S S, Dynamics of flexible mechanics: A variational approach, Proc. IUTAM/IFTOMM Symp. on Dynamics of Multibody Systems. (Sept., 1985)
- 12 Kelly F A, Huston R L, Modelling of flexibility effects in robot arms, Proc. Green Valley, Ariz: American Automatic Control Council, paper WC-2C
- 13 Ashley H, *AIAA J.*, **5** (Mar., 1967)
- 14 Ho J Y L, *J. Spacecraft*, **14**, 2 (1977)
- 15 Ho J Y L, Herbert D R, *J. Guidance and Control*, **8**, 3 (1985)
- 16 Frisch H P, A Vector-dyadic developments of the equations of motion for N-coupled flexible bodies and point masses, NASA TN D-8047 (1975)
- 17 Mirro J, Automatic feedback control of a vibrating beam, Master's Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Mechanical Eng. Rept, T-571 (1972)
- 18 Canavin J R, Likins P W, *J. Spacecraft*, **14**, 12 (1977)
- 19 Song J O, Hang E J, *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, **24** (1980) : 359—381
- 20 Kajuo Tsuchiya, *J. Guidance and Control*, **6** (Mar. -Apr., 1983)
- 21 Lilov L, *Dokl. Bulgarian Aca. Sci.*, **36**, 10 (1983)
- 22 Lilov L, Dynamics of elastic multibody systems involving closed loops, Proc. IUTAM/IFTOMM Symp. on Dynamics of Multibody Systems (1985)
- 23 Lilov L, Wittenburg J, Dynamics of chains of rigid bodies and elastic rods with revolute and prismatic joints, *ibid* (1985)
- 24 Vukobratovic M, et al, Dynamics of manipulation of robots, Scientific Fundamentals of Robotics 1, Springer-Verlag, New York (1982)
- 25 Mazza-Neto O, Model analysis and control of flexible manipulator arms, Ph. D. Thesis, MIT, Dept. of Mechanical Eng. (1974)
- 26 Agrawal O P, Application deformable body mean-axis to dynamics of flexible mechanical systems. Doctor Dissertation, University of Illinois (1984)
- 27 Agrawal O P, Shabana A A, *J. Comput. Struct.*, **21** (1985) : 1303—1312
- 28 Agrawal O P, Shabana A A, *Computers and Structures*, **22**, 2 (1986) : 165—178
- 29 Agrawal O P, Shabana A A, *Comput. Meth. in App. Mech. and Eng.*, **56** (1986) : 217—245
- 30 Boland P, Samin J C, Williams P Y, *AIAA J.*, **12**, 8 (1974) : 1025—1030
- 31 Boland P, Samin J C, Williams P Y, *AIAA J.*, **13** (1975) : 864—867
- 32 Hughes P C, Motion equations for a flexible articulated controlled manipulator arm, Part III, Arm modes, Dynacon Rept, 76-02-4 (Dec., 1976)
- 33 Hughes P C, *Celestial Mechanics J.*, **9** (1979) : 21—39
- 34 Hughes P C, *J. Astro. Sci.*, **26—27** (1979) : 359—380
- 35 Nguyen P K, Hughes P C, Finite element analysis of CTS-like flexible spacecraft, Tech. Rept, 205, Toronto, Univ. of Toronto, Inst. for Aerospace Studies (Jun., 1976)
- 36 Likins P H, Wirsching P H, *AIAA J.*, **6** (1968)
- 37 Likins P W, Dynamics and control of flexible space vehicles, Jet Propulsion Laboratory, CIT, Calif Rept, TR-32-1392 (Jan, 1970)
- 38 Likins P W, Fleischer G E, Large deformation model coordinates for nonrigid vehicle dynamics, NASA, TR-32-1565 (Nov., 1972)

- 39 Likins P W. *Int. J. Solids Struct.*, **8** (1972)
- 40 Likins P W. *Int. J. Solids and Struct.*, **9** (1973) : 1473—1487
- 41 Likins P W. Analytical dynamics and nonrigid spacecraft simulation, Jet Propulsion Laboratory, CIT, Rept. TR-32-1593 (Jul., 1974)
- 42 Likins P W. *J. Guidance and Control*, **9** (Mar. -Apr., 1986)
- 43 Winfrey R C. *J. Eng. for Industry*, **93** (1971) : 268—272
- 44 Milne R D. *AIAA J.*, **6**, 3 (1968) : 556—558
- 45 Roberson R E. *Acta Mechanica*, **14** (1972) : 297—308
- 46 Cavin R K, Howze J W, Thisay A C. *J. of Aircraft*, **13**, 5 (1976) : 382—384
- 47 Cavin R K, Dusto A R. *AIAA J.*, **15**, 12 (1977) : 1684—1690
- 48 Singh R P, Likins P W. Proc. 1983 Automatic Control Conf, San Francisco (Jan., 1983)
- 49 Singh R P, Vander Voort R J, Likins P W. *J. Guidance*, **8** (Sept.-Oct., 1985)
- 50 Dubowsky S, Gardner T N. *ASME J. Eng. for Industry*, **99** (Feb., 1977)
- 51 Wielenga T J. Simplifications in the simulation of mechanisms containing flexible members. Ph. D. Thesis. Univ. of Michigan (1983)
- 52 Kane T R, Levinson D A. *J. Guidance and Control*, **3** (Mar.-Apr., 1980)
- 53 Kane T R, Likins P W, Levinson D A. *Spacecraft Dynamics*, McGraw Hill (1983)
- 54 Hurty W C. *AIAA J.*, **3**, 4 (1965)
- 55 Sunada W H. On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulators with elastic members. ASME (Sept., 1982) : 45
- 56 Sunada W H, Dubowsky S. *J. of Mechanical Design*, **103** (1981)
- 57 Book W J. Modelling, design and control of flexible manipulator arms. Ph. D. Thesis, MIT, Dept. of Mechanical Engineering (Apr., 1974)
- 58 Book W K, Maizza-Neto O, Whitney D E. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, **97**, 4 (1975)
- 59 Book W J. *Int. J. Robotics Res.*, **3**, 3 (1984)
- 60 Jerkowsky W. *J. Guidance and Control*, **1**, 3 (1978) : 173—182
- 61 Yoo W S, Hang E J. *J. Struct. Mech.*, **14**, 1 (1986) : 105—126
- 62 Yoo W S, Hang E J. *Trans. ASME, J. Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 85-DET-71
- 63 Hooker W W. *Celestial Mech.*, **11** (1975)
- 64 刘延柱, 杨海兴. *应用力学学报*, 4 (1986)
- 65 林宝玖, 黄克累, 谢传锋. 挠性多体系统动力学方程. 北京航空航天大学硕士论文 (1986)
- 66 石则昌, 刘深厚. *天津大学学报*, 2 (1987)
- 67 武斐, 周起钊. 机器人动力学方程的等价性及改进算法. 北京大学硕士论文 (1986)
- 68 周起钊. *力学学报*, **19**, 1 (1987)

MAIN TOPICS OF DYNAMICS OF FLEXIBLE SYSTEM

Zhou Qi-zhao

Department of Mechanics, Beijing University (Peking University)

Abstract Research results of multi-rigidbody system are briefly summarized, and the mechanical model of flexible system and main topics in this field are introduced.

Keywords *multi-rigidbody system; flexible system; elastic deformation*