参 考 文 献

1 Carpentier A. et al. *J. Thorac. Cardiovasc. Surg.*, **83** (1982) : 27
2 Thubrikar M J. et al. *J. Biomed. Mat. Res.*, **16** (1982) : 811—826
3 Noort R V. et al. *Biomaterial*, **3** (1982) : 21—26
4 Crofts C E. et al. *J. Biomed. Mat. Res.*, **22** (1988) : 89—98
5 Lee J M. et al. *J. Biomed. Mat. Res.*, **18** (1984) : 61—77
6 Fung Y C. et al. *Am. J. Physiol.*, **213**, 6 (1967) : 1532—1544
7 Guth E. *J. Appl. Phys.*, **17** (1964) : 347—351
8 冯元桢. 生物力学. 科学出版社 (1983)
9 钟生平等. 生物医学工程学杂志, **4**, 4 (1987) : 265—269

A NEW TISSUE HEART VALVE MATERIAL ——YAK PERICARDIUM

A Study of Its Viscoelastic Properties

Zhong Sheng-ping Yue Yi-lun Ning Jiao-xian
Bioengineering Institute, Chengdu University of Science and Technology
Zhou Cheng-fei
National Institute for the Control of Pharmaceutical and Biological Products, Ministry of Health

二维和三维湍流的分形模型

G. Paladin A. Vulpinai
意大利 Sapienza 大学物理系

1 引 言

目前分形物体已广泛引入物理学和自然科学各种现象的分析中[1]. 湍流的几何形态特别需用"自相似"方法、而不是用"欧几里德"方法来研究. 人们通常考虑的是均匀分形（即具有整体严格的膨胀不变性），但我们想引入自相似性仅在平均意义下保持的一个简单模型，以便重现实际二维和三维湍流中的间歇行为. 也就是我们将使用非均匀分形，它们按如下一些规则生成：在每一长度尺度上，这些规则并非固定不变，而是根据一定的概率分布随机地给定. 下面用一个例子来说明我们上面的术语：由重复一个"碎裂"过程获得二维 Sierpinski 毯. 在第 i 步，一尺度为 l_i 的正方形生成尺度为 $l_{i+1}=l_i/n$ 的 n^2 个小正方形，且它们只有 β 部分是"满"的（见图 1，其中 $n=2$）. 如果盒子数是固定的（即具有 $\beta n^2 = n^{D_F}$），则称为均匀毯；如果盒子数不是常数，即如果 β 是依赖于特殊的正方形和所考虑的步数的一个随机变量，则称为非

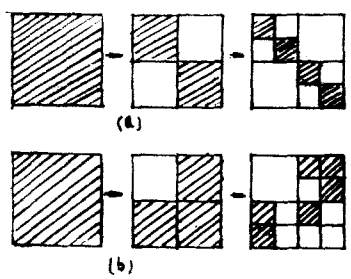

图 1 均匀分形（情形 a）与非均匀性分形（情形 b）的对比示意图
阴影区是"碎裂"过程中活跃的区域

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

均匀毯.

当然，即使很明确定义的分维（对于毯，有 $D_F=2+\log_e\{\beta\}$，式中 $\{\cdot\}$ 表示对 β 的概率分布的平均），也不能描写非均匀性的特征．另一方面，“碎裂”是由 β 的概率分布来决定，后者根据矩$\{\beta^q\}$原则上是已知的．在三维湍流中，这些矩可自然地与结构函数指数联系起来．但在二维情况这是不可能的，因在二维情况下“碎裂”并不导致一个自相似结构．

2 三维间歇性

Navier-Stokes 方程

$$\partial_t \mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-(1/\rho)\nabla p+\nu\Delta\mathbf{u} \tag{1}$$

在作如下的尺度变换后形式不变：

$$\mathbf{r}\to\lambda\mathbf{r},\quad \mathbf{u}\to\lambda^h\mathbf{u},\quad t\to\lambda^{1-h}t,\quad \nu\to\lambda^{h+1}\nu \tag{2}$$

注意到平均能量耗散 $\bar{\varepsilon}=\nu(\nabla\mathbf{u})^2$ 在作尺度变换（2）后具有如下形式：

$$\bar{\varepsilon}\to\lambda^{3h-1}\bar{\varepsilon} \tag{3}$$

著名的 Kolmogorov 律[2]可用作尺度变换（2）后 $\bar{\varepsilon}$ 的不变性（$h=1/3$）来得出．这意味着

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x^{1/3}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\mathbf{u}(\mathbf{x}-\Delta\mathbf{x})-\mathbf{u}(\mathbf{x})|}{\Delta x^{1/3}}\neq 0 \tag{4}$$

（4）中 $\Delta x\to 0$ 意味着 $\Delta x\sim$ 耗散长度，于是在无穷大雷诺数的极限下速度梯度是奇异的．注意到 Kolmogorov 理论中有一个隐含的假设：奇点的集合（（4）中具有的这些奇点）是填满空间的．

人们可能想到(如 Landau[3] 首先提到的)能量耗散 $\varepsilon(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\nu\cdot\Sigma_{ij}(\partial_i u_j+\partial_j u_i)^2$ 是强脉动．例如，这种情况发生在速度梯度为奇异的那些点的集合具有非整数的分维时．

用均匀分形来研究问题的一种方法已由所谓的 β 模型[4] 提出．简要地说，在这种方法中，方程（4）可用

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x^h}\neq 0,\quad h=\frac{D_F-2}{3} \tag{5}$$

代替，且满足（5）的点集具有分维 $D_F<3$．实际上，在这个模型中，能量耗散 $\varepsilon(\mathbf{x})$ 是均匀分布在一个均匀分形物体上．在 β 模型中，对于脉动速度，可以得到

$$\langle|\Delta u(l)|^P\rangle\sim l^{\zeta_P},\quad \zeta_P=\frac{P(D_F-2)}{3}+(3-D_F) \tag{6}$$

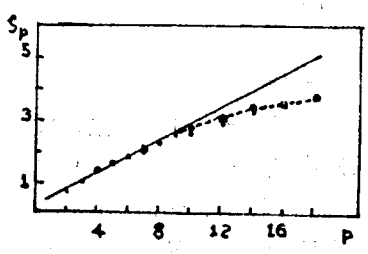

图2 ζ_p 与 P 的关系

圆点和圆圈表示实验数据[5]；实线是 $D_F=2.83$ 时 β模型的结果；虚线是方程 (13)和(14) 在 $x=0.125$ 时的结果

图 2 中我们报道了各种实验测定的 ζ_P 的数据[6]．

只有当 $P\leqslant 7$ 时才容许 ζ_P-P 曲线的线性拟合是可行的，而对于更大的 P 值，ζ_P-P 的行

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

为趋向于非线性．故可断定，包含能量耗散的区域不是均匀分形而存在着许多具有不同 h 值的奇异结构．最近[6,7]为了考虑更复杂的结构提出了一个多重分形模型：定义 $S(h)$ 作为

$$\lim_{x\to y}\frac{|\mathbf{u}(\mathbf{x})-\mathbf{u}(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{h}}\neq 0 \tag{7}$$

的点集并用 $d(h)$ 表示 $S(h)$ 的分维．因尺度 l 下属于 $S(h)$ 的概率正比于 $l^{3-d(h)}$，故有

$$\langle|\Delta u(l)|^{P}\rangle\sim\int d_{u}(h)\,l^{Ph+3-d(h)}\sim l^{\zeta_P} \tag{8}$$

对于 ζ_P，由鞍点法可得

$$\zeta_P=\min_{h}\{Ph+3-d(h)\} \tag{9}$$

物理上，方程（5）意味着对于一个给定的 P 值，ζ_P 取决于一个特殊的 h 值．所以需要确立集合 $S(h)$ 的不稳定性的种类得由速度差的矩来挑选．于是图 2 可以看成是作用在选取能量传递和耗散的概率分布的流动中不同的不稳定性机理的证据．

现在引入 β 模型的一个推广[7]来获得具有速度梯度的不同类型奇异性（即不同的 h 值）的一个非均匀分形物体．考虑尺度 $l_n=2^{-n}l_0$，式中 l_0 是输入能量时的尺度．如果在尺度 l_n 下有 N_n 个活跃的涡，则每个涡 $l_n(k)$ 又生成尺度为 l_{n+1} 的一些涡（k 标示出“父代”涡，$k=1,\cdots,N_n$）．由于能量传递速率在 $l_n(k)$ 和 $l_{n+1}(k)$ 之中是常数，所以

$$V_n^3(k)/l_n(k)=\beta_{n+1}(k)V_{n+1}^3(k)/l_{n+1}(k) \tag{10}$$

这里象在标准的 β 模型中一样，$V_n(k)$ 是距离为 l_n 的两点间那个活跃涡的速度差，而 $\beta_{n+1}(k)$ 是由涡 $l_n(k)$ 生成的尺度为 l_{n+1} 的那些活跃涡所占据体积的百分比．方程（10）意味着在由“碎裂” $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的一个特殊集合生成的一个涡的速度差是

$$V_n\sim l_n^{1/3}\Big(\prod_{i=1}^{n}\beta_i\Big)^{-1/3} \tag{11}$$

从（11）可得

$$\langle|\Delta u(l_n)|^{P}\rangle=\int\prod_{i=1}^{n}d\beta_i\,P(\beta_1\cdots\beta_n)\,\beta_i|V_n|^{P} \tag{12}$$

假定“破裂”的各步互不相关，即 $P(\beta_1\cdots\beta_n)=\prod_{i=1}^{n}P(\beta_i)$，所以可得到导数 ζ_P 为

$$\zeta_P=P/3-\ln_2\{\beta^{(1-P/3)}\} \tag{13}$$

式中 $\{\cdot\}$ 表示取分布 $P(\beta)$ 的平均值．注意到如果 β 是一个常数 $(2^{(D_F-3)})$，那就可得到标准 β 模型的结果（即方程(7)）．概率分布 $P(\beta)$ 的知识是与对 Navier-Stokes 方程奇异性的本质的了解相关联的．图 2 表明一个简单的形式

$$P(\beta)=x\,\delta(\beta-0.5)+(1-x)\delta(\beta-1) \tag{14}$$

在 $x=0.125$ 时，得出与现有实验数据的一个良好的拟合，x 是唯一的自由参量．没有更多的理由去选择 $P(\beta)$ 的形式（14）．我们已经假定在（14）中遵循一个简单唯象思想，即一个活跃涡可生成一些速度层（$\beta=0.5$），或生成一些填满空间的 Kolmogorov 型涡（$\beta=1$）．

注意，用上述规则生成的分形物体并没有整体膨胀不变性特点，然而人们可以计算由下式定义的分维 D_F：

$$\langle N_n\rangle\sim l_n^{-D_F} \tag{15}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

式中 N_n 是在第 n 步碎裂时活跃涡的数目．通过简单的计算[7]容易证明：

$$D_F = 3 + \ln_2\{\beta\} = 3 - \zeta_0 \tag{16}$$

可见由方程(15)定义的分维 D_F 不同于常在一些实验论文中使用的维数D^*，后者是由能量耗散相关来计算的．用我们的 ζ^P 表示，有 $D^* = 1 + \zeta_6$．容易看出，在一般情况下，$D_F > D^*$；$D_F = D^*$ 仅在标准 β 模型（即均匀分形）中才成立．例如 $D_F = 2.91$ 和 $D^* = 2.83$ 是由方程（14）和 $x = 0.125$ 拟合的；这是充分发展湍流的多重分形本质的一个间接检验．

3 二维间歇性

上节描述的随机 β 模型不能容易地推广到考虑代替能量的涡量拟能（enstrophy）局部级串的二维湍流．如果我们假设“碎裂”过程不是间歇的（即 Kolmogorov 类填满空间的），则可求得惯性区内结构函数的通常的幂律为[9]

$$\langle|\Delta u(l)|^P\rangle \sim l^{\zeta_P},\ \zeta_P = P \tag{17}$$

让我们证明，用 β 模型方法不可能得到对（17）的间歇修正．我们回忆涡量拟能传递速率是常数的假设所起的中心作用，由此通过量纲计算可得

$$\zeta_3 = 3 \tag{18}$$

此外还可证明 ζ_P 对于 P 是凸的[10]．对于二维 Euler 方程有一个精确解[9]，这不难推广到粘性情况：

$$|\Delta \mathbf{u}(r)| < \text{const}\ r|\log(r)| \tag{19}$$

这意味着 $\zeta_P < P$．不等式 $\zeta_P > P$ 与（18）相容，并且只在 $\zeta_P = P$ 时才存在 ζ_P 的凸性．

颇令人惊奇的是间歇性并不影响结构函数指数．不过存在这种奇特行为的一些数值证据，这是二维湍流相当独特的地方．所以需要修正随机 β 模型以便至少能够重复已知的一些唯象现象．因为已假设一个恒定的涡量拟能传递速率，所以（10）在任何情况下均变为

$$\frac{V_n^3(k)}{l_n^3(k)} = \beta_{n+1}(k)\frac{V_{n+1}^3(k)}{l_{n+1}^3(k)} \tag{20}$$

引入进一步的限制

$$\beta_{n+1} = 1,\ \text{当}\ V_n^3/l_n^3 > \eta_{\max}\ \text{时} \tag{21}$$

则不等式(19)可以满足．当级串的步数不再独立时，(21)就会将“碎裂”的旧 Bernoulli 过程修正为一个 Markov 过程．这个 Markov 随机 β 模型即使在 $\zeta_P = P$ 时也具有间歇行为．事实上，在 R^2 中存在一些零涡量拟能耗散区域，其分维 $D_F = 2$，还存在一些具有强涡量梯度的活跃涡．

粗略地说，我们不再有一个多重分形，但有一个“棋盘”式的结构．

在尺度足够小但仍然大于粘性耗散尺度时，“碎裂”将是填满空间的，而间歇性应当看成是二维中一定程度的“宏观”现象．

最近的数值结果[11]表明，二维湍流的情况与我们的模型定性上是一致的．涡量拟能级串实际上似乎并不存在于某种控制所有尺度能谱的拟序结构中．

参考文献（11篇，略）

中国矿业大学数力系**谢和平**译自：Pietronero L, Tosatti E(eds). Fractals in Physics, Elsevier Science Publishers B.V.(1986)：447—452.

（**董务民**校）（略有删节）

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.