

非线性有限元的若干基本问题

蒋和洋 唐立民

(大连工学院工程力学研究所)

提要 本文介绍了非线性有限元中的若干基本问题。其中包括有关应变、应力和非线性平衡方程的一些基本概念,基于不同非线性广义变分原理的位移模式、杂交模式和拟协调模式几何非线性有限元及其在壳体屈曲问题中的应用等。

关键词: 非线性有限元; 位移元; 杂交元; 拟协调元; 屈曲

1. 引言

由于现代科技和生产力的发展,人们面临着越来越多的非线性力学问题,尤其是在宇航、航空、舰船和原子能工业等现代科技集中的部门,更是如此。许多结构在大载荷、高速、高温的条件下,呈现出一系列复杂的非线性现象。高强度的薄板、薄壳和薄壁杆件的大位移分析和稳定性分析均属至关重要。传统的线弹性分析法对这类问题显然已不适应。比如,考虑膜力作用的薄板挠度要比线性解小得多,而考虑几何非线性的薄壳挠度要比线性解大得多。为了使所造的结构重量最轻、性能最好,就必须用非线性分析方法。然而,实际结构的非线性分析得以实现,还是在电子计算机和有限元问世以后。

2. 非线性有限元概述

在线性有限元发展的早期,先驱者 Turner, Clough 等人^[1]首先提出位移模式有限元。Irons 提出了著名的等参元。有限元得到了很大的发展。这些单元的构造是基于假设位移场和最小势能原理。为了不断改善有限元的性能,人们进行了各种探索。卞学绩^[2]首创基于最小余能原理的杂交应力元。单元的推导是基于域内平衡应力场和边界协调位移函数。受杂交应力元启发,国内提出基于域内假设应变场和边界协调位移场的拟协调元^[3,13],允许引入更多的变量。拟协调元反过来也促进了杂交应力元的发展,基于新列式的杂交应力元比原来的具有更优的性能^[4]。

在线性有限元迅速发展的基础上,非线性有限元先是沿着几何非线性和材料非线性分别发展,后来又共同发展。在几何非线性有限元方面,Turner 等人^[5]首先由变形几何关系推导了轴力杆和三角形膜单元的初应力刚度阵并采用了线性化的增量算法。随后,Argyris, Gallagher, Kapur 和 Hartz 等推导了多种类型单元的初应力阵, Martin^[6]则利用势能表

达式和非线性应变分量,使初应力阵的推导有了坚实的基础。位移模式非线性单元的三个共同缺点是:①板壳单元边界法向转角不协调,收敛性得不到保证。Gallagher 等人和 Yao 分别采用板元和曲面三角元研究任意薄壳的线性屈曲问题就有这个问题^[7]。而旋转壳元由于是一维单元,解决了边界转角协调问题,用它计算的线性屈曲与理论值是一致的^[7]。②缺乏刚体自由度,这是由于用单一多项式表示位移场引起的。为了减小这一影响,需要缩小单元尺寸。由此而增加的单元个数比解该问题所需的单元还要多^[8]。③推导和计算非线性单元的复杂性。

由 C^0 连续的等参元发展而来的非线性板壳超参元,由于其原理简明,适应性强,已成为工程界最喜欢的单元之一。缺点是其减缩积分点的选择尚停留在“试凑”和“经验”的阶段,因而要小心防止出现单元的零能模式^[10]。其次,单元划分的形状和变形的程度对单元的性能有影响,包括单元尺寸和厚度的比值、曲率半径和厚度的比值对解的影响^[2]。

卞学绩^[2]将杂交应力元推广到非线性领域。由于它是基于假设应力场和边界协调位移函数,因此从根本上克服了位移模式中存在的 C^1 不协调问题和缺乏刚体自由度问题,收敛性好,节省了解题所需的单元^[2]。但是由于在严格的平衡方程中,应力和位移是耦合的,无法选择严格满足平衡条件的应力场^[2]。这使得线性杂交应力元的原则在构造非线性杂交应力元时得不到彻底的贯彻,不能严格按最小余能原理构造非线性杂交应力元。此外,由于机理比较复杂,推导较繁,在杂交应力元的推导过程中忽略了一些非线性高阶项(第三变分)^[2],这对于那些几何缺陷敏感的结构,会在屈曲分析中导致很大的误差,甚至高达 100%^[9]。

针对非线性杂交应力元的缺点,国内提出了异于胡海昌-Washizu 原理的拟协调模式非线性有限元^[11,12,20]。由于拟协调模式是基于域内应变场和边界协调位移函数,它和杂交应力元一样,克服了存在于位移模式中的 C^1 不协调问题和缺乏刚体自由度问题,收敛性好,节省了解题所需的单元。非线性拟协调元放弃了转角协调方程和应力平衡条件,使它的单元推导比杂交应力元简单而严密,可以包括所有的非线性项。这是拟协调模式比杂交应力模式成功的一面。使用相同的单元个数,获得了比杂交应力元好的计算结果^[12]。拟协调模式非线性有限元还具有刚度阵有显式、不需求逆和通用性强等优点。

受拟协调模式非线性有限元启发,卞学绩^[18]也放弃了转角协调关系,对转动分量和初应力引入相同的假设函数,由 Hellinger-Reissner 原理推导了新的非线性杂交应力元列式,使单元的性能提高了一步。

在材料非线性有限元方面,主要是发展解法。最早的是初应变法^[14]。通过修改平衡方程,使方程左端始终保持弹性方程形式,右端作出相应的修正,以表明塑性应变并不引起应力变化。后来是切线模量法^[15],它是根据塑性力学中的线性增量法,使问题分片线性化。在推导塑性单元方面,发展了内部包含塑性区的单元^[16]。在塑性应变区的发展过程中,假设塑性应变是在单元平面内和沿厚度方向作线性变化的。但目前用以确定沿厚度方向弹塑性区域边界的主要方法还是数值积分(Gauss 积分、Simpson 积分和 Lobatto 积分)法^[30,32]和分层子单元法^[31]。

3. 应变张量的等价性和条件等值性

由于变形体的应变状态可由各点的变形梯度完全确定,现有的各种应变分量均可由变形

梯度定义。[19]中定义的 Green 应变 $\llcorner C$ 和 Cauchy 应变 $\llcorner c$ 与变形梯度 $\llcorner D, \llcorner D^{-1}$ 的关系为

$$\llcorner C = \llcorner D^* \cdot \llcorner D, \quad \llcorner c = \llcorner D^* \cdot \llcorner D^{-1} \quad (3.1)$$

而 Almansi 应变 $\llcorner E, \llcorner e$ 为

$$\llcorner E = \frac{1}{2}(\llcorner C - \llcorner I), \quad \llcorner e = \frac{1}{2}(\llcorner I - \llcorner c) \quad (3.2)$$

由变形基本定理^[19]，物体任何一点的变形由平移、刚性转动和纯应变复合而成，故变形梯度可进行极分解：

$$\llcorner D = \llcorner V \cdot \llcorner R \quad (\text{左极分解}), \quad \llcorner D = \llcorner R \cdot \llcorner U \quad (\text{右极分解}) \quad (3.3)$$

其中 $\llcorner R$ 为转动张量； $\llcorner V, \llcorner U$ 分别为左、右伸长张量。从 (3.1) 和 (3.3) 可得如下关系：

$$\llcorner U = \llcorner C, \quad \llcorner V = \llcorner C^{-1} \quad (3.4)$$

故由应变张量的等价性定理^[19]“任何 $\llcorner C$ 的单值可逆仿射量函数是空间应变张量；而 $\llcorner c$ 的，则是物质应变张量”可知， $\llcorner U, \llcorner V, \llcorner E, \llcorner e$ 和 $\llcorner C, \llcorner c$ 一样，都是应变张量（度量）。

用不同应变张量测定同一物体的变形时，能够得到相同的变形量，但不一定能得到相同的应变值。如一根杆子伸长 1 倍，无转动，由通常的 Green 应变知，其应变值为

$$E_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}u_{,x}^2 = 1.5$$

而由左、右伸长张量知，其应变值为 1。这种差别是合乎逻辑的，也是必然的。

以上说的是各种应变张量的等价性。[17]还证明了各种应变张量的条件等值性。即在“同 1 相比，应变和转角为高阶小量，而且应变是比转角更为高阶的小量”的假设下，不同的应变张量不但具有相同的应变近似表达式，而且具有相同的一阶、二阶应变增量近似表达式。这一点对于非线性有限元计算具有某种意义，即只要在每一增量步计算中上述假设成立，那么用上述任一种应变张量都将得到相同的数值结果。

不同的应变张量虽然是等价的，但是理论上仍有不少差别，如在表达有限转动的能力上^[20]。而上述条件等值性只是问题的一个方面。

4. 共轭应力应变变量

共轭应力应变变量问题是非线性力学最基本的问题之一。由于应变能密度是客观的，因此应变与应力具有一一对应的关系，组成共轭应力应变变量。出现在各种变分原理中的应力应变必需是共轭的。采用不同的共轭应力应变变量将导致不同的广义变分原理和有限元模式，见第 7 节。[19]证明了 Kirchhoff 应力和 Green 应变，Piola 应力和变形梯度 F ，Jaumann 应力和右伸长张量等等都是共轭应力应变变量：

$$\dot{\Sigma} = T : \dot{E} = J : \dot{U} = \tau : \dot{D} = \int t : \dot{d} = T : \frac{1}{2} \dot{C}$$

理论上共轭应力应变变量是无穷的，与之相应的广义变分原理和有限元模式也是无穷的。位移模式和杂交模式有限元只是两个特例。

5. 应变、应力和结构反力的近似计算^[28]

以 Green 应变为例，应变全值可由结构总位移代入应变-位移关系求得：

$$\varepsilon_{ij} = e_{ijk}d_k + \frac{1}{2}e_{ijkl}d_kd_l \quad (5.1)$$

其中 e_{ijk} 和 e_{ijkl} 是取定值的三阶和四阶张量，分别相应于应变-位移关系矩阵中的线性和非线性部分； d_k 为总位移。由上式的增量累加而成的近似应变为

$$\varepsilon_{ij} \approx \sum^N \Delta\varepsilon_{ij} = \sum^N \left(e_{ijk}\Delta_k + e_{ijkl}d_l\Delta_k + \frac{1}{2}e_{ijkl}\Delta_k\Delta_l \right) \quad (5.2)$$

其中 Δ_k 为 d_k 的增量。

为大致比较 (5.1) 和 (5.2)，可以适当调整增量载荷，使每一增量步所得的增量位移 Δ_k 相近，这时 (5.2) 变为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &\approx e_{ijk}d_k + \frac{1}{2}e_{ijkl}d_kd_l \left(1 + \frac{2}{N} \right) \\ &= e_{ijk}d_k + \frac{1}{2}e_{ijkl}d_kd_l, \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (5.3)$$

其中 N 为增量步总数。上式说明当增量步足够多时，增量应变之和 (5.2) 等于应变全值 (5.1)。 (5.3) 也有助于估计两者之间的误差范围。

对于线弹性材料，上述结论也适用于应力的近似计算。

结构反力的全值可由结构总应变能对总位移的导数表示：

$$P_i = K_{ij}d_j + \frac{1}{2}N_{ijk}d_jd_k + \frac{1}{3}N_{ijkl}d_jd_kd_l \quad (5.4)$$

它也可由增量反力累加而成：

$$\begin{aligned} P_i &\approx \sum^N \Delta P_i = \sum^N (K_{ij}\Delta_j + N_{ijk}d_k\Delta_j + N_{ijkl}d_kd_l\Delta_j) \\ &= K_{ij}d_j + \frac{1}{2}N_{ijk}d_kd_j \left(1 + \frac{1}{N} \right) + \frac{1}{3}N_{ijkl}d_jd_kd_l \left(1 + \frac{1}{N} \right) \left(1 + \frac{1}{2N} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

上式表明，当增量步无限多时，反力增量之和等于反力全值。但 (5.5) 适应于任何情况，而 (5.4) 仅适用于变形不大的情况，因为用总位移表示的总应变能在大变形时缺乏明确的力学意义。在不同的大变形增量平衡方程中，采用不同的反力计算公式，见下节。

6. 坐标系和增量平衡方程

非线性分析中各种力学量的标定及其转换均有赖于所选取的参照系。原则上可以用变形过程中的任何一个位形作为参照系，它们对运动全过程的标定能力都是等价的。若以初始位形作为参考系，则称为 Lagrange (或物质) 坐标系；若以运动终态作为参考系，则称为 Euler (或空间) 坐标系；若将坐标线刻划于变形体之内，随物体变形，则称为 Convected (流动)(或拖带)坐标系。在非线性有限元分析中一般采用 Lagrange 坐标系。若以第一个增量步的初始位形作为标定各个增量步的参考系，则称为总的 Lagrange 坐标系(记为 T.L.)；

若以第 N 个增量步的终态作为标定第 $N+1$ 个增量步的参照系, 则称为修正的 Lagrange 坐标系 (记为 U.L.).

T.L. 描述的优点是, 不需要修改节点坐标, 也不需进行应力转换就可以进行增量叠加. T.L. 列式广泛应用于大变形板壳问题和其他一些非线性力学问题. U.L. 列式的优点是线性应变增量比 T.L. 列式简单. 但每个增量步开始前都要修改节点坐标, 进行应力转换 (将上一增量步终态的 Kirchhoff 应力转换为下一增量步初态的 Cauchy 应力).

现在谈谈增量平衡方程. 有相当多的文献是通过结构的能量泛函

$$\Pi = \frac{1}{2} K_{ij} d_i d_j + \frac{1}{6} N_{ijk} d_i d_j d_k + \frac{1}{12} N_{ijkl} d_i d_j d_k d_l - \Delta P_i d_i \quad (6.1)$$

求导来得出平衡方程及其增量形式的 [27]:

$$\Pi_{,i} = K_{ij} d_j + \frac{1}{2} N_{ijk} d_j d_k + \frac{1}{3} N_{ijkl} d_j d_k d_l - \Delta P_i = 0 \quad (6.2)$$

其中 K_{ij} , N_{ijk} , N_{ijkl} 为取固定值的二、三、四阶张量; d_i 为结构总位移矢量; ΔP_i 为外载荷.

也有许多文献是由虚功原理来推导方程的 [22]:

$$\int_{N+1V} {}^{N+1}\tau_{ij} \delta_{N+1} e_{ij} {}^{N+1} dv = {}^{N+1} \mathcal{B} \quad (6.3)$$

其中各力学量定义均见 [22].

属于应变能求导得到的平衡方程有 Cook 的列式 [10]

$$(K_L + N_1 + N_2) \Delta d = f - (K_L + (1/2)N_1 + (1/3)N_2)d \quad (6.4)$$

其中 $(K_L + N_1 + N_2)$ 是 $\Pi_{,i}$ 的改写, 而结构反力 $(K_L + (1/2)N_1 + (1/3)N_2)d$ 由全值计算, 见 (5.4).

属于虚功方程导出的平衡方程有 Zienkiewicz 的列式 [23]

$$(K_0 + K_o + K_L) da = f - \int_V \bar{B}^T \sigma dv \quad (6.5)$$

其中 $(K_0 + K_o + K_L)$ 等价于 Cook 的 $(K_L + N_1 + N_2)$, 但结构反力 $\int_V \bar{B}^T \sigma dv$ 中的 σ 是由应力增量 $d\sigma = Dd\varepsilon$ 累加而成, 这与 Cook 的不同.

属于虚功方程导出的还有 Bathe 的列式 [22]

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}^0 C_{ijrs} {}^0 \varepsilon_{rs} \delta {}^0 e_{ij} {}^0 dv + \int_{0V} {}^N S_{ij} \delta {}^0 \eta_{ij} {}^0 dv = \\ & = {}^{N+1} \mathcal{B} - \int_{0V} {}^N S_{ij} \delta {}^0 e_{ij} {}^0 dv \end{aligned} \quad (6.6)$$

上式左端第一项含有应变增量的三、四阶高阶小量, 将其略去后, (6.6) 可线性化为

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}^0 C_{ijrs} {}^0 \varepsilon_{rs} \delta {}^0 e_{ij} {}^0 dv + \int_{0V} {}^N S_{ij} \delta {}^0 \eta_{ij} {}^0 dv \\ & = {}^{N+1} \mathcal{B} - \int_{0V} {}^N S_{ij} \delta {}^0 e_{ij} {}^0 dv \end{aligned} \quad (6.7)$$

这样, 线性化后的 Bathe 方程 (6.7) 便和 Zienkiewicz 方程 (6.5) 等价了。

由于虚功原理是普遍成立的, 因此由虚功原理导出的平衡方程具有一般性。而由能量变分导出的平衡方程受到变形程度的限制。在大变形的情况下, 物体的应变能没有准确的物理意义。这是因为应力和应变的方位在渐进变形过程中一般是改变的。因此用应力和应变的全值相乘, 在力学意义上并不一定等于应变能总值。在小变形时, 这种表示法是近似准确的。大变形时, 应变能总值应由应变能增量积分来表示^[20]。因此, (6.1) 和 (6.2) 是在小变形情况下成立, 而 (6.3) 是普遍成立的。

7. 非线性广义变分原理和非线性有限元模式

根据[11]的观点, 各种非线性广义变分原理存在着一个统一形式, 其势能形式和余能形式分别为

$$\begin{aligned} \Pi_G^P = & \int_V [\Sigma(\varepsilon) + \sigma : f(F, \varepsilon) - u \cdot \bar{F}] dv - \int_{S_\sigma} u \cdot \bar{P} ds \\ & - \int_{S_u} (u - \bar{u}) \cdot f_{,F}^T \cdot \sigma \cdot N ds \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G^C = & \int_V \{ \Sigma^C(\sigma) - [f + \varepsilon - f_{,F}(u \cdot \nabla)] : \sigma + u \cdot [(f_{,F}^T \cdot \sigma) \cdot \nabla \\ & + \bar{F}] \} dv - \int_{S_u} \bar{u} \cdot f_{,F}^T \cdot \sigma \cdot N ds - \int_{S_\sigma} u \cdot (f_{,F}^T \cdot \sigma \cdot N - \bar{P}) ds \end{aligned} \quad (7.2)$$

其中 $f(F, \varepsilon) = f_1(F) - \varepsilon = 0$ 为应变的一般表达式; $f_{,F}$ 为 $f(F, \varepsilon)$ 对 F 的偏导数; F 为变形梯度; σ, ε 为一对共轭应力应变变量, 其余不详之处见[11]。

把不同的共轭应力应变变量代入这个统一形式, 便可得到人们已知的各种非线性广义变分原理。如, 把 Kirchhoff 应力 T 和 Green 应变 E 代入 Π_G^P 和 Π_G^C , 便可得到胡海昌-Washizu 原理和 Hellinger-Reissner 原理:

$$\begin{aligned} \Pi_G^{\text{胡}} = & \int_V \left\{ \Sigma(E) + T : \left[\frac{1}{2}(F^* \cdot F - I) - E \right] - u \cdot \bar{F} \right\} dv \\ & - \int_{S_\sigma} u \cdot \bar{P} ds - \int_{S_u} (u - \bar{u}) \cdot F \cdot T \cdot N ds \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G^{\text{R}} = & \int_V \left\{ \Sigma^C(T) + \frac{1}{2}[(\nabla u) \cdot (u \nabla)] : T + u \cdot [(F \cdot T) \cdot \nabla + \bar{F}] \right\} dv \\ & - \int_{S_u} \bar{u} \cdot F \cdot T \cdot N ds - \int_{S_\sigma} u \cdot (F \cdot T \cdot N - \bar{P}) ds \end{aligned} \quad (7.4)$$

其中 $\Pi_G^{\text{胡}}$ 及其各种蜕化形式, 导致了一系列的位移模式有限元。 Π_G^{R} 及其蜕化形式, 导致了一系列的杂交、混合模式有限元。

将共轭变量 Piola 应力 τ 和变形梯度 F 代入这个统一形式, 将分别得到 Atluri 的两个变分原理^[21]和 Levinson 原理^[18]、de Veubeke 原理^[18]:

$$\begin{aligned} \Pi_G^{A1} = & \int_V [\Sigma(U) + \tau : (F - R \cdot U) - u \cdot \bar{F}] dv - \int_{S_\sigma} u \cdot \bar{P} ds \\ & - \int_{S_u} (u - \bar{u}) \cdot \tau \cdot N ds \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G^{A2} = & \int_V [\Sigma(R^T \cdot V \cdot R) + \tau : (F - \bar{V} \cdot R) - u \cdot \bar{F}] dv \\ & - \int_{s_\sigma} u \cdot \bar{P} ds - \int_{s_u} (u - \bar{u}) \cdot \tau \cdot N ds \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G^L = & \int_V [\Sigma^C(\tau) - t, \tau + u \cdot (\tau \cdot \nabla + \bar{F})] dv \\ & - \int_{s_\sigma} u \cdot (\tau \cdot N - \bar{P}) ds - \int_{s_u} \bar{u} \cdot \tau \cdot N ds \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G^d = & \int_V \{ \Sigma^C[S(\tau, R)] - t, \tau + u \cdot (\tau \cdot \nabla + \bar{F}) \} dv \\ & - \int_{s_\sigma} u \cdot (\tau \cdot N - \bar{P}) ds - \int_{s_u} \bar{u} \cdot \tau \cdot N ds \end{aligned} \quad (7.8)$$

其中已利用了变形梯度的左、右极分解 $F = R \cdot U = V \cdot E$, 以及 Jaumann 应力 $S = (1/2)(\tau^* \cdot R + R^* \cdot \tau)$. Simmonds 和 Atluri 等^[21]曾应用 (7.8) 构造新的有限元模式, 处理中面大伸长、大转动的壳体问题.

从广义变分原理的统一形式还可以得到新的广义变分原理. 如把共轭应力应变变量 Jaumann 应力 S 和右伸长张量 U 代入 (7.1) 和 (7.2), 可得到^[33]

$$\begin{aligned} \Pi_G^{I1} = & \int_V [\Sigma(U) + S : (R \cdot F - U) - u \cdot \bar{F}] dv - \int_{s_\sigma} u \cdot \bar{P} ds \\ & - \int_{s_u} (u - \bar{u}) \cdot R \cdot S \cdot N ds \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G^{I2} = & \int_V \{ \Sigma^C(s) - R : S + u \cdot [(R \cdot S) \cdot \nabla + \bar{F}] \} dv \\ & - \int_{s_u} \bar{u} \cdot R \cdot S \cdot N ds - \int_{s_\sigma} u \cdot (R \cdot S \cdot N - \bar{P}) ds \end{aligned} \quad (7.10)$$

这两个广义变分原理也为发展新的有限元模式提供了可能性, 它含有应力、位移和有限转动, 为独立变量, 是与 Π_G^{II} 和 Π_G^R 完全不同的另一类广义变分原理.

8. 应变能和位移模式几何非线性板壳单元

利用壳体应变分量^[24]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11} + (1/2)(e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2) + z K_{11} \\ \varepsilon_{22} &= e_{22} + (1/2)(e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2) + z K_{22} \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} + e_{21} + e_{11}e_{21} + e_{12}e_{22} + e_{13}e_{23} + z K_{12} \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

可以得到在 U.L. 坐标系中板壳单元在第 $N+1$ 个增量步中的应变能为

$$\begin{aligned} U &= \int_V \frac{1}{2} ({}^{N+1}\sigma_{11} {}^{N+1}\varepsilon_{11} + {}^{N+1}\sigma_{22} {}^{N+1}\varepsilon_{22} + {}^{N+1}\tau_{12} {}^{N+1}\varepsilon_{12}) dv \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V \left({}^{N+1}\varepsilon_{11}^2 + {}^{N+1}\varepsilon_{22}^2 + 2\nu {}^{N+1}\varepsilon_{11} {}^{N+1}\varepsilon_{22} + \frac{1-\nu}{2} {}^{N+1}\varepsilon_{12}^2 \right) dv \\ &= \bar{U}_0 + U_{11} + U_{12} + U_{131} + U_{132} + U_{133} + U_{21} + U_{22} + U_{231} + U_{232} + U_{233} \\ &\quad + U_{241} + U_{242} + U_{243} + U_{251} + U_{252} + U_{253} \end{aligned} \quad (8.2)$$

其中

$$\bar{U}_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V ({}^N \varepsilon_{11}^2 + {}^N \varepsilon_{22}^2 + 2\nu {}^N \varepsilon_{11} {}^N \varepsilon_{22} + \frac{1-\nu}{2} {}^N \varepsilon_{12}^2) dv \quad (\text{常数})$$

$$U_{11} = \int_V [{}^N \sigma_{11} e_{11} + {}^N \sigma_{22} e_{22} + {}^N \tau_{12} (e_{12} + e_{21})] dv \quad (8.3)$$

$$U_{12} = \int_A ({}^N M_{11} K_{11} + {}^N M_{22} K_{22} + {}^N M_{12} K_{12}) da \quad (8.4)$$

$$U_{131} = \frac{1}{2} \int_V [e_{13} \ e_{23}] \begin{bmatrix} {}^N \sigma_{11} & {}^N \tau_{12} \\ sym. & {}^N \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix} dv^{(1)} \quad (8.5)$$

$$U_{132} = \frac{1}{2} \int_V [e_{11} \ e_{21}] \begin{bmatrix} {}^N \sigma_{11} & {}^N \tau_{12} \\ sym. & {}^N \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{Bmatrix} dv \quad (8.6)$$

$$U_{133} = \int_V \frac{1}{2} [e_{12} \ e_{22}] \begin{bmatrix} {}^N \sigma_{11} & {}^N \tau_{12} \\ sym. & {}^N \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{Bmatrix} dv \quad (8.7)$$

$$U_{21} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V [e_{11} \ e_{22} \ e_{12} + e_{21}] \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 1 & 0 \\ sym. & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} (e_{11} \ e_{22} \ e_{12} + e_{21})^T dv \quad (8.8)$$

$$U_{22} = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \int_A [K_{11} \ K_{22} \ K_{12}] \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 1 & 0 \\ sym. & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} (K_{11} \ K_{22} \ K_{12})^T da \quad (8.9)$$

$$U_{231} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \int_V [e_{13} \ e_{23}] \begin{bmatrix} e_{13}^2 & e_{13} e_{23} \\ sym. & e_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix} dv \quad (8.10)$$

$$U_{232} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \int_V [e_{12} \ e_{22}] \begin{bmatrix} e_{12}^2 & e_{12} e_{22} \\ sym. & e_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{Bmatrix} dv \quad (8.11)$$

$$U_{233} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \int_V [e_{11} \ e_{21}] \begin{bmatrix} e_{11}^2 & e_{11} e_{21} \\ sym. & e_{21}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{Bmatrix} dv \quad (8.12)$$

$$U_{241} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V [e_{13} \ e_{23}] \begin{bmatrix} e_{11} + \nu e_{22} & \frac{1-\nu}{2} (e_{12} + e_{21}) \\ sym. & e_{22} + \nu e_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix} dv \quad (8.13)$$

$$U_{242} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V [e_{11} \ e_{21}] \begin{bmatrix} e_{11} + \nu e_{22} & \frac{1-\nu}{2} (e_{12} + e_{21}) \\ sym. & e_{22} + \nu e_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{Bmatrix} dv \quad (8.14)$$

$$U_{243} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V [e_{21} \ e_{22}] \begin{bmatrix} e_{11} + \nu e_{22} & \frac{1-\nu}{2} (e_{12} + e_{21}) \\ sym. & e_{22} + \nu e_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{Bmatrix} dv \quad (8.15)$$

1) 矩阵左下角的 *sym.* 表示该矩阵为对称矩阵, 下同。

$$U_{251} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V [e_{13} \ e_{23}] \begin{bmatrix} e_{11}^2 + \nu e_{21}^2 & (1-\nu)e_{11}e_{21} \\ sym. & e_{21}^2 + \nu e_{11}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix} dv \quad (8.16)$$

$$U_{252} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V [e_{13} \ e_{23}] \begin{bmatrix} e_{12}^2 + \nu e_{22}^2 & (1-\nu)e_{12}e_{22} \\ sym. & e_{22}^2 + \nu e_{12}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{13} \\ e_{23} \end{Bmatrix} dv \quad (8.17)$$

$$U_{253} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V [e_{12} \ e_{22}] \begin{bmatrix} e_{11}^2 + \nu e_{21}^2 & (1-\nu)e_{11}e_{21} \\ sym. & e_{21}^2 + \nu e_{11}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{Bmatrix} dv \quad (8.18)$$

由于 U_{11} 和 U_{12} 为应变和曲率增量 e_{ij}, K_{ij} 的线性函数, 它们只对单元节点力有贡献。为简化刚度的推导, 假设壳体膜向应变是中面转动分量的高阶小量, 这样, 壳体应变分量 (8.1) 可以简化为^[25]

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}e_{23}^2 + z K_{11} \quad (8.19)$$

$$\varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}e_{13}^2 + z K_{22} \quad (8.20)$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12} + e_{21} + e_{13}e_{23} + z K_{12} \quad (8.21)$$

按上述应变分量写出的壳体应变能表达式将比(8.2)少 $U_{132}, U_{133}, U_{232}, U_{233}, U_{242}, U_{243}, U_{251}, U_{252}$ 和 U_{253} 。对其余的应变能求导二次, 将得到 U.L. 坐标系下位移模式几何非线性板壳单元的切线刚度阵^[12]

$$K = K^P + K^b + K^G + \Delta K \quad (8.22)$$

其中

$$K^P = \frac{\partial^2 U_{21}}{\partial q^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_V [B_{11}^p \ B_{22}^p \ B_{12}^p + B_{21}^p] \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 1 & 0 \\ sym. & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{11}^p \\ B_{22}^p \\ B_{12}^p + B_{21}^p \end{Bmatrix} dv \quad (8.23)$$

$$K^b = \frac{\partial^2 U_{22}}{\partial q^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_A [B_{11}^b \ B_{22}^b \ B_{12}^b] \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 1 & 0 \\ sym. & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{11}^b \\ B_{22}^b \\ B_{12}^b \end{Bmatrix} da \quad (8.24)$$

$$K^G = \frac{\partial^2 U_{131}}{\partial q^2} = \int_V [B_{13} \ B_{23}] \begin{bmatrix} N\sigma_{11} & N\tau_{12} \\ sym. & N\sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{Bmatrix} dv \quad (\text{Cauchy 应力}) \quad (8.25)$$

$$\Delta K = \frac{\partial^2 U_{231}}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 U_{241}}{\partial q^2} = \Delta K_1 + \Delta K_2 + (\Delta K_2)^T + \Delta K_3 \quad (8.26)$$

$$\Delta K_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_V [B_{13} \ B_{23}] \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e_{13}^2 + \frac{1}{2}e_{23}^2 & e_{13}e_{23} \\ sym. & \frac{3}{2}e_{23}^2 + \frac{1}{2}e_{13}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{Bmatrix} dv \quad (8.27)$$

$$\Delta K_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_V [B_{13} \ B_{23}] \begin{bmatrix} e_{13}, \nu e_{13}, \frac{1-\nu}{2} e_{23} \\ \nu e_{23}, e_{23}, \frac{1-\nu}{2} e_{13} \end{bmatrix} (B_{11}^p \ B_{22}^p \ B_{12}^p + B_{21}^p)^T dv \quad (8.28)$$

$$\Delta K_3 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_V [B_{13} \ B_{23}] \begin{bmatrix} e_{11} + \nu e_{22} & \frac{1-\nu}{2} (e_{12} + e_{21}) \\ \text{sym.} & e_{22} + \nu e_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{Bmatrix} dv \quad (8.29)$$

上面的 B_{ij}^p , B_{ij}^b 和 B_{ij} 分别为膜向应变、曲率分量和转动分量的应变位移矩阵。 ΔK 中的各应变增量 e_{ij} 处理成迭代格式。 $K^p, K^b, K^G, \Delta K$ 分别为膜向刚度阵、弯曲刚度阵、初应力刚度阵和增量刚度阵。

类似地还可以推导出 T.L. 坐标系中板壳单元的切线刚度阵列式^[34]

$$K = K^p + K^b + K^G + K^D + \Delta K \quad (8.30)$$

其中 K^p, K^b 和 K^G 的表达式与前面的一样 (但应力改为第二类 Picla-Kirchhoff 应力); 初位移刚度阵 K^D 为

$$K^D = K^{D1} + K^{D2} + (K^{D2})^T \quad (8.31)$$

$$K^{D1} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_V [B_{13} \ B_{23}] \begin{bmatrix} N e_{13}^2 + \frac{1-\nu}{2} N e_{23}^2 & \frac{1+\nu}{2} N e_{13} N e_{23} \\ \text{sym.} & N e_{23}^2 + \frac{1-\nu}{2} N e_{13}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{Bmatrix} dv \quad (8.32)$$

$$K^{D2} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_V [B_{13} \ B_{23}] \begin{bmatrix} N e_{13} & \nu N e_{13} & \frac{1-\nu}{2} N e_{23} \\ \nu N e_{23} & N e_{23} & \frac{1-\nu}{2} N e_{13} \end{bmatrix} (B_{11}^p \ B_{22}^p \ B_{12}^p + B_{21}^p)^T dv \quad (8.33)$$

增量刚度阵 ΔK 为

$$\Delta K = \Delta K_1 + \Delta K_2 + (\Delta K_2)^T + \Delta K_3 \quad (8.34)$$

ΔK_1 的表达式即为 (8.27), ΔK_3 为

$$\Delta K_3 = \frac{E}{1-\nu^2} \int_V [B_{13} \ B_{23}] \begin{bmatrix} e_{11} + \nu e_{22} + N e_{13} e_{13} + \nu N e_{23} e_{23}, \\ \text{sym.} \\ \frac{1-\nu}{2} (e_{12} + e_{21} + N e_{23} e_{13} + N e_{13} e_{23}) \\ \nu e_{11} + e_{22} + \nu N e_{13} e_{13} + N e_{23} e_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{Bmatrix} dv \quad (8.35)$$

ΔK_2 为 (8.28) 和下式之和:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \int_V [B_{13} \ B_{23}] \begin{bmatrix} e_{13} N e_{13} + \frac{1-\nu}{2} N e_{23} e_{23}, & \nu e_{13} N e_{23} + \frac{1-\nu}{2} e_{23} N e_{13} \\ \nu e_{23} N e_{13} + \frac{1-\nu}{2} N e_{23} e_{13}, & e_{23} N e_{23} + \frac{1-\nu}{2} e_{13} N e_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{Bmatrix} dv$$

应注意, 增量刚度阵包含了高阶应变增量。忽略 ΔK , 在临界点附近将影响收敛性和精度, 尤其是对缺陷敏感的板壳问题,

9. 拟协调模式和杂交应力模式几何非线性有限元

拟协调模式几何非线性有限元在理论上不属于用非线性胡海昌-Washizu 广义变分原理构造。它不但放松了膜向应变的协调关系和曲率的协调关系，而且也放松了中曲面转角的协调关系^[12]：

$$\varepsilon^p = N^p \cdot \alpha^p = B^p \cdot q, \quad (\text{假设膜向应变}) \quad (9.1)$$

$$\varepsilon^b = N^b \cdot \alpha^b = B^b \cdot q, \quad (\text{假设曲率分量}) \quad (9.2)$$

$$\varepsilon^G = N^G \cdot \alpha^G = B^G \cdot q, \quad (\text{假设转角分量}) \quad (9.3)$$

其中 ε^p , ε^b 和 ε^G 分别为膜向应变、曲率分量和转角分量； N^p , N^b 和 N^G 为完备多项式矩阵， α 为广义参数。将上述三个协调方程乘上应力、弯矩类 Lagrange 乘子（它们可设为与相应的应变有相同的阶次）后合并入能量泛函，变分后即导出拟协调模式的几何非线性板壳单元。

这里要指出的是，转角分量协调关系的放松使初应力刚度阵的构造特别方便，而以往的位移模式和杂交应力模式的初应力刚度阵，则都是基于板壳中曲面挠度场的梯度场来构造的^[18]，这使初应力刚度阵的构造相对复杂。

在杂交应力模式几何非线性有限元的新列式中，不但放松了应力平衡条件，而且也采用了拟协调元中独立假设中面转角和初应力的做法。这样就可以把推导线性杂交应力元新列式的方法^[4]引入非线性杂交应力元新列式的推导中去，简化了单元列式，改善了单元性能。当单元的几何形状发生畸变时性能不会有大的蜕化^[18]。

但是，经过这样更新的杂交应力模式几何非线性有限元，还是未能把上节中提到的增量刚度阵 ΔK 包括在内^[18]，这使计算对缺陷敏感的屈曲问题会损失一些精度。而拟协调模式几何非线性有限元则包括了增量刚度阵 ΔK 。

杂交应力模式和协调模式的几何非线性板壳有限元能够做到 C^1 连续，这是比位移模式几何非线性板壳有限元好的地方。数值计算表明，为达到同样的计算精度，拟协调元和杂交应力元的个数只要位移元个数的 1/4 便可以了^[11,12]。

10. 薄壳非线性屈曲的有限元分析

梁板壳结构的非线性屈曲主要有分支型和极值型两种，见图 1(a), (b), (c)。另一种可能的形式是强度破坏，如图 1(d) 所示。结构可以分为无初始几何缺陷、无载荷偏心的理想完善结构和有初始缺陷、有载荷偏心的缺陷结构两类。同一个结构在无初始缺陷和有初始缺陷的情况下，有可能采取完全不同的屈曲形式。如有缺陷的轴压圆柱壳的屈曲形式是极值型

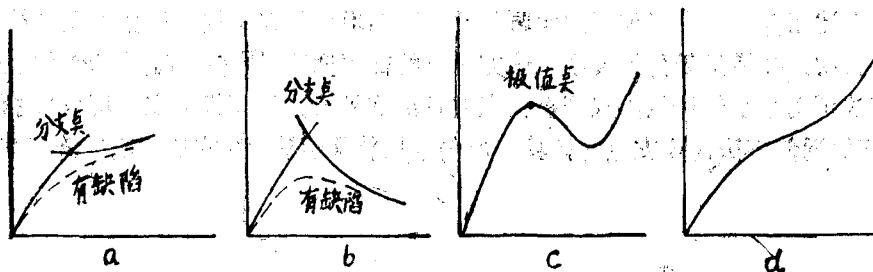


图 1

的,而无缺陷时则是分支型的,见图1(b)。有缺陷的轴压筒支板的屈曲形式缓慢地变成了强度问题,如图1(a)所示,而无缺陷时则是分支型的屈曲。

解析的或数值的屈曲分析,是为了跟踪临界点的出现,判定临界点的性质(分支型的或极值型的),计算临界力,越过临界点,后屈曲分析和缺陷分析等等。为此目的,在科技发展的不同阶段,提出了四个不同的稳定性理论^[35,26]:①经典线性理论,对板壳结构做了无矩和线性膜力-载荷响应的假定,通过解线性特征值问题,进行理想结构分支点临界力的计算,并获得相当广泛的应用;②为解决经典线性理论在轴压柱壳和筒支板屈曲临界力理论值和实验值的巨大差异,提出了非线性大挠度理论,对理想的和有缺陷的结构进行了大挠度后屈曲分析,搞清了问题的性质,解决了一些矛盾;③前屈曲一致理论则放弃了经典线性理论的假设,用非线性理论对理想结构进行前屈曲分析,求得了更准确的临界力,并与精确的实验结果相当一致;④Koiter初始后屈曲理论是将结构的缺陷敏感度与完善结构分支点的初始后屈曲性能相联系,计算由于初始缺陷所造成的实际结构临界力的降低。以上是四个弹性稳定性理论的特点。

非线性有限元是实现复杂结构非线性稳定性分析的有力工具。相应于经典线性理论的有限元列式可以归结为解一线性特征值问题:

$$(K^L + \lambda K^G) \delta u = 0 \quad (10.1)$$

其中 K^L , K^G 分别为线性刚度阵和初应力刚度阵; λ 为临界载荷参数; δu 为屈曲模式。

相应于前屈曲一致理论和后屈曲的非线性大挠度理论的增量有限元列式是^[27,34]

$$(K^P + K^b + K^G + K^D + \Delta K) \Delta u = P - R \quad (10.2)$$

其中 K^P , K^b , K^G , K^D 和 ΔK 分别为板壳的膜向刚度阵、弯曲刚度阵、初应力刚度阵、初位移刚度阵和包含高阶应变增量的增量刚度阵; P , R 和 Δu 为载荷、节点反力和增量位移。依据这个列式,可以计算结构的前屈曲、临界点和后屈曲的整个全过程。

在实现 Koiter 理论的有限元列式中还应加上由于初始缺陷引起的附加载荷等^[36]。对于 Koiter 理论不能处理的随机缺陷,则应把初始缺陷通过修改结构的几何参数引入平衡方程^[34]。

用有限元进行薄壳稳定性分析面临的问题是^[26]:①建立具有大挠度、初始缺陷、几何非线性、物理非线性和稳定性性态等各种因素的联合公式;②求解描述整个薄壳结构失稳性态的非线性方程组。要提出一系列的有效方法来跟踪临界点的出现,判断临界点的种类是分支点、极值点或中性平衡点,计算临界力,越过临界点和计算后屈曲路径,包括“下临界点”计算,乃至计算弹性跳跃等。

为完成上述任务,一个很重要的问题是设计自动增量加载系统,根据大变形结构刚度的变化,程序自动选择增量载荷的大小。这方面有特征刚度法^[36]和当前刚度参数法^[37]等,利用这些方法可用最小的增量步找到极值点并算出临界力。计算极值点也可以用摄动有限元^[2,27]和其他近似方法。分支点的计算一般仍采用特征值法^[10]或切线刚度阵行列式值外插法^[27]。

参 考 文 献

- 1 Turner J L, Clough R W, Martin H C, Topp L J. *J. A. S.*, **23**, 9 (1956): 805—825
- 2 卞学骥 (张相麟等译). 有限元法论文选. 国防工业出版社 (1980)
- 3 唐立民, 陈万吉, 刘迎曦. 大连工学院学报, **19**, 2 (1980): 19—36
- 4 Pian T H H, Chen D P. Alternative ways for formulation of hybrid stress elements. 中国大连杂交混合有限元研究讨论班论文 (1982)
- 5 Turner M J, et al. *J. A. S.*, **27**, 2 (1960): 97—106
- 6 Martin H C. In Proc. 1st Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., AFFDL-TR-66: 697—715
- 7 Brebbia C, Connor J. *J. E. M. Div. ASCE* (Apr. 1969): 463—483
- 8 Key S W, Beisinger Z E. In Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150: 667—709
- 9 Marcal P V. Brown University Engineering Report. ARPAE54 (Nov. 1967)
- 10 库克 (何穷, 程耿东译). 有限元的基本概念和应用, 国防工业出版社 (1982)
- 11 蒋和洋. 拟协调模式非线性有限元及其他. 大连工学院博士论文 (1984年6月)
- 12 蒋和洋. 计算结构力学及其应用, **1**, 2 (1984): 49—60
- 13 蒋和洋. 大连工学院学报, **20**, 增刊2 (1984)
- 14 Padlog J, et al. Bell Aerosystems Co., Report WPAADDTR 60—271 (1960)
- 15 Pope G. Royal Aeronautical Establishment, TR 65028 (1965)
- 16 Armen H. In Proc. 1st Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., AFFDL-TR-66: 1301—1339
- 17 蒋和洋. 四种应变度量条件的等值性. 工程力学, **2**, 2 (1986)
- 18 Pian T H H. Constraints for stresses in hybrid plate and shell elements. 教育部重点工科院校有限元讨论座谈会, 大连 (1985)
- 19 郭仲衡. 非线性弹性理论. 科学出版社 (1980)
- 20 陈至达. 有理力学. 中国矿业学院教材 (1982)
- 21 Atluri S N. Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analysis of finitely deformed solids, with application to plate and shells. 中国大连杂交混合有限元研究讨论班论文 (1982)
- 22 Bathe K. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **2**, 2 (1975): 353—386
- 23 Zienkiewicz O C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGRAN-HILL (1971)
- 24 诺沃日洛夫 B B (朱兆祥译). 非线性弹性力学基础. 科学出版社 (1958)
- 25 蒋和洋. 工程力学, **2**, 2 (1985): 1—10
- 26 周承倜. 薄壳弹塑性稳定性理论. 国防工业出版社 (1979)
- 27 Gallagher R H. 非线性有限元结构分析中的摄动法 (张圣坤译自“Computational Mechanics”) (1974)
- 28 蒋和洋. 上海力学, **7**, 1 (1986)
- 29 蒋和洋. 大连工学院学报, **23**, 2 (1984)
- 30 Owen D R J, et al. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press Limited. U. K., Chapter 5 & 9 (1980)
- 31 张圣坤. 上海力学, **1**, 2 (1980): 34—48
- 32 Bath K J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall (1982)
- 33 蒋和洋. 以 Jaumann 应力和右伸长张量为共轭应力应变变量的非线性广义变分原理. 上海力学, **8**, 4 (1987)
- 34 蒋和洋. 有初始缺陷的板壳的大挠度分析. 上海力学, **8**, 1 (1987)
- 35 中国科学院力学研究所. 加筋圆柱曲板与圆柱壳. 科学出版社 (1983)
- 36 蒋和洋. 工程力学, **2**, 3 (1985): 12—19
- 37 Bergan P G, et al. Use of the Current Stiffness Parameter in Solution of Nonlinear Problems in Energy Methods in Finite Element Analysis. Chapter 14. Edited by Glowinski R, Rodin E Y, Zienkiewicz O C.

SOME FUNDAMENTAL PROBLEMS OF NONLINEAR FINITE ELEMENT METHODS

Jiang He-yang Tang Li-min
(Dalian Institute of Technology)

Abstract Some fundamental problems of nonlinear finite elements are presented, which include some fundamental concepts on strain, stress and nonlinear equilibrium equation, and geometrical nonlinear finite elements of displacement model, hybrid model and quasi-conforming model based on different nonlinear generalized variational principles, and its application in buckling of shell.

Keywords nonlinear finite element; displacement-based finite element; hybrid stress element; quasi-conforming element; buckling

(上接第 131 页)

6. 结 论

从张量代数的观点, 构造了一大类塑性和其它非弹性本构方程, 它广泛地表示了适当地计及历史效应和一般初始和后继各向异性条件下非弹性应变率和应力率之间的一一对应关系。在本工作的后面几篇文章中将更进一步加以讨论并给出塑性本构方程取简单形式时的具体应用。

参 考 文 献

1. M. J. Sewell, A plastic flow rule at a yield vertex. *J. Mech. Phys. Solids* 22, 469 (1974).
2. W. Koiter, Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. *Q. Appl. Math.* 11, 350 (1953).
3. K. Itoh, New flow rule for an elastic-plastic solid based on KBW model with a view to lowering the buckling stress of plates or shells. *Tech. Rep. Tohoku Univ.* 44, 199 (1979).
4. S. Stören and J. R. Rice, Localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids* 23, 421 (1975).
5. J. Christoffersen and J. W. Hutchinson, A class of phenomenological corner theories of plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 27, 465 (1979).
6. C.-C. Wang, A new representation theorem for isotropic functions. Parts I and II. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 36, 166 (1970).
7. Y. Ohashi, Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metals. *Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ.* 34, 1-76 (1982).
8. J. W. Hutchinson and V. Tvergaard, Surface instabilities on statically strained plastic solids. *Int. J. Mech. Sci.* 22, 339 (1980).
9. Y. Ohashi, M. Tokuda and H. Yamashita, Effect of third invariant of stress deviator on plastic deformation of mild steel. *J. Mech. Phys. Solids* 23, 295 (1975).
10. K. C. Valanis, A theory of viscoplasticity without a yield surface. *Arch. Mech.* 23, 517 (1971).
11. N. Cristescu, *Dynamic Plasticity*. North-Holland, Amsterdam (1967).

范德鑫译自: *Int. J. Solids Structures*, 21, 11 (1985); 1101—1116

(段祝平校)