

我国运动稳定性研究的新进展*

舒 仲 周

(西南交通大学)

提要 综述了近年来我国运动稳定性(包括力学系统、控制系统、人口系统、生态系统和系统的稳定性)及其一般理论的研究进展。

关键词 运动稳定性; Ляпунов 函数; 力学系统的稳定性; 控制系统的稳定性; 人口系统的稳定性; 生态系统的稳定性; 大系统的稳定性

运动稳定性理论自从 A. M. Ляпунов 奠基以来, 已经有了近百年的历史, 国内外对它的研究不但历久未衰, 而且日益旺盛。这是因为它兼有两方面的优点: 广泛的应用性和严谨的理论性。它的应用范围已经从原来的力学系统扩展到控制系统、电力系统、化工系统、生态系统、经济系统等多个领域, 而其理论的研究也由原来的常微分方程发展到泛函微分方程、随机微分方程以及微分积分方程等多种学科。近三十年来, 对力学系统本身, Ляпунов 稳定理论从离散系统推广到连续系统(固体和流体)的研究, 也取得了很大进展, 国内外已有这方面的综述文献。限于篇幅, 本文没有涉及。

我国运动稳定性的研究是在50年代由秦元勋等开始的。当时研究者的人数和发表论文的篇数寥寥无几, 但是近年来有了大量的增加, 而且在几个主要方面都取得了可喜的甚至突出的成就。本文主要介绍以下几个方面(一般从1980开始):

1. 力学系统的稳定性(不包含流体、弹性体、但包含某些混合系统在内);
2. 控制系统的稳定性;
3. 人口系统、生态系统的稳定性;
4. 大系统的稳定性;
5. 稳定性的一般理论(主要是常微分方程的稳定理论)。

1. 力学系统的稳定性^[1-37]

力学系统的稳定性是运动稳定性的传统研究课题, 近年来由于航空、航天、机械工程等发展的需要, 我国的研究又有了更大的发展。

1.1 卫星姿态的稳定性 卫星的简化模型有刚性、挠性、空腔充液等。王照林^[1]对1979以前的研究情况有专题介绍。

* 孙训方推荐。

刚体卫星是把卫星作为刚体系统。对于无力矩非对称双自旋卫星, 杨海兴采用刘延柱^[8]方法, 不用欧拉方程, 直接由动量矩守恒定律导出一阶微分方程, 再用能量积分^[2]或渐近法^[3]判定拟永久转动的稳定性。对于单个刚体模型, 徐硕昌^[4]考虑了实际存在的完全耗散力矩, 得到了自由回转稳定的充要条件是转子呈扁形的结论, 并且指出: 对于 Explorer-1 号失稳原因的分析, M. H. 卡普兰只考虑转动能耗是不全面的, 应当加上平动耗散力矩所起的作用 (类似于 H. Г. Чертаев 对于炮弹失稳的分析)。

挠性卫星是刚体模型加上弹性附件 (阻尼装置、太阳帆板和天线等), 这是一种有限加无穷多自由度的混合系统。刘延柱^[5]将弹性附件简化成受弹簧和阻尼器约束的移动质点, 用逐次近似法判定了 n 体自旋卫星的姿态稳定性, 并且指出国外采用能量衰减法的不严格性。忻鼎亮、刘延柱^[6]用类似方法分析了带四根挠性杆的卫星。王照林等^[7]将弹性杆作为悬臂梁, 用假设的模式使分布参数离散化, 再用加权 V 函数解决了姿态稳定性问题。

1.2 充液腔体旋转运动的稳定性 卫星中的液体发动机、武器系统中的液体炸药以及导航和制导系统中的充液陀螺的应用, 促使了充液腔体旋转运动的研究。这也是一种有限加无穷多自由度的混合系统。

假设空腔中充有理想液体, 刘延柱^[8]改进了 Pfeiffer 方法 (1974), 对无力矩充液腔体直接用动量矩守恒原理代替欧拉方程, 导出解析形式的稳定判据。黄怡、刘延柱^[9]用类似方法分析了带充液腔的自旋卫星的稳定性。

徐硕昌、李骊、秦元勋、朱如曾、刘延柱、王照林等^[8,10-21]进一步研究了粘性液体的模型和 Columbus 问题, 一时形成热潮, 取得了突出的成绩。他们用 Navier-Stokes 方程和动量矩定理推出能量耗散关系式

$$\frac{d}{dt}(T+U) = -\phi$$

这里 T 是壳液动能, U 是重力势能和离心力势能之和, ϕ 为液体的粘滞耗散函数, 即

$$\phi = \frac{1}{2} \iiint_V \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 d\tau$$

式中 (v_1, v_2, v_3) 是腔内液体受扰后的流速, τ 是腔内体积, μ 为粘性系数。取

$$V = T + U$$

作为 Ляпунов 泛函, 根据 ϕ 的正定性即可得到各种平衡态 ($\phi=0$) 的稳定性判据。徐硕昌指出, 由于液体粘性总是存在的, 这样得到的长期稳定是真实的稳定。这是利用能量构造 Ляпунов 泛函的又一成功的例子。

利用这个泛函 V , 徐硕昌^[10]研究了小扰动情形, 李骊研究了小扰动^[11]和大扰动^[12]。秦元勋等^[13]对此作了更精确的论述。朱如曾^[14]研究了各种 Movchan 距离的稳定性。徐硕昌^[15]采用卡尔丹角使其一个循环坐标分离, 得到了轴对称充液腔体大扰动自由转动的稳定性判据, 并和戴世强^[16]进一步考虑了倒立和下悬两种情形。最近朱如曾、吴汉明^[17]研究了对称充液腔体绕重心的平衡转动在大扰动下的稳定, 所得结果比茹科夫斯基定理精确得多。

刘延柱^[8]利用边界层概念, 假设附着于器壁的粘性薄层包围无粘性的理想流体, 简化了计算。王照林、杜重平^[18]研究了更为复杂的 n 个全充液偏置贮箱系统, 在液体粘性很小

的假设下只作边界层修正,给出了自旋稳定性的条件。

和充液腔体旋转运动密切相关的是所谓 Columbus 问题。这是 Kelvin 提出的。徐硕昌^[15]用前面所说的充液腔体定点运动的模型首先讨论了这个问题。朱如曾^[16]进一步采用平面约束模型(比前者多了两个自由度),并假设生鸡蛋和平面的接触点无摩擦,研究了各种 Movchan 距离的稳定性。最近又用算子谱理论作了进一步分析,从而推广了算子势论^[20]。李骊、林荣信^[21]考虑了接触点的摩擦,得到了大范围稳定条件。

1.3 陀螺力系统的稳定性 这一系统指的是陀螺仪或者存在陀螺力的系统。

周恒^[22]研究了二自由度气体动压轴承转子陀螺仪的稳定性。陈滨^[23]对陀螺稳定平台的非线性失稳与抖振作了分析,并提出防止这种现象产生的技术方案。王洪兰^[24]研究了在地球自转影响下悬挂式陀螺仪受到小冲击后具有恒定漂移的可能性。

如果系统(例如双自旋卫星)的某些 Poincare 稳定系数为零,可能出现不稳定情形。王照林^[25]得到了一个不稳定定理。他和黄士涛^[26]用加权 V 函数判定有陀螺力和约束阻尼存在的系统稳定性。徐业宜^[27]对于有循环坐标的系统先降阶后用能量积分给出了稳定判据。刘延柱^[28]根据奇点理论全面分析了陀螺体永久转动轴的个数和位置以及永久转动的稳定性和分叉现象。张光枢^[29]用 V 函数证明了非线性陀螺系统的稳定条件。

关于对称刚体在粗糙水平面上摇摆或旋转所出现的有趣现象,刘延柱^[30]通过稳定性的分析作出了满意的解答。

1.4 粒子及质点运动的稳定性 朱如曾^[31]研究了强聚焦加速器中带电粒子横向运动的稳定性,并对一般 n 维周期系数线性系统给出了由转移矩阵的特征值表示的稳定性充要条件。罗诗裕^[32]用 Mathieu 方程的一阶稳定区分析了回旋加速器中的粒子穿越 $\nu_z = 1/2$ 共振线的动力行为,还研究了 N 度对称径向扇回旋加速器的粒子稳定性^[33]。刘先志^[34]分析了各种绕铅垂轴旋转导轨上滑动质点的稳定条件。

1.5 碰撞振动的稳定性 利用碰撞振动的机械很多,写出的运动微分方程不是连续的,用 Ляпунов 经典方法无法判定它的稳定性。舒仲周和谢建华^[35]、圣小珍^[36]通过点映射解决了这个问题,指出我国有两种成批生产的振动落砂机,一是不稳定的,一是渐近稳定的^[35],并指出双质体的渐近稳定区域远远大于单质体的,从而前者参数优化的范围也大大超过后者^[36]。段志善、闻邦椿^[37]对打夯机略去了一个自由度,用类似方法判定了它的稳定性。

2. 控制系统的稳定性^[38-56]

稳定性是控制系统必需具备的一种基本品质,近年来我国集中于 А.И.Лурье 控制系统绝对稳定性的研究。

2.1 直接控制系统的绝对稳定性 直接控制系统的微分方程是

$$\dot{x} = Ax + bf(\sigma), \quad \sigma = c^T x \quad (2.1)$$

这里 σ 为控制信号, $f(\sigma)$ 具有任意性, $0 < \sigma f(\sigma) < \infty (\sigma \neq 0)$, $f(0) = 0$, 又矩阵 A 是稳定的。(2.1)的阶数为 n , 变量却有 $n+1$ 个,这就给绝对稳定性的解决带来了麻烦。Лурье, И.Г.Малкин, А.М.Летов 用正定函数

$$V = x^T P x + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma \quad (2.2)$$

作为 Ляпунов 函数, 给这个问题的研究开辟了一个正确的途径。但他们误将 σ 与 x 看成 $n+1$ 个彼此独立的变量, 要求 \dot{V} 在 $n+1$ 维空间 (x, f) 上为负定, 所得稳定性判据就在事实上成了空集。M.A. Анзермен 和 Ф.Р. Гантмахер 改正了这点 (1963) 而采用所谓 s 方法。但所得准则除了包含未知矩阵外, 还包含另一个不确定的参数在内。赵素霞^[38] 注意到只需要 \dot{V} 于 $f=1$ 时在 (x) 的子空间 $c^T x=0$ 上非正即可, 首次得到了用 (2.2) 型 V 函数判别系统 (2.1) 为绝对稳定的充要准则, 含有 x ; 朱思铭^[39] 得到了一个等价的准则, 不含 x , 从而解决了一个多年没有解决的问题, 成绩是突出的。

但在赵素霞或朱思铭的准则中含有未知的常矩阵, 而准则本身没有提供任何确定它的方法, 因此离问题的彻底解决还有很大的距离。以后的研究致力于如何减少待定的常数, 最好能得到不含待定常数可以直接使用的显式准则。要从事这一研究工作, 一般需对 A 加以限制。王国荣假设^[40,41] $A^T = A$ 。李森林^[42] 假设 $A b c^T = b c^T A$, 不用 (2.2) 型 V , 而用变换 $x = e^{A'} y$ 得到了若干充分与必要条件, 并且指出这些条件不是用 (2.2) 型的 V 所能得到的。舒仲周、裘晓钢^[43] 假设 $A^T A = A A^T$, 得到的准则最多只有两个整数待定。

廖晓昕^[44] 从另一角度研究了系统 (2.1) 为绝对稳定的充要条件, 那就是将它归之于部分变元绝对稳定性的判定, 后一新概念是由他首先提出的。

2.2 间接系统的绝对稳定性 对于间接系统 (矩阵 A 含有一个零特征根, 其他特征根具有负实部), Лурье 用类似于 (2.2) 型的 V 函数早已得到一个准则 (1952), 也含有待定的矩阵。姜福德^[45] 应用李森林、廖晓昕^[110] 的分离变量型的 V 得到了一些简便准则。

2.3 几种标准型的绝对稳定性 由于 Лурье 控制系统的一般形式难度过大, 早在 50 年代 Лурье 本人提出第一标准型, Листов 提出第二标准型, 它们都是 Лурье 系统的特殊情况, 而且定义在复数域内。赵素霞^[38] 应用她的一般准则得到了第一标准型的若干显式准则。廖晓昕^[46] 应用他推广的分离变量型的 V 函数得到了第一第二标准型的若干显式准则, 其中关于飞机纵向运动稳定性的判据包含 A.N. Michel 的判据 (1974) 在内。裘晓钢、舒仲周^[47] 利用更复杂的 V 函数所得准则应用于这个问题又包含廖晓昕的准则在内。裘晓钢^[48] 还得到了第一标准型的若干显式准则。

最近舒仲周^[49] 提出了一种新的简化形式

$$\dot{z} = Bz + h\sigma; \quad \dot{\sigma} = g^T z + \alpha\sigma - \rho f(\sigma) \quad (\rho = -c^T b \neq 0) \quad (2.3)$$

当 $c^T b \neq 0$ 时 (2.3) 和 Лурье 系统在稳定性上等价, 因此就稳定性说两者几乎相同。对于 A 具有一个实特征根 $\lambda_1 \leq 0$ (其他 λ_i 均具有负实部) 的重要情况 (这是最常见的控制系统) 得到了一个一般性准则, 是研究第一第二标准型所不能得到的; 还得了若干显式准则, 说明了 (2.3) 型的优点所在。

2.4 控制系统绝对稳定性的 Popov 频率法 这是一个和直接法平行的方法。谢惠民^[50] 在其专著中介绍了他自己的研究成果。对于稍加限制的三阶间接系统, 他得到了绝对稳定的充要条件^[51]。至于三阶直接系统还没有完整的结论, 三阶以上的就更不必说了。由此即可看出绝对稳定性问题的复杂程度。

2.5 广义 Лурье 控制系统的绝对稳定性 朱思铭^[52] 考虑了带多个执行机件有多个控制信号 σ_i 的直接系统。斯力更^[53] 分析了时滞间接系统, 用的是类似于 (2.2) 型的 V 函

数。阮炯^[64]研究了Лурье泛函型,对直接系统采用的Ляпунов泛函是(2.2)型V函数的推广,而对间接系统采取的则是Popov型V函数的推广。朱思铭^[65]也研究了这种系统。

2.6 其他控制系统的稳定性 贺建勋^[66]研究了控制系统的最优全局稳定控制,既保证性能指标取最优值,也保证闭回路为全局渐近稳定,得到了充要条件。

3. 人口系统、生态系统的稳定性^[67-73]

对这两种系统的研究,我国是在80年代兴起的。两种系统在本质上是不同的。

3.1 人口系统的稳定性 一个社会的人口状态变化方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} &= -\mu(r,t)p + f(r,t), \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq r < r_m \\ p(r, t_0) &= p_0(r), \quad p(0, t) = \phi(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

这里 $p = p(r, t)$ 为年龄密度函数, $\mu(r, t)$ 为死亡率, $\phi(t)$ 为婴儿绝对出生率, $f(r, t)$ 为人口迁移率。以(3.1)为根据可以作出人口发展的预测和控制。宋健、于景元^[67]首先研究了人口的稳定条件,这是制定人口政策的重要依据。他们假定(3.1)是定常的、无迁移的,用拉普拉斯变换导出含参数 λ 的常微分方程及其初始条件,首次求得了使初始人口稳定的妇女临界生育率,从而证实了一个长期的猜想。随后,陈任昭^[68]扩大到非定常无迁移情形,会同高夯^[69]又扩大到非定常有迁移(由农村流入城市)的情形,是嘉鸿^[60]研究了无迁移分胎模型,还研究了非定常带迁移的分胎模型^[61],都推广了宋健、于景元的结论。胡保生、王浣尘^[62]改进了宋、于提出的妇女临界生育率的离散模型。王浣尘^[63]研究了非定常无迁移的离散模型,还研究了连续型(3.1)的 $p(r, t)$ 的稳定性^[64]。

3.2 生态系统的稳定性 生态系统的竞争与互助一般采用以下数学模型:

$$\dot{x} = \text{diag}\{x\}f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \quad (3.2)$$

这里 x_i 是种群总数或密度。对于正平衡点 $x^* > 0$ 的稳定性,一般取变换 $y_i = \ln(x_i/x_i^*)$,然后用正定函数

$$V(y) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^* (e^{y_i} - y_i - 1) \quad (3.3)$$

(p_i 为待定正数)予以判定。

当 $f_i(x) = r_i + \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_j)$, (3.2)称为Volterra型。这里 r_i 为内禀增长率, $f_{ij}(x_j)$

表示种群 j 对种群 i 的作用。周之铭^[65]用(3.3)型V和图论得到若干渐近稳定的条件。张炳根^[66]用同样的V得到食物链系统(大鱼吃小鱼,小鱼吃虾子)全局稳定的条件。

如果考虑的对象只有两个种群,则只要在坐标平面上用定性方法分析。陈兰荪、井竹君^[67]根据Poincare-Bendixon定理和张芷芬定理判定了Rosenzweig-MacArthur型的全局稳定和极限环的稳定。陈均平、张洪德^[68]用类似方法研究了脊椎动物捕食者适用的Holling III型,得到了各种情况的稳定判据。王辅俊^[69]考虑了捕猎或放牧对生态系统稳定性的影响。

姚勇、乔勇^[70]研究了两类捕食物种竞争同一被食物种的Hsu型1978()。杨守仁^[71]考虑了周期系数的模型,用的是平均方程组。王寿松^[72]推广了Hsu-Harrison模型(1979),

用微分矩法构造了 V 函数。

由于种群间的相互影响和过去的种群密度有关，徐远通^[78]研究了带时滞的生态系统的稳定性，并举了食物链的例子。

4. 大系统的稳定性^[74-104]

大系统指的是规模庞大、结构复杂、功能众多的系统。对它的研究是近20年来兴起的。这是科学技术和生产实践向综合发展的重要标志。由于大系统的维数很高，用常规方法求解稳定性是不实际的。即便是对于已有解法的常系数线性系统，计算也太慢，必需另寻出路。如何使其能解而且计算实际可行，是大系统需要解决的问题。

对于大系统，一般采用分解集结法。第一步分解，即按物理性质或数学结构先将大系统分解成若干子系统

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i) + \sum_{j=1}^r f_{ij}(t, x_j) \quad (i=1, \dots, r) \quad (4.1)$$

这里 x_i 是 n_i 维向量， $n_1 + \dots + n_r = n$ 。假设孤立子系统

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i) \quad (i=1, \dots, r) \quad (4.2)$$

是渐近稳定的(否则进行镇定使其为渐近稳定)。显然，只要每个孤立子系统的稳定强度比较大，而内联项 $f_{ij}(t, x_j)$ 的关联强度比较弱，整个大系统也会是渐近稳定的。第二步集结，其目的就在于综合比较这两种强度。通过这一步求得使大系统稳定，内联项必需满足的条件。集结的方法有两种：一是用向量 V 函数，一是用加权 V 函数(标量)。最近在我国还出现了一个新的方法：分块迭代法，是廖晓昕^[87]首创的。

4.1 向量 V 函数法 这是 B.M. Матросов 和 R. Bellman 同时提出的(1962)，并由 F.N. Bailey 首先应用于大系统(1965)。

设孤立子系统(4.2)的 Ляпунов 函数为 $v_i (i=1, \dots, r)$ ，以它们为分量组成向量 V 。然后通过大系统(4.1)构造比较方程(即集结方程)，由比较方程的稳定性判定大系统的稳定性。这一方法的实质是使高维(n)系统降为低维(r)系统。

由 n 降到 r ，过去只降一次。高为炳^[74]提出多次降低的方法：每一次都把那些具有最小强相联(单回路)的部分作为孤立子系统，从而把大系统分解为多层结构，最高层是简相联的(不含有向环)。在由向量 V 构造比较方程的过程中，要用到稳定强度和关联强度并进行比较。过去常取稳定强度的某个易取的下界和关联强度的某个易取的上界，所得稳定条件过于保守，高为炳^[74, 76]改取下确界和上确界，并用这一方法研究了含有参数系统的粗壮稳定性^[76]。他还用矩阵的测度分析了线性非定常大系统的稳定性^[77]。田秀恭^[78]也考虑了这种系统。王慕秋、田秀恭^[79]对孤立子系统用二次型 v_i 研究了变系数系统(例如变系数 Лурье 系统)。王慕秋、王联^[80]还将这种 v_i 用于更广一类非定常非线性系统。刘永清、蔡广基^[81, 82]把向量 V 函数用于化工大系统。许钟灵^[83]将它用在常时滞系统。

以上[74—83]所用的比较方程都是常系数线性的，即 $\dot{u} = Au (u \geq 0)$ 。它的零解稳定性根据著名的 Котелянский 准则即可判定。但得到的只是指数稳定。对于非指数稳定的大系统，它就无能为力了。这时需要应用非线性比较方程

$$\dot{u} = g(u) \quad (u \geq 0) \quad (4.3)$$

但是直到目前,进行这方面研究的仍然极少。

如果采用非线性比较方程(4.3),首先需要解决(4.3)本身的稳定性如何判定的问题。舒仲周^[84]在很宽的条件下(解可以不满足唯一性)得到了(4.3)的零解为渐近稳定(全局稳定)的充要性准则,包含了Оболенский准则(1979)在内;还得到了 $g(u)$ 为 c_1 类函数的充分性准则,后者和线性比较方程的Котелянский准则具有对应的形式。

胡宣达^[85]用确定性的常微分比较方程判定了随机大系统的稳定性。

4.2 加权 V 函数(标量)法 这一方法起源于Чебаев的首次积分线性组合法,W.E.Thompson和Michel等发展成为一般 v_i 的线性组合,即 $V = C_1 v_1 + \dots + C_n v_n$ 。利用这一方法需要判定 \dot{V} 的负定性,对于大系统说仍是困难的,这一点不如前一方法(向量 V 函数法)。但所得参数稳定区一般大于前一方法所得的(两者一般互不包含,举例即可证实),因此仍被经常采用。王照林^[87]以及黄土涛等^[7,88]对Lagrange力学系统(包括含有分布参数的),先作一个线性变换,再应用加权 V 函数获得了很好的结果。刘永清、宋中昆^[88,89]把这种 V 函数用于有滞后的线性系统;陈潮填^[90]用于化工大系统;刘永清^[91]用于大型线性控制系统的镇定问题,并同宋中昆^[92]将它用于多台电轴系统。张泽绵、张鸿亮^[93]、徐道义^[94]、梁春龙^[95]用于线性非正常大系统。张鸿亮^[96]还将它推广应用于随机大系统,对孤立子系统作出随机 v_i 函数,然后求和判定了大系统的指数稳定。以上的些应用都取得了成功。

4.3 离散大系统的稳定性 有许多稳定性问题(如1.5碰撞振动的稳定性)需要用时间离散系统来解决。这一系统的线性形式是

$$x(n+1) = P x(n) \quad (4.4)$$

这里 P 为常矩阵。对于阶数很高的大型离散系统同样可以采取分解集结方法。刘永清^[98]用加权 V 函数研究了(4.4)的零解渐近稳定性。王慕秋等^[99]作了进一步研究,对孤立子系统采用二次型 v_i ,并证明了二次型 v_i 的存在定理。后来王慕秋、王联^[100]改用 $v_i = \|x_i\|$,取得了更好的结果。冯恩波^[101]证明了离散型的比较原理。徐道义^[102]利用离散型比较方程得到(4.4)的零解稳定条件。王联、王慕秋^[103]、刘永清、刘金宪^[104]还用它研究了 P 为时变的稳定性。

5. 运动稳定性的一般理论^[105-160]

我国1979年前关于运动稳定性的一般理论的研究见秦元勋、王慕秋、王联^[105]的专著《运动稳定性理论与应用》和朱思铭、叶思源的综述^[106]《近十多年来Ляпунов稳定性理论的发展》。本节分四个方面介绍我国近几年研究的新进展。

5.1 稳定性的基本定理 对稳定性基本定理的推广一般从两个方面进行:放宽 V 函数或者削弱 \dot{V} 。

关于稳定性定理:赖定文^[107]对驻定系统放宽了 $\dot{V}(x)$,只要求 $V(x)$ 取可列正值时 $\dot{V}(x)$ 非正;实质上是只要求在原点的任一邻域内存在不变集。张宗达^[108]将它推广到非驻定系统。舒仲周、谢建华^[109]对非驻定系统放宽了 $V(t,x)$,它可以是变号的,并应用于保守力学系统。

关于渐近稳定定理:对于驻定系统,李森林早在1964年对分离变量的 $V(x)$ 取消了需为

c_1 类的限制, 只要求为分段线性的。廖晓昕^[110]进一步放宽, 取消了其中线性的要求, 并对某些类型的驻定系统推出了若干定理^[111]。对于非驻定系统, 早在1962年, Matrosov 放宽了 $\dot{V}(t, x)$ 为负定的限制, 只要求 $\dot{V}(t, x)$ 非正; 1972年 L.Salvadori 取消了 $V(t, x)$ 具有无穷小上界的要求, 从而得到了非均匀的渐近稳定。他们都多了一个辅助函数 $W(t, x)$ 。对于他们的结果沈家骥^[112]作了改进和推广。陈绍著^[113]进一步放宽了 $\dot{V}(t, x)$, 它可以是变号函数, 同时削弱了 $W(t, x)$ 的要求, 推广了Matrosov定理以及Л.Хатвани定理(1975), 并对渐近稳定域作了估计^[114]。阎醒民^[115]推广了Salvadori定理, 并从另一方面推广了Marachkov定理。

关于不稳定定理及其他: К.П.Персидский, J.L.Massera 和 M.Laloy 等将不稳定概念进行分解, 采用扇形集和推出集相结合的方法, 极大地推广了不稳定定理(1973), 舒仲周^[116, 117]改进了扇形集的定义, 并提出推入集这一新概念, 得到了扇形渐近稳定的若干定理, 并应用于非线性系统高阶奇点的性质分析^[118], 也可用于生态系统非正平衡点的稳定研究。

5.2 一至四阶系统的稳定性 比较彻底地解决低阶微分方程的稳定性是非常重要的, 也是很困难的。

关于一阶系统: 康德^[119]研究了标量比较方程的稳定性。

关于二阶系统: 近年来我国在具有变系数的二阶线性系统的研究上取得了突出的成绩。麦结华^[120]研究了在力学、物理、天文学中经常遇到的Hill方程的绝对稳定区, 得到了一系列简便的判据。对于更广的方程 $\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$, 黄文纲^[121]避免采取常用的非等价变换, 直接研究这个方程。他使用另一些变换技巧和 V 函数, 得到了各种类型的稳定性条件。秦元勋、郑力纲^[122]研究了同一种方程。他们构造了一个分段常数微分方程, 用它的周期解作为 V 函数(与 t 无关)的等值线, 分别得到了零解为渐近稳定、稳定和不安定的条件。

对于二阶驻定系统, 肖双发^[123, 124]用定性分析得到了某一类系统为全局稳定的充要条件。李曾淑、王慕秋^[125]对Lienard方程得到全局稳定的较好结果。杨世藩^[126]分析了 $n=3$ 情形下的V.I. Arnold问题高次奇点的稳定性。

关于三阶系统: 王联、王慕秋^[127, 128]用类比法构造 V 函数得到了一类三阶驻定系统全局稳定的条件。王荣良^[129]采用同样方法分析了一类三阶非驻定系统周期解的稳定性。

关于四阶系统: 卢亭鹤、金均^[130]构造了一个复杂的 V 函数, 并应用陈绍著^[113]的一个定理得到了一类非驻定四阶系统为全局稳定的判据。

5.3 驻定系统的稳定性 这方面比较集中于深入研究常系数线性系统的问题。因为这种研究不但有利于使计算简化, 而且还是解决某些非线性问题(例如Лурье问题)的一个基础或手段。

对于Hurwitz多项式, 继谢绪恺(1957)聂义勇(1973)之后, 汪家诤^[131]用增广图示研究了常数项的稳定区确定法。徐道义^[132]给出右半复平面无零点的充要条件。陈秀东^[133]用递推公式得到了复常系数稳定性的充要判据。范弘毅、陈秀东^[134]进一步给出了无除法运算的简捷判据。

屠伯坝、李君如^[135]研究了广义 Ляпунов 矩阵方程的解, 得到一种代数表达式. 由于利用了 Hessenberg 阵, 只需计算 n 个未知量, 其他 $n^2 - n$ 个未知量几乎垂手可得, 为构造二次型 V 函数提供了简便的方法.

廖晓昕^[110]用分离变量的 V 函数研究了矩阵的稳定度和非奇异度, 还得到了复阵特征值分布的一个更一般的结果^[136]. 徐道义^[137]就线性比较方程研究了区间矩阵的稳定条件.

黄力民^[138]分析了线性系统部分变元的稳定性, 得到了渐近稳定的充要条件.

5.4 非驻定系统的稳定性 这种系统的稳定性一般不能根据线性项的系数矩阵 $A(t)$ 的特征根来判别, 可以举出许多例子证实这点. 李明曙^[139]用线性方程的基解组给出了这些例子的公式化构造法, 说明了非驻定系统的复杂性. 但在某些限制条件下, 又是可以利用这些特征根的. 秦元勋等^[140]对具有缓变系数的动力系统, 用系数冻结法给出了这些条件.

何崇佑^[141]研究了均匀概周期系统, 用比较原理得到了全局等度(均匀)渐近稳定的一些结果, 还得到了存在唯一概周期解的充分条件.

李骊^[142]利用 Jacobi 因子和向量场散度得到了驻定和非驻定系统不稳定条件. 王松寿、徐远通^[143]研究了微分矩方法, 给出了一系列 V 函数的构造定理. 张书颀^[144]利用线性非驻定系统的基解组给出了该系统在经常扰动下完全稳定的条件, 并给出了基解组的计算方法^[145]. 康德^[146]利用不动点原理分析了动力系统按分量的稳定性.

5.4 离散系统的稳定性 对离散线性系统(4.4)的系数矩阵 P , 徐道义^[147]用其特征多项式的系数和给出了稳定条件, 包含了 Berger 的结果(1982)在内. 梁法驯^[148]采用系数的二次和得到了更好的结果. 赵俊三^[149]将构造二次型 V 函数的 Барбащин 公式移植到离散系统(4.4). 梁永富^[150]对部分变元的稳定性给出了比较方程, 用后者的通常稳定性判定前者.

参 考 文 献

- 1 王照林. 力学进展, 4 (1980): 15—30
- 2 杨海兴. 力学学报, 1 (1986): 65—73
- 3 杨海兴. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集(1986): 105
- 4 徐硕昌. 力学学报, 2 (1986): 152—158
- 5 刘延柱. 上海交通大学学报, 1 (1981): 121—130
- 6 忻鼎亮, 刘延柱. 上海交通大学学报, 4 (1982): 13—24
- 7 王照林, 刘守圭, 管晔辉, 黄士涛. 空间科学学报, 2 (1983): 81—102
- 8 刘延柱. 上海交通大学学报, 5 (1984): 1—8
- 9 黄怡, 刘延柱. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集(1986): 106
- 10 徐硕昌. 中国科学A辑, 3 (1982): 254—264
- 11 李骊. 应用数学和力学, 5 (1983): 609—620
- 12 李骊. 应用数学和力学, 6 (1983): 771—779
- 13 秦元勋, 管克英, 李骊. 科学通报, 4 (1984): 198—201
- 14 朱如曾. 中国科学A辑, 7 (1984): 624—633
- 15 徐硕昌. 中国科学A辑, 11 (1984): 1017—1024
- 16 徐硕昌, 戴世强. 应用数学和力学, 7 (1985): 573—582
- 17 朱如曾, 吴汉明. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集(1986): 109
- 18 王照林, 邓重平. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集(1986): 130
- 19 朱如曾. 科学通报, 17 (1985): 1305—1308
- 20 朱如曾. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集(1986): 107
- 21 李骊, 林荣信. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集(1986): 108
- 22 周恒. 力学学报, 1 (1979): 83—87

- 23 陈滨. 北京大学学报, 2 (1979): 87—96
- 24 王洪兰. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 113
- 25 王照林. 力学学报, 3 (1978): 171—176
- 26 王照林, 黄士涛. 力学学报, 5 (1983): 463—468
- 27 徐业宜. 应用数学和力学, 5 (1985): 447—454
- 28 刘延柱. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 101
- 29 张光权. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 112
- 30 Liu Yan-Zhu (刘延柱). *Z. Angew. Math. u Mech.*, 3 (1985): 180—183
- 31 朱如曾. 力学学报, 4 (1980): 379—385
- 32 罗诗裕. 应用数学和力学, 4 (1982): 555—561
- 33 罗诗裕. 应用数学和力学, 6 (1985): 499—506
- 34 刘先志. 应用数学和力学, 1 (1983): 1—40
- 35 舒仲周, 谢建华. 西南交通大学学报, 3 (1985): 14—25
- 36 Shu Zhong-zhou (舒仲周), Sheng Xiao-zhen (圣小珍). *Proc. of International Conference on Mechanical Dynamics* (1987, Shenyang): 450—454
- 37 段志善, 闻邦椿. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 110
- 38 赵素霞. 数学学报, 4 (1979): 404—419
- 39 朱思铭. 中山大学学报, 3 (1979): 20—28
- 40 王国荣. 湖南大学学报, 3 (1981): 82—93
- 41 王国荣. 湖南大学学报, 3 (1982): 38—47
- 42 李森林. 应用数学学报, 4 (1983): 458—467
- 43 Shu Zhong-zhou (舒仲周), Qiu Xiao-gang (裘晓钢). *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics*, Shanghai, Science Press, Beijing, China (1985): 1103—1107
- 44 廖晓昕. 数学物理学报, 3 (1985): 329—336
- 45 姜福德. 山东海洋学院学报, 4 (1981): 1—14
- 46 廖晓昕. 应用数学和力学, 2 (1982): 235—247
- 47 裘晓钢, 舒仲周. 应用数学和力学, 9 (1986): 785—800
- 48 裘晓钢. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 126
- 49 舒仲周. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 125
- 50 谢惠民. 绝对稳定性理论与应用. 科学出版社, 北京 (1986)
- 51 谢惠民. 中国科学A辑, 9 (1981): 1165—1175
- 52 朱思铭. 中山大学学报, 3 (1981): 1—8
- 53 斯力更. 科学通报, 9 (1982): 518—522
- 54 阮炯. 数学年刊A, 1 (1983): 47—56
- 55 朱思铭. 中山大学学报, 4 (1983): 43—52
- 56 贺建勋. 厦门大学学报, 4 (1980): 1—13
- 57 宋健, 于景元. 自动化学报, 1 (1981): 1—12
- 58 陈任昭. 科学通报, 6 (1985): 410—414
- 59 陈任昭, 高芬. 系统科学与数学, 4 (1986): 314—318
- 60 是嘉鸿. 自动化学报, 2 (1985): 202—205
- 61 是嘉鸿. 科学通报, 1 (1986): 77
- 62 胡保生, 王浣尘. 自动化学报, 1 (1983): 50—53
- 63 王浣尘. 自动化学报, 3 (1984): 220—227
- 64 王浣尘. 上海交通大学学报, 6 (1984): 107—114
- 65 周之铭. 中山大学学报, 3 (1983): 10—15
- 66 张炳根. 应用数学学报, 2 (1983): 236—239
- 67 陈兰荪, 井竹君. 科学通报, 9 (1984): 521—523
- 68 陈均平, 张洪德. 应用数学和力学, 1 (1986): 73—80
- 69 王辅俊. 应用数学和力学, 11 (1985): 1035—1041
- 70 姚勇, 乔勇. 上海交大科技, 3 (1986): 122—131
- 71 杨守仁. 山东大学学报, 3 (1984): 60—68
- 72 王寿松. 中山大学学报, 4 (1983): 53—59
- 73 徐远通. 中山大学学报, 4 (1986): 96—101
- 74 高为炳. 中国科学A辑, 1 (1982): 81—88
- 75 高为炳. 自动化学报, 2 (1984): 113—120
- 76 高为炳. 自动化学报, 3 (1986): 221—228

- 77 高为炳. 控制理论与应用, 1 (1986): 16-24
- 78 田秀恭. 南开大学学报, 1 (1982): 33-47
- 79 王慕秋, 田秀恭. 应用数学学报, 4 (1983): 494-504
- 80 王慕秋, 王联. 科学通报, 3 (1984): 133-135
- 81 蔡广基. 华南工学院学报, 3 (1984): 94-105
- 82 刘永清. 控制理论与应用, 3 (1986): 13-23
- 83 许钟灵. 系统科学与数学, 3 (1986): 221-229
- 84 舒仲周. 数学年刊, 7A, 6 (1986): 676-684
- 85 胡宣达. 自动化学报, 1 (1982): 78-80
- 86 王照林, 黄士涛. 清华大学学报, 2 (1983): 23-34
- 87 王照林. 力学进展, 2 (1985): 137-146
- 88 刘永清, 宋中昆. 华南工学院学报, 2 (1982): 1-22
- 89 刘永清, 宋中昆. 华南工学院学报, 2 (1982): 23-38
- 90 陈潮填. 华南工学院学报, 4 (1983): 56-68
- 91 刘永清. 华南工学院学报, 4 (1983): 69-81, 2 (1984): 108-125
- 92 刘永清, 宋中昆. 自动化学报, 2 (1984): 121-128
- 93 张泽绵, 张鸿亮. 华南工学院学报, 2 (1982): 39-50
- 94 徐道义. 科学通报, 3 (1983): 190
- 95 梁春龙. 福州大学学报, 3 (1986): 15-21
- 96 张鸿亮. 华南工学院学报, 4 (1983): 103-113
- 97 廖晓昕. 中国科学A辑, 9 (1985): 784-798
- 98 刘永清. 华南工学院学报, 1 (1982): 70-82
- 99 王慕秋, 刘永清, 王联. 数学研究与评论, 3 (1982): 33-40
- 100 王慕秋, 王联. 数学研究与评论, 4 (1985): 53-57
- 101 冯恩波. 控制理论与应用, 4 (1984)
- 102 徐道义. 科学通报, 18 (1983): 1152
- 103 王联, 王慕秋. 湖南大学学报, 2 (1984): 38-46
- 104 刘永清, 刘金宪. 华南工学院学报, 1 (1983): 105-111
- 105 秦元勋, 王慕秋, 王联. 运动稳定性理论与应用. 科学出版社, 北京 (1981)
- 106 朱思铭, 叶思源. 应用数学与计算数学, 3 (1981): 40-56
- 107 赖定文. 科学通报, 19 (1984): 1161-1163
- 108 张宗达. 哈尔滨工业大学学报, 4 (1984): 4-9
- 109 舒仲周, 谢建华. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 127
- 110 廖晓昕. 中国科学数学专辑 (1), (1979): 124-134
- 111 廖晓昕. 数学学报, 5 (1981): 641-649
- 112 沈家骐. 科学通报, 21 (1981): 1237-1289
- 113 陈绍著. 山东大学学报, 1 (1982): 17-30
- 114 陈绍著. 山东大学学报, 4 (1984): 1-5
- 115 Yan Xing-min (阎醒民). *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics*, Shanghai, Science Press, Beijing, China (1985): 1135-1139
- 116 舒仲周. 西南交通大学学报, 4 (1980): 14-23
- 117 舒仲周. 西南交通大学学报, 3 (1981): 70-75
- 118 舒仲周. 西南交通大学学报, 1 (1981): 30-40
- 119 康德. 数学研究与评论, 3 (1983): 59-61
- 120 麦结华. 中国科学A辑, 10 (1985): 869-880
- 121 黄文纲. 中国科学A辑, 4 (1986): 359-368
- 122 秦元勋, 郑力纲. 中国科学A辑, 11 (1986): 1131-1142
- 123 肖双发. 科学通报, 14 (1981): 841-843
- 124 肖双发. 应用数学学报, 3 (1982): 291-299
- 125 李曾淑, 王慕秋. 数学研究与评论, 2 (1985): 67-70
- 126 杨世藩. 应用数学学报, 4 (1983): 439-457
- 127 王联, 王慕秋. 科学通报, 12 (1981): 708-712
- 128 王联, 王慕秋. 应用数学学报, 3 (1983): 309-323
- 129 王荣良. 科学通报, 20 (1986): 1531-1534
- 130 卢亭鹤, 金均. 数学研究与评论, 4 (1985): 59-62
- 131 汪家琢. 应用数学和力学, 6 (1981): 659-670

- 132 徐道义. 科学通报, 8 (1984): 454—456
 133 陈秀东. 信息与控制, 5 (1982): 8—11
 134 范弘毅, 陈秀东. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 134
 135 屠伯坝, 李君如. 数学年刊, 4 A, 4 (1983): 533—542
 136 廖晓昕. 科学通报, 8 (1982): 460—463
 137 徐道义. 数学学报, 3 (1986): 309—312
 138 黄力民. 科学通报, 8 (1984): 511
 139 李明曙. 数学学报, 1 (1982): 109—113
 140 秦元勋, 王联, 王慕秋. 中国科学数学专辑 (1) (1979): 242—254
 141 何崇佑. 数学年刊, A, 2 (1983): 147—158
 142 李骊. 应用数学和力学, 5 (1984): 639—646
 143 王寿松, 徐远通. 中山大学学报, 4 (1981): 59—68, 1 (1982): 8—18
 144 张书顺. 应用数学和力学, 2 (1986): 169—171
 145 张书顺. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 117
 146 康德. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 128
 147 徐道义. 科学通报, 4 (1984): 256
 148 梁法驯. 科学通报, 21 (1986): 1675
 149 赵俊三. 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集 (1986): 119
 150 梁永富. 四川大学学报, 2 (1986): 28—32

RESEARCHES ON STABILITY OF MOTION IN CHINA

Shu Zhong-zhou

(South-Western Jiaotong University)

Abstract In this paper, a survey of the researches on stability of motion in China is given, which covers the stability of mechanics, control, population, ecology and large-scale systems as well as the general theory of stability of motion.

Keywords *stability of motion, Liapunov function, mechanical system, control system, population system, ecology system, large-scale system*

(上接第 135 页)

另外, 本刊已将冯元桢教授赠送的《生物力学未来研究的需要》(美国生物力学委员会撰写出版) 译出, 于1987年第2期起分三期登完。现应读者要求于1987年底出抽印本, 每本酌收工本费2.00元。印数不多, 需要者请速邮汇款给本刊编辑部。务请写清姓名、单位、地址, 并在汇款单附言栏上写明: 订购《生物力学未来研究的需要》抽印本(若干份)。

《力学进展》编辑部

(地址: 100080 北京市中关村)