关于非完整系统分析动力学的某些问题

苏联科学院计算中心 V. V. Rumyantsev

0. 引　言

本报告包括非完整系统动力学领域内某些研究结果的综述. 在从 Hertz 和 Hölder 论文开始的浩瀚文献中，经常有变分原理和 Jacobi 方法对非完整系统适用性的相反提法. 基于 D'Alembert-Lagrange 原理，我们在这里给出动力学积分原理的单一证明和分析. 证明了 Hamilton 原理的各种形式等价性. 给出了 Hamilton 作用量、Lagrange 作用量和 Jacobi 作用量的稳定的充要条件，同样给出对运动方程积分的广义 Jacobi 方法适用的充要条件. 得到了扩充的位形空间和相空间中运动的参数方程. 这些参数方程代表了冲量-能量矢量的方程组.

1. Hamilton 原理

让我们考虑一动力系统，此系统由 Lagrange 函数 $\mathscr{L}(q,\dot{q},t)$ 和理想非完整约束的独立方程

$$f_l(q,\dot{q},t)=0,\quad (l=1,\cdots,r) \tag{1.1}$$

来描述，一般说来约束方程对于 $\dot{q}$ 不是线性的. 这里 q_i 和 $\dot{q}_i=dq_i/dt$ $(i=1,\cdots,n)$ 分别为 Lagrange 坐标和速度，t 是时间. 在通常的动力学系统情形，$\mathscr{L}$ 是 $T+U$，其中 $T(q,\dot{q},t)=T_2+T_1+T_0$ 是系统的动能，T_α 对 $\dot{q}$ 为 α 阶齐次的 $(\alpha=0,1,2)$. 而 $U(q,t)$ 是力函数. 由于方程 (1.1) 的独立性，所以它们可表为如下形式：

$$\dot{q}_{k+l}=\varphi_l(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k,t),\quad (l=1,\cdots,r) \tag{1.2}$$

其中 $\dot{q}_s(s=1,\cdots,k=n-r)$ 可看作独立的速度.

动力学普遍方程是

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i=0 \tag{1.3}$$

这里虚位移 δq_i 满足 Четаев 关系[3]

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i=0,\quad (l=1,\cdots,r),\ \text{对方程(1.1)} \tag{1.4}$$

或

$$\delta q_{k+l}=\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial\varphi_l}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s,\quad (l=1,\cdots,r),\ \text{对方程 (1.2)} \tag{1.5}$$

积分原理可由 (1.3) 出发，对位于极限 t_0 和 t_1 之间的 t 进行积分来证明. t_0 和 t_1 分别对应于位形空间中运动系统的固定位置 P_0 和 P_1. 因此我们得到关系

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\right)dt=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} \tag{1.6}$$

因为条件（1.4）和（1.5）并不确定单值的 δq_i，所以有一已知任意规则来确定 $d(\delta q_i)/dt$。让我们考虑两种可能的定义。

定义 1[2] 对所有的速度下列关系成立：

$$\delta \dot{q}_i = d(\delta q_i)/dt, \quad (i=1,\cdots,n) \tag{1.7}$$

根据这个定义，我们将函数 $f_l(q,\dot{q},t)$ 的变分用以下形式表示：

$$\delta f_l(q,\dot{q},t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i, \quad (l=1,\cdots,r) \tag{1.8}$$

注意，表达式（1.8）在所有约束（1.1）为可积的情形中恒为零。在相反的情形中我们有 $\delta f_l \neq 0$，而表达式（1.8）可以因运动方程而为零，只需约束（1.1）对于 $\dot{q}_i$ 是非线的[4]，或者只需选取满足条件（1.4）的 δq_i 的特殊值[5]。

关于约束（1.2），关系（1.8）变换成

$$\delta \dot{q}_{k+l}=\delta \varphi_l+\sum_{s=1}^{k}A_s^{k+l}\delta q_s, \quad (l=,\cdots,r) \tag{1.9}$$

其中

$$A_s^{k+l}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_l}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_s}-\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_{k+\nu}}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \dot{q}_s} \tag{1.10}$$

定义 2[6] 置

$$\delta \dot{q}_s=\frac{d}{dt}\delta q_s \ (s=1,\cdots,k), \quad \delta f_l=0, \quad (l=1,\cdots,r) \tag{1.11}$$

而因此对于不独立速度，有

$$\bar{\delta}\dot{q}_{k+l}=\frac{d}{dt}\delta q_{k+l}-\sum_{s=1}^{k}A_s^{k+l}\delta q_s, \quad (l=1,\cdots,r) \tag{1.12}$$

这里记号 $\bar{\delta}$ 表示在定义 2 意义下依赖于不独立速度的任意函数的变分。

让我们先考虑定义 1 的情形。将（1.7）代入（1.6），我们得到 Hamilton 原理的 Hölder 形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta \mathscr{L}\, dt=0 \tag{1.13}$$

带有条件

$$\delta q_i=0, \ 当\ t=t_0, t_1 \ 时 \tag{1.14}$$

它对完整系统和非完整系统都成立。

如果我们引入函数 $\Theta(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k,t)=T|_{(1.2)}$，它表示借助于（1.2）消去不独立的速度而得的动能 T，那么我们得出

$$\delta T=\delta \Theta+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}(\delta \dot{q}_{k+l}-\delta \varphi_l) \tag{1.15}$$

将（1.15）代入（1.13），我们有带条件（1.14）的 Hamilton 原理的 Voronets 形式[7]

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta(\Theta+U)+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k+l}}(\delta\dot{q}_{k+l}-\delta\varphi_l)\right]dt=0 \tag{1.16}$$

在 Hamilton 原理中，可将在时间 t_0,t_1 通过 P_0,P_1 的真实轨道 $q_i(t)$ 与任何邻近路径 $q_i(t)+\delta q_i$ 相比较，这邻近路径可由每个真实位置向在同样时间 t_0 和 t_1 通过位置 P_0 和 P_1 的邻近路径的同时位置移动的位移 $\{\delta q_i\}$ 来得到．在扩充位形空间 (q,t) 中，这些运动可用通过点 $M_0(t_0,q_i^0)$ 和 $M_1(t_1,q_i^1)$ 的某些曲线来表示．然而，对于非完整系统，邻近路径一般不满足约束方程，因为正如我们上面指出的，$\delta f_l\neq 0\ (l=1,\cdots,r)$．在邻近路径由于运动方程或者由于虚位移的特殊选取，而成为运动学可允的这种情形下可发生例外[5]．这样，对非完整系统，Hamilton 原理一般不是稳定作用量的变分原理：

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{L}\,dt=0 \tag{1.17}$$

反之，它对完整系统才存在[8]．

下述差别也是重要的：一个非完整系统的真实轨道不能通过两个任意点．事实上，如果 P_0 任意选取，那么 P_1 必须处于 $(n-r)$ 维流形上，这流形是由 P_0 点动力学方式发生的[1,8]．

注意，当在（1.1）中存在参数约束

$$f_l(q_i,\dot{q}_i,t,u_s)=0$$

时，原理（1.13）也是对的．这里 $u_s\ (s=1,\cdots,m)$ 是属于某类函数的某些参数控制[2]．

现在考虑定义 2．利用关系（1.11），（1.12）并将其代入（1.6），我们得到带条件（1.14）的 Hamilton 原理的 Suslov 形式[8]

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\bar{\delta}\mathscr{L}+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k+l}}\sum_{s=1}^{k}A_s^{k+l}\,\delta q_s\right)dt=0 \tag{1.18}$$

根据上面考虑的变分法则，邻近路径精确到一阶地满足约束方程，因为 $\delta f_l=0,(l=1,\cdots,r)$．然而（1.18）对非完整系统也不是稳定作用量原理．反之，对完整系统，所有 $A_s^{k+l}\equiv 0$ 而（1.18）取形式（1.17）．

看来形式（1.18），（1.13）和（1.16）是不同的，因为对不独立速度采用不同的变分定义．但是可以期望，在消去不独立速度的变分之后它们彼此可转换．实际上，在定义 2 情形中取 $\delta\dot{q}_{k+l}=\delta\varphi_l$ 且由于（1.15），$\bar{\delta}T=\delta\Theta$，我们得出（1.18）和（1.16）的等价性（见（1.12））．

因此，如果我们考虑到约束方程和变分的定义，则 Hamilton 原理的形式（1.13），（1.16）和（1.18）是等价的并且可以彼此转换的．

Hamilton 原理的所有这些形式能使我们得到带不定乘子的[5]或者不带乘子的[7] Lagrange 型的运动方程．还有一个引向 Hamilton 型运动方程的 Hamilton 原理的形式．

让我们对 Lagrange 函数 $\mathscr{L}(q_i,\dot{q}_i,t)$ 应用 Legendre 变换，假设 $\dot{q}_i$ 是主动变量而 q_i，t 是被动变量[10]．那么我们引入新变量

$$p_i=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{q}_i,\quad(i=1,\cdots,n) \tag{1.19}$$

和函数

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-\mathscr{L} \tag{1.20}$$

它借助方程（1.19）表示为（p,q,t）变量．结果我们得出 Hamilton 函数 $H=H(q_i,p_i,t)$ 以及关系

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial t},\quad (i=1,\cdots,n) \tag{1.21}$$

考虑到（1.20），我们将原理（1.13）表为带条件（1.14）的如下形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-H(q,p,t)\right)dt=0 \tag{1.22}$$

方程（1.22）代表 Hamilton 原理的 Helmholtz-Poincaré 形式[11,12]．由于 Legendre 变换的对偶性，这个形式和（1.13）是等价的．然而与（1.13）相反，在（1.22）中我们考虑（$2n+1$）维状态空间中的邻近路径 $q_i=q_i(t)$，$p_i=p_i(t)$，它们在每个端点有同样的 q，t 值而冲量 p_i 仅在时刻 $t=t_0,t_1$ 遵从约束条件（1.1）．在区间（t_0,t_1）内变分 δq_i 遵从（1.4）而变分 δp_i 是任意的．沿任何邻近路径的运动一般不满足条件（1.1）．

有趣的是将 Hamilton 原理(1.13) 和对满足 (1.1) 的曲线的 (1.17) 稳定的 Lagrange 问题相比较．引进不定乘子 $\mathscr{K}_l(t)$，我们将此问题变换为 Lagrange 变分问题

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\mathscr{L}+\sum_{l=1}^{r}\mathscr{K}_l f_l(q,\dot{q},t)\right)dt=0 \tag{1.23}$$

对它 Euler 方程取如下形式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}=\sum_{l=1}^{r}\mathscr{K}_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i}\right)-\sum_{l=1}^{r}\dot{\mathscr{K}}_l\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i}.\quad (i=1,\cdots,n) \tag{1.24}$$

方程（1.24）和（1.1）的通解依赖于 $2n$ 个任意常数．按照 Hertz[1]，这些方程确定了测地轨道，这些测地轨道一般不同于非完整系统的真实轨道．后者是由下面运动方程确定的：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}=\sum_{l=1}^{r}\mu_l\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i},\quad (i=1,\cdots,r) \tag{1.25}$$

其中 μ_l 是 Lagrange 乘子．由于方程（1.25）和（1.1）的通解依赖于（$2n-r$）个任意常数，所以系统（1.24）和（1.25）的不等价性是明显的．

在（1.1）为线性约束情形，Kerner[13] 证明，当且仅当线性约束是完全可积时，这些微分方程组才是相同的．根据这个结果，他得出结论：Hamilton 原理（1.17）以及变分原理仅对完整系统才是对的．

但是方程组（1.24）和（1.25）的不等价性不能排除它们某些解重合的可能性．不难验证[14]，条件

$$\sum_{l,i}\mathscr{K}_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i=0 \tag{1.26}$$

是保证方程（1.25）和（1.1）的解 $q_i(t)$ 属于方程（1.24）和（1.1）解族的必要充分条件．因此，Hamilton 原理仅对满足条件（1.26）的运动才是稳定作用量变分原理(1.17)．

注意，对于约束（1.2），等式（1.26）可变换为

$$\sum_{l=1}^{r}\mathscr{H}_l A_s^{k+l}=0,\quad (s=1,\cdots,k) \tag{1.27}$$

如果我们按照（1.11）和（1.12）取变分，那么只要条件

$$\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}A_s^{k+l}=0,\quad (s=1,\cdots,k) \tag{1.28}$$

成立[15]，原理（1.18）就取稳定作用量变分原理的形式．

我们强调指出，对于非完整系统．条件（1.26）—(1.28）仅在例外情形才满足．

2．最小作用量原理

让我们考虑最小作用量原理的 Lagrange 形式和 Jacobi 形式．

与**等时虚变分** δq_i 一起，让我们引入**全变分**或称**非等时变分** Δq_i．后者与等时变分以下述关系联系：

$$\Delta q_i=\delta q_i+\dot{q}_i\Delta t,\quad (i=1,\cdots,n) \tag{2.1}$$

其中 Δt 是时间的一任意可微无限小函数[5]．

如果采用非等时变分，那么在时刻 $t+\Delta t$ 的邻近运动 $q_i(t)+\Delta q_i$ 的位置 P^* 对应于在时刻 t 时系统在其真实运动中的位置 P．这种对应依赖于函数 Δt 的选取．

假设 Lagrange 函数不依赖于 t 而约束（1.1）是齐次的，即

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}\equiv 0,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=k_l f_l(q,\dot{q},t)=0,\quad (l=1,\cdots,r) \tag{2.2}$$

其中 k_l 是齐次性的次数．由于条件（2.2），真实位移 $dq_i=\dot{q}_i dt$ 处于虚位移之中，而由方程（1.3），得到能量积分[16]

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-\mathscr{L}=h=\text{const} \tag{2.3}$$

我们来考虑变分 Δq_i．对此变分，关系（2.3）在通过位置 P_0 和 P_1 的每条邻近轨道上成立，并使得（2.3）中的能量常数 h 与在真实轨道上的相同．这意味着

$$\Delta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)-\Delta\mathscr{L}=\Delta h=0 \tag{2.4}$$

在此情形，任何变更运动的时间依赖于其轨道，使得值 t_0，t_1 不是固定的．然而，所有变更轨道通过位形空间的固定点 P_0，P_1，即有

$$\Delta q_i=0,\quad 在\ t=t_0,\ t_1\ 时 \tag{2.5}$$

来替代条件（1.14）．

采用定义 1，由方程（1.6）我们得到等式

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{L}\,dt=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)_{t_0}^{t_1} \tag{2.6}$$

按照（2.1），方程

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{L}\,dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{L}\,dt+(\mathscr{L}\,\Delta t)_{t_0}^{t_1}$$

成立．于是，据方程（2.1），（2.6），我们有

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{L}\,dt=\left[\left(\mathscr{L}-\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\Delta q_i\right]_{t_0}^{t_1}$$

考虑到（2.3）并利用（2.4），我们得到带条件（2.5）的最小作用量原理的Lagrange形式[8]

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\,dt=0 \tag{2.7}$$

因对约束（1.1）我们有

$$\Delta f_l=\delta f_l+\dot{f}_l\Delta t=\delta f_l$$

所以按照前述理由，我们得到结论：Lagrange 原理中的变更运动不满足方程（1.1），而由（2.7）确定的真实轨道满足这些方程．然而，将方程（1.25）与变换为（1.24）的对应于（2.7）的极值变分问题的 Euler 方程相比较（只要这些比较曲线满足方程(1.1)和(2.3)），可以证明，原理（2.7）和 Hamilton 原理一样，乃是由条件（1.26）给出的稳定作用量的变分原理．

为克服由非等时变分所引起的困难，可以选取（据 Jacobi[17]）一参数 τ 作为新的独立变量，它在常值 τ_0，τ_1 之间单调连续变化．

τ 的值 τ_0 和 τ_1 对应于系统的位置 P_0，P．系统的变量 q_i，$\dot{q}_i$，t 变成为 τ 的函数．对 τ 的导数用一撇表示，有

$$q_i'\equiv\frac{dq_i}{d\tau}，\quad 使得\quad \dot{q}_i=q_i'\frac{d\tau}{dt}=\frac{q_i'}{t'}$$

如果将在某初始位置 P_0 和终了位置 P_1 之间的真实运动与同样位置间并具有同样能量值 h 的无限小变更运动相比较，按照 Jacobi 原理，我们有（对 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_2+\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_0$ 的情形）

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\sqrt{2(h+\mathscr{L}_0)}\sqrt{2F}+\varphi\right)d\tau=0 \tag{2.8}$$ 1)

带有条件

$$\delta q_i=0,\quad \tau=\tau_0,\tau_1 \tag{2.9}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial q_i'}\delta q_i=0,\quad (l=1,\cdots,r)$$

后一关系类似于（1.4）．

---

1) 原文积分限为 $\int_{t_0}^{t_1}$．——译者

函数 $F(q,q')$，$\varphi(q,q')$ 和 $\mathscr{L}_0(q)$ 由公式

$$F(q,q')=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(q)q_i'q_j'$$

$$\varphi(q,q')=\sum_{i=1}^{n}a_i(q)q_i',\quad \mathscr{L}_0(q)=T_0+U$$

来确定，只要 $\mathscr{L}$ 的二次形式 $\mathscr{L}_2=T_2$ 和线性形式 $\mathscr{L}_1=T_1$ 由

$$\mathscr{L}_2(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad \mathscr{L}_1(q,\dot{q})=\sum_{i=1}^{n}a_i(q)\dot{q}_i$$

给出，使得

$$\mathscr{L}_2=F\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2,\quad \mathscr{L}_1=\varphi\frac{d\tau}{dt},\quad \frac{d\tau}{dt}=\sqrt{\frac{h+\mathscr{L}_0}{F}}\tag{2.10}$$

考虑到这些关系，就容易由（2.7）得到（2.8）.

Jacobi 原理（2.8）给出系统真实轨道的微分方程

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{2(h+\mathscr{L}_0)}}{\sqrt{2F}}\frac{\partial F}{\partial q_i'}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}\right)-\frac{\sqrt{2F}}{\sqrt{2(h+\mathscr{L}_0)}}\frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial q_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}$$

$$-\frac{\sqrt{2(h+\mathscr{L}_0)}}{\sqrt{2F}}\frac{\partial F}{\partial q_i}=\sum_{l=1}^{r}\mu_l\frac{\partial f_l}{\partial q_i'},\quad (i=1,\cdots,n)\qquad (2.11)^{1)}$$

按照（2.10）用 t 代替 τ，上式可变换为（1.25）。将这些方程与对应的变分问题的Euler 方程相比较，容易了解对非完整系统的 Jacobi 原理（2.8）在满足（1.1）的运动类中是稳定作用量变分原理，当且仅当下列条件成立时：

$$\sum_{l,i}\mathscr{K}_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial f_l}{\partial q_i'}\right)\delta q_i=0\tag{2.12}$$

上式是一类似于（1.26）的关系[16]。

3．关于广义 Jacobi 方法

我们来阐明非完整系统的广义 Jacobi 方法适用的必要充分条件[18]．对约束（1.1）带乘子的正则运动方程

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_l\mu_l\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i},\quad (i=1,\cdots,n)\tag{3.1}$$

容易由原理（1.22）得到，其中冲量 p_i 和 Hamilton 函数H 由关系（1.19），（1.20）确定.

用下述变量替换

$$\pi_i=p_i+\sum_{l=1}^{r}\mathscr{K}_l\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i},\quad (i=1,\cdots,n)\qquad (3.2)^{2)}$$

1） 原文左端第一项微分号为 d/dt，——译者　　2）原文右边第一项为 ρ_i．——译者

关系（1.20）可变换为

$$\mathscr{L}=\sum_{i=1}^{n}\pi_i\dot{q}_i-H \tag{3.3}$$

带有

$$H_1(q,\pi,t)=H(q,p,t)+\sum_{l,i}\mathscr{K}_l\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i$$

其中 $\mathscr{K}_l$ 是 Lagrange 乘子[14]．

我们来考虑广义 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H_1\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q},\ t\right)=0 \tag{3.4}$$

（3.4）的特征方程由方程

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial\pi_i},\quad\frac{d\pi_i}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial q_i},\quad(i=1,\cdots,n) \tag{3.5}$$

来确定．按照 Jacobi 定理，关系

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\pi_i,\qquad\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}=\beta_i,\qquad(i=1,\cdots,n) \tag{3.6}$$

代表方程（3.5）的第一积分．这里 $S(q,\alpha,t)$ 是方程（3.4）的全积分，α_i 和 β_i 是任意常数．为使关系（3.6）也代表方程（3.1）和（1.1）的积分，必要充分条件是方程（3.5）等价于方程（3.1）和（1.1）．亦即，（3.5）的任何解必须是（3.1）和（1.1）的一个解，反之亦然．按照 Legendre 变换，（3.1）和（3.5）中的第一组方程是同样的．将由关系（3.6）找到的函数 $q_i(t,\alpha,\beta)$ 和 $\pi_i(t,\alpha,\beta)$ 代入（3.2）并将其对 t 求导数，依据(3.5)，我们得到方程

$$\frac{dp_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_i}=\sum_{l=1}^{r}\mathscr{K}_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i}\right)-\sum_{l=1}^{r}\dot{\mathscr{K}}_l\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i},\quad(i=1,\cdots,n) \tag{3.7}$$

它与由（1.19），（1.21）给出的问题（1.23）的 Euler 方程一致[9]．因此当且仅当上述条件（1.26）满足时，方程（3.5）才等价于方程（3.1）和（1.1）[19,14]．

因此，当且仅当 Hamilton 原理是稳定作用量变分原理时，广义 Hamilton-Jacobi 方法才能应用于非完整系统．

如果条件（1.26）得以满足，则非完整系统的运动用正则方程（3.5）来描述，由此得到带条件（1.14）的稳定作用量原理

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i\dot{q}_i-H_1\right)dt=0 \tag{3.8}$$

它等价于（1.17）．

当所有的约束方程（1.1）为可积时，为积分方程（3.1）的这个方法已由 Suslov[18] 对带多余坐标的完整系统提出．

有趣地回忆一下 Chaplygin 的导出乘子法[20]也将非完整系统的运动方程引向Hamilton正则方程。

S. A. Chaplygin 考虑带两个独立参数 $q_i(i=1,2)$ 的系统，此二参数以任意数目的不独立参数 $\xi,\eta,\cdots$ 用关系

$$\dot{\xi}=a_1\dot{q}_1+a_2\dot{q}_2,\qquad \dot{\eta}=b_1\dot{q}_1+b_2\dot{q}_2,\cdots \tag{*}$$

相联系，其中 a_s，b_s 是 q_i 的函数。

用 T 表示系统的动能，用 Θ 表示借助于（*）由 T 得到的简化形式，可将系统的运动方程写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}_1}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_1}-\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial q_1}=\dot{q}_2S,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}_2}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_2}-\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial q_2}=-\dot{q}_1S\\&S=\frac{\partial T}{\partial\dot{\xi}}\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2}-\frac{\partial a_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}}\left(\frac{\partial b_1}{\partial q_2}-\frac{\partial b_2}{\partial q_1}\right)+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

用方程

$$N\,dt=d\tau \tag{3.10}$$

引进新的独立变量 τ，其中函数 $N(q_1,q_2)$ 必须满足等式

$$NS-p_2\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_1}+p_1\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_2}=0 \tag{3.11}$$

Chaplygin 将方程（3.9）变换为正则系统

$$\frac{dp_i}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\qquad \frac{dq_i}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad (i=1,2) \tag{3.12}$$

其中

$$p_i=\partial\Theta/\partial\dot{q}_i,\qquad (i=1,2)$$

如果函数 $N(q_1,q_2)$ 作为两个联立方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_1}=A_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2}-\frac{\partial a_2}{\partial q_1}\right)+B_2\left(\frac{\partial b_1}{\partial q_2}-\frac{\partial b_2}{\partial q_1}\right)+\cdots\\&\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_2}=-A_1\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2}-\frac{\partial a_2}{\partial q_1}\right)-B_1\left(\frac{\partial b_1}{\partial q_2}-\frac{\partial b_2}{\partial q_1}\right)-\cdots\end{aligned}\right\}\tag{3.13}$$

的解而存在，那么无论冲量 p_1,p_2 取怎样的值，关系（3.11）总成立。在（3.13）中，A_s和 B_s 是已知函数。那么修正的 Hamilton 原理由正则系统（3.12）得到。对非完整系统的真实运动成立下式：

$$\delta\int_0^t(T+\mathscr{U})N\,dt=0 \tag{3.14}$$

带有条件

$$\tau=\int_0^tN\,dt=\text{const} \tag{3.15}$$

4. 参数方程

我们来考虑非完整系统运动方程的参数形式。在 $(n+1)$ 维扩充位形空间中，空间点的坐标是 Lagrange 坐标 q_i 和时间 t，它们可看作完全独立的变量，如果我们引进记号 x_i

$=q_i(i=1,\cdots,n)$, $x_{n+1}=t$，那么所有变量 $x_\alpha(\alpha=1,\cdots,n+1)$ 可作为某参数 τ 的函数给出．它的选取没有特别的含义[21]．令 $x_\alpha=x_\alpha(\tau)$ 是 C^2 类的某些曲线，使得 $dx_\alpha/d\tau\equiv x'_\alpha$ 不同时为零；我们置 $\dot{x}_\alpha=x'_\alpha/x'_{n+1}$．

我们考虑 Hamilton 原理的如下形式：

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)d\tau=0,\quad \delta x_\alpha=0,\quad \tau=\tau_0,\ \tau_1 \tag{4.1}$$

Lagrange 函数 $\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)$ 由等式

$$\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)=\mathscr{L}\left(x_1,\cdots,x_{n+1},\frac{x'_1}{x'_{n+1}},\cdots,\frac{x'_n}{x'_{n+1}}\right)x'_{n+1} \tag{4.2}$$

来确定．约束方程（1.1）取形式

$$F_l(x_\alpha,x'_\alpha)=0,\quad (l=1,\cdots,r) \tag{4.3}$$

其中

$$F_l(x_\alpha,x'_\alpha)=f_l\left(x_1,\cdots,x_{n+1},\frac{x'_1}{x'_{n+1}},\cdots,\frac{x'_n}{x'_{n+1}}\right),\quad (l=1,\cdots,r) \tag{4.4}$$

（4.1）中的记号 δ 表示发生虚位移的变分．这些位移对 τ 的固定值发生并且满足条件

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial F_l}{\partial x'_\alpha}\delta x_\alpha=0,\quad (l=1,\cdots,r) \tag{4.5}$$

它推广了（1.4）．

按照定义（4.2）和（4.4），函数 $\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)$ 和 $F_l(x_\alpha,x'_\alpha)$ 相对于导数 x'_α 分别为一次和零次齐次函数．因此据 Euler 定理，我们有

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}x'_\alpha=\Lambda,\quad \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial F_l}{\partial x'_\alpha}x'_\alpha=0,\quad (l=1,\cdots,r) \tag{4.6}$$

变更等式（4.2），（4.4）和 $\dot{x}_\alpha=x'_\alpha/x'_{n+1}$，我们得到函数 $\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)$ 和 $\mathscr{L}(x_\alpha,\dot{x}_i)$ 的偏导数之间的下述关系：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}=x'_{n+1}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\alpha},\quad \frac{\partial\Lambda}{\partial x'_i}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}_i},\quad (\alpha=1,\cdots,n+1;\ i=1,\cdots,n)\\&\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{n+1}}=\mathscr{L}-\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}=-H\end{aligned}\right\}. \tag{4.7}$$

对函数 $F_l(x_\alpha,x'_\alpha)$ 和 $f_l(x_\alpha,\dot{x}_\alpha)$ 我们还有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F_l}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial f_l}{\partial x_\alpha},\quad \frac{\partial F_l}{\partial x'_i}=\frac{1}{x'_{n+1}}\frac{\partial f_l}{\partial\dot{x}_i},\quad \frac{\partial F_l}{\partial x'_{n+1}}=-\frac{1}{x'_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial f_l}{\partial\dot{q}_i}\\&(\alpha=1,\cdots,n+1;\ l=1,\cdots,r;\ i=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

由原理（4.1）利用（4.5），我们得到扩充位形空间中系统的方程的参数形式

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}=\sum_{l=1}^{r}\mu_l\frac{\partial F_l}{\partial x'_\alpha},\quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \tag{4.9}$$

这些方程是带不定乘子 μ_l 的 Lagrange 形式的方程. 此外, 约束方程 (4.3) 需加到 (4.9) 上. 方程 (4.9) 如同相对论运动方程[10] 一样, 代表所考虑力学系统的冲量-能量矢量的方程组. 方程 (4.9) 最后一个是能量方程, 按 (4.7) 和 (4.8), 即

$$\frac{dH}{d\tau}+t'\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}=\frac{1}{t'}\sum_{l,i}\mu_l\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \tag{4.10}$$

按条件 (2.2), 我们由 (4.10) 得到能量积分 (2.3). 它对应于循环坐标 $x_{n+1}=t$.

方程 (4.9) 的数目 $(n+1)$ 等于扩充位形空间的维数, 但是这些方程如同在完整系统情形[21], 用恒等式

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}x'_\alpha\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}-\sum_{l=1}^{r}\mu_l\frac{\partial F_l}{\partial x'_\alpha}\right)\equiv 0$$

相联系. 这可由 (4.6) 以及 Λ 对 τ 的独立性得出. 如果我们取 t 为 τ 并考虑到关系 (4.7) 和 (4.8), 那么我们容易看到, 当 $\alpha=1,\cdots,n$ 时方程 (4.9) 成为运动方程 (1.25), 而当 $\alpha=n+1$ 时为能量方程

$$\frac{dH}{dt}+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}=\sum_{l,i}\mu_l\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \tag{4.11}$$

众所周知, (4.11) 是方程 (1.25) 和 (1.1) 的结果.

当条件 (2.2) 得以满足时, 坐标 $x_{n+1}=t$ 可由原理 (4.1) 中消除, 只要我们用函数[10]

$$\bar{\Lambda}=\Lambda-\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_{n+1}}x'_{n+1}=(\mathscr{L}+H)x'_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i t'$$

来替代函数 Λ. 这使方程 (4.1) 成为最小作用量原理的 Lagrange 形式

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i t'd\tau=0,\ \ \delta q_i=0,\ \ \tau=\tau_0,\tau_1 \tag{4.12}$$

这里记号 δ 表示由 (2.4) 提供的变分方法 (在第 2 节为此目的我们曾用记号 Δ 代替). 在 $t=\tau$ 的情形, 等式 (4.12) 取形式 (2.7) 带条件 (2.5). 最后, 如果我们利用条件 (2.3) 由 (4.12) 中消去值 t', 我们就得到 Jacobi 原理 (2.8).

让我们由公式

$$y_\alpha=\partial\Lambda/\partial x'_\alpha,\quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \tag{4.13}$$

引入广义冲量, 使之与 (4.7) 一致, 我们有 $y_i=p_i\,(i=1,\cdots,n)$, $y_{n+1}=-H$. 我们考虑坐标为 x_α,y_α $(\alpha=1,\cdots,n+1)$ 的 $2(n+1)$ 维扩充的相空间. Hamilton 函数为

$$\mathscr{H}=\sum_{\alpha=1}^{n+1}y_\alpha x'_\alpha-\Lambda\equiv 0$$

这是由于 (4.6) 的第一个等式所致. 于是原理 (4.1) 取如下形式:

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}y_\alpha x'_\alpha\,d\tau=0,\ \ \delta x_\alpha=0,\ \ \tau=\tau_0,\tau_1 \tag{4.14}$$

它不包含 Hamilton 函数．然而有一附加关系以代替 Hamilton 函数．实际上，（4.13）的右边表示相对于 x'_α 的零次齐次函数．由（4.13）消去 n 个比 $x'_1:x'_2:\cdots:x'_{n+1}$，我们得到变量为 y_α 和 x_α 的如下种类的等式：

$$K(x_\alpha, y_\alpha)=0 \tag{4.15}$$

因此问题（4.14）需在有附加条件（4.15）的时候来求解，这可用引入一不定乘子 $\lambda(\tau)$ 并修正（4.14）中的函数来考虑．由于参数 τ 是任意的，所以用 τ 的特殊选取方法可置 $\lambda(\tau)=1$．于是问题（4.14）取正则形式

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} y_\alpha x'_\alpha - K\right)d\tau=0,\quad \delta x_\alpha=0,\quad \tau=\tau_0,\tau_1 \tag{4.16}$$

其中 K 起 Hamilton 函数的作用．

由（4.16）和（4.5），我们得到带不定乘子的 Hamilton 方程的参数形式

$$x'_\alpha=\frac{\partial K}{\partial y_\alpha},\quad y'_\alpha=-\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}+\sum_{l=1}^{r}\mu_l\frac{\partial F_l}{\partial x'_\alpha},\quad (\alpha=1,\cdots,n+1) \tag{4.17}$$

必须将约束方程（4.3）加到（4.17）上．

因函数 K 不依赖于 τ，显然由（4.6）的第二个等式，方程（4.17）就如同在完整系统的情形[21]那样有“能量积分”

$$K(x_\alpha, y_\alpha)=\text{const} \tag{4.18}$$

这意味着在所考虑的相空间中任何非完整系统都变成“保守”系统，而相流则变成定常的．进而，如果当 $\tau=\tau_0$ 时 x_α 和 y_α 的初值满足（4.15），那么在（4.18）中我们可取常数为零．

如果分出 $x_{n+1}=t$，那么关系

$$K=y_{n+1}+H=0 \tag{4.19}$$

成立而方程（4.17）取如下形式：

$$x'_i=\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad y'_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}+\sum_{l=1}^{r}\mu_l\frac{\partial F_l}{\partial x'_i},\quad (i=1,\cdots,n) \tag{4.20}$$

$$x'_{n+1}=1,\quad y'_{n+1}=-\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}-\sum_{l,i}\mu_l\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \tag{4.21}$$

（4.21）的第一个方程意味着参数 τ（如我们指出的标准化的）与 $x_{n+1}=t$ 相重合；方程（4.20）是 Hamilton 方程（3.1）．（4.21）的其余方程确定总能 H 在时间过程中的变化，即它类似于方程（4.11）而且是方程（4.20）的结果．

原理（4.14）在附加条件（4.15）下的表达，类似于在条件（2.3）下的 Lagrange 原理（2.7），并且当 $K(x_\alpha,y_\alpha)$ 有形式（4.19）时可变换为保守系统的 Lagrange 原理．实际上，在此情形 $x_{n+1}=t$ 是循环坐标以使按（4.7）和（2.3）用 $-h$ 来替代 y_{n+1}，而积分（4.14）中最后一项可略去．

如果下式成立：

$$\Lambda(q,q')=\sqrt{2(h+\mathscr{L}_0)}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(q)q'_iq'_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(q)q'_i$$

则 Jacobi 原理（2.8）就类似于（4.1）或（4.14）. 在此情形，附加条件取如下形式：

$$K=\frac{1}{2}(h+\mathscr{L}_0)^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(p_i-a_i)(p_j-a_j)-1=0$$

其中 $\|b_{ij}\|$ 是 $\|a_{ij}\|$ 的逆矩阵.

因此，非完整系统的积分原理基本形式间的差别，对应于附加条件（4.15）的不同解释[10].

参考文献

[1] H. HERTZ, *Die prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, Ges. Werke, Bd. 3, Leipzig, 1894 - 1895.

[2] O. HOLDER, Nachrichten Kön. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys., 1896, N. 2, pp. 122 - 157.

[3] N.G. CHETAEV, Izvestia Phisico-matem. Obshchestva pri Kazanskom Universitete 6, ser. 3, 68 - 71 (1932 - 33) (in Russian).

[4] V.S. NOVOSELOV, *Variatsionnye metody y mechanike*, Izdat. Leningradskogo Universiteta, 1966 (in Russian).

[5] N.V. ROSE, *Lectsii po analyticheskoi mechanike*, part. 1 Izdat. Leningradskogo Universiteta, 1938 (in Russian).

[6] G.K. SUSLOV, Matematicheskij Sbornik 22, n. 4 (1901) (in Russian).

[7] P.V. VORONETS, Matematicheskij Sbornik 22, n. 4 (1901) (in Russian).

[8] L.A. PARS, *A Treatise on Analytical Dynamics*. Heinemann (London, 1964).

[9] V.V. RUMYANTSEV, Teoretichna i Prilojna Mechanika, Sophia, 9, n. 1, 7 - 15 (1978) (in Russian).

[10] C. LANCZOS, *The Variational Principles of Mechanics*, University of Toronto Press (Toronto, 1962).

[11] L. HELMHOLTZ, Borchardt Crelle Journal für Mathematik 100, 137 - 166 (1886).

[12] H. POINCARE, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 13, Gauthier-Villars, (Paris, 1899).

[13] M. KERNER, Prace mat.-fiz., Warszawa, 38, 1 - 21 (1931).

[14] V.V. RUMYATSEV, Prikl. Matem. i Mechanika 42, n. 3, 387 - 399 (1978).

[15] A.S. SUMBATOV, Vestnik Moscowskogo universiteta, Matem., mech.. (1970). n. 1, pp. 98 - 10[illegible].

[16] V.V. RUMYANTSEV, Prikl. Matem. i Mechanika 43, n. 4, 583 - 590 (1979).

[17] C. JACOBI, *Vorlesungen uber Dynamik*, Berlin, 1884.

[18] G.K. SUSLOV, *Teoreticheskaja Mechanika*, Gostehteorizdat, M.-L., 1946 (in Russian).

[19] V.V. RUMYANTSEV, A.S. SUMBATOV, ZAMM 58, n. 11, 477 - 481 (1978).

[20] S.A. CHAPLYGIN, *Sobranie Sochineij*, v. 1, Gostehteorizdat, M.-L., (1948), pp. 15-25 (in Russian).

[21] J.L. SYNGE, *Classical Dynamics*, Handbuch der Physik, Springer (Berlin, 1960).

梅凤翔译自：Proc. IUTAM-ISIMM Symp. on Modern Developments in Analytical Mechanics, Torino, June 7—11, 1982. Analytical Dynamics and Applications, Torino (1983)：697—716.（董务民校）

表 1　各级变分原理的泛函表达式

记号	泛函表达式（略去高阶小量就是小位移线性者）	分裂因子	独立变量	约束条件	欧拉方程
π_{4p}	$\int_V[A^*+(\sigma^*_{ij}-\sigma_{ij})e_{ij}-B^*+D_{ij}\sigma_{ij}-\bar{F}_k u_k]dV-T_p$	β_{ijkl}	σ^*		①
π_{4c}	$\int_V\left[(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})e_{ij}-A^*+B^*+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right]dV-T_c$		σ e		② ③
$\pi_{4p\beta}$	$\int_V[\beta A+(\sigma^*_{ij}-\sigma_{ij})e_{ij}-B^*+D_{ij}\sigma_{ij}-\bar{F}_k u_k]dV-T_p$	β	u $u_{(s)}$		④ ⑤
$\pi_{4c\beta}$	$\int_V\left[(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})e_{ij}-\beta A+B^*+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right]dV-T_c$		$P_{(s)}$		⑥
π_{3p}	$\int_V(A^*-e_{ij}\beta_{ijmn}\sigma_{mn}-B^*+D_{ij}\sigma_{ij}-\bar{F}_k u_k)dV-T_p$	β_{ijkl}			②
π_{3c}	$\int_V\left(B^*-A^*+e_{ij}\beta_{ijmn}\sigma_{mn}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)dV-T_c$		σ		③
$\pi_{3p\beta}$	$\int_V[\beta A-\beta e_{ij}\sigma_{ij}-(1-\beta)B+D_{ij}\sigma_{ij}-\bar{F}_k u_k]dV-T_p$	β	e		④
$\pi_{3c\beta}$	$\int_V\left[(1-\beta)B-\beta A+\beta e_{ij}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right]dV-T_c$		u		⑤
π_{3p1}	$\int_V[A-(e_{ij}-D_{ij})\sigma_{ij}-\bar{F}_k u_k]dV-T_p$	1	$u_{(s)}$	①	⑥
π_{3c1}	$\int_V\left(e_{ij}\sigma_{ij}-A+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)dV-T_c$		$P_{(s)}$		
π_{3p0}	$\int_V(D_{ij}\sigma_{ij}-B-\bar{F}_k u_k)dV-T_p$　（退化）	0			③ ④
π_{3c0}	$\int_V\left(B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)dV-T_c$　（退化）				⑤ ⑥
π_{2p}	$\int_V(A^*+D_{ij}\sigma^*_{ij}-B^*-\bar{F}_k u_k)dV-T_p$	β_{ijkl}			③
π_{2c}	$\int_V\left(B^*-A^*+\beta_{ijkl}\sigma_{kl}D_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)dV-T_c$		σ		④
$\pi_{2p\beta}$	$\int_V[\beta A+(1-\beta)D_{ij}\sigma_{ij}-(1-\beta)B-\bar{F}_k u_k]dV-T_p$	β	u	①	⑤
$\pi_{2c\beta}$	$\int_V\left[(1-\beta)B-\beta A+\beta D_{ij}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right]dV-T_c$		$u_{(s)}$	②	⑥
π_{2p0}	$\int_V(D_{ij}\sigma_{ij}-B-\bar{F}_k u_k)dV-T_p$	0			
π_{2c0}	$\int_V\left(B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)dV-T_c$		$P_{(s)}$		
π_{2p1}	$\int_V(A-\bar{F}_k u_k)dV-T_p$　（退化）	1			④
π_{2c1}	$\int_V\left(D_{ij}\sigma_{ij}-A+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)dV-T_c$　（退化）				⑤ ⑥
π_{1p}	$\int_V(A-\bar{F}_k u_k)dV-T_p$		u	①	④
π_{1c}	$\int_V\left(B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)dV-T_c$		$u_{(s)}$ $P_{(s)}$	② ③	⑤ ⑥
π_{0p}	$\int_V(A-\bar{F}_k u_k)dV-T_p$		$u_{(s)}$	① ②	⑤
π_{0c}	$\int_V\left(B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right)dV-T_c$		$P_{(s)}$	③ ④	⑥
π_p	$\int_V(A-\bar{F}_k u_k)dV-\int_{S_p}\bar{P}_i u_i dS$		$u_{(S_p)}$	①—⑤	⑥
π_c	$\int_V\left(B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right)dV-\int_{S_u}\bar{u}_i P_i dS$		$P_{(S_u)}$	①—④ ⑥	⑤