第17卷 第2期　　力 学 进 展　　Vol. 17 No. 2
1987年5月25日　　ADVANCES IN MECHANICS　　May 25, 1987

弹性力学广义混合变分原理及有限元广义混合法

荣 廷 玉
（西南交通大学）

提要 近些年弹性力学中出现一种新型的变分原理，称为广义混合变分原理．特点是其泛函中包含某些可以任意选择的附加函数，称为分裂因子．新原理将弹性理论中现有的各主要变分原理都统一在一个框架中，并揭示出它们之间更深一层的相互关系．在应用方面，它提供了一个新的数学手段以建立有限元分析中的新模式．这些新模式已经显示出它们的优点：适当调节分裂因子，它们给出更好的数值解答，特别是，可用它们来处理有限元方法中棘手的病态问题．本文综述了线性及非线性弹性理论中的这种新型变分原理并就其在有限元中的应用作了讨论．

关键词 弹性力学；广义混合变分原理；分裂因子；有限元病态问题；有限元广义混合法

Ⅰ．引言

弹性力学变分原理是有限元分析的基础；反过来，有限元又促进了变分原理的研究．近年来，国内出现一类新颖的变分原理，其特点是它们的泛函中含有可任意选择的附加函数，称为分裂因子．用这种新型变分原理建立的有限元模式，已经显示出它的独特优点：通过分裂因子，可调节其模型的软硬程度，以给出较高精度；特别是它能处理通常有限元法中十分棘手的病态问题．

这类新型变分原理最早出现于1981年[1,2]．1983年钱伟长[3]也发表了这类变分原理．在应用方面，[4,5] 首先用它建立了新的有限元模式，并给出算例．其后，[6]也讨论了新原理的杂交形式，并给出算例．接着，[7]将线性问题变分原理推进到大位移非线性问题，称作广义混合变分原理；同时还解决了一个应用中的关键问题——提出合理选择分裂因子的一般准则．[8,9] 把新的有限元模式应用于断裂力学，计算了应力强度因子，说明了所建议的准则的正确性和有效性．

新型变分原理来自下面的思想．众所周知，以应变表达的最小势能原理为基础的有限元公式，会使计算模型过于刚硬；而以应力表达的余能原理又会使它过软．因此，人们很希望

有某种中间情况以获得介于上界和下界[10,11]之间的更接近于真解的数值解．为实现这一希望，需探求新的变分原理，它应具有下面两个特点：①其泛函中同时包含应变表达的应变能和应力表达的余能；②应变能（或余能）所占的比率可灵活调节．第一点是显然的，否则又要回到老路上去．第二点也是必要的，因为真解居于上下界之间，欲使数值解接近它，必须有调节这个比率的因素．显然，欲求的变分原理是混合型的．虽然混合型原理已有多种[12-14]，但它们都不同时具备以上两个特点．而［1,2］就首次建立了具备此二特点的变分原理．特点②就体现为泛函中所包含的任意附加函数，称为分裂因子，它表示应变能在泛函中所占比率之多寡．这一点与通常的“混合”意义不同，故称新原理为广义混合变分原理．

下面将从大位移非线性的最一般情况开始，涉及[1—9]各文之内容，综述新型变分原理的各种形式及应用情况．

Ⅱ．等价的应力应变关系表达式

设弹性体的域为 V，用直角坐标标定各点，受体力 $\overline{F}_i$；其边界为 $S=S_u+S_p$，在 S_u 上给定 $\overline{u}_i$，在 S_p 上给定边界力 $\overline{P}_i$；P_k 代表边界力 $P_k=(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_j$；$n_j$ 为 S 的单位外法矢；用 u_i，e_{ij}，σ_{ij} 表示位移矢、应变张量及应力张量；$A(e_{ij})$，$B(\sigma_{ij})$ 为应变能密度、余能密度：

$$A=\int_0^{e_{ij}}\sigma_{kl}de_{kl},\quad B=\int_0^{\sigma_{ij}}e_{kl}d\sigma_{kl};\quad i,j,k=1,2,3$$

每项中的重复指标表示1—3求和．在大位移非线性弹性理论[12,13,15,16]中，采用拉氏法，有基本方程组

$$[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\overline{F}_k=0,\quad 在V内 \tag{2.1}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}),\quad 在V内 \tag{2.2}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}},\quad 在V内 \tag{2.3}$$

或

$$e_{ij}=\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}},\quad 在V内 \tag{2.4}$$

$$u_i=\overline{u}_i,\quad 在S_u上 \tag{2.5}$$

$$(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_j=\overline{P}_k,\quad 在S_p上 \tag{2.6}$$

其中 $(\cdots)_{,i}$ 表示对 x_i 的偏导数；δ_{ij} 为 Kronecker 符号．以上是通常形式的方程组．以下建立与之等价的方程组，其主要不同之处是采用与（2.3），（2.4）等价的应力应变关系表达式．

令 β_{ijkl} 为 V 内满足一定条件的任意四阶张量场，称它为分裂因子：

$$\beta_{ijkl}=\beta_{jikl}=\beta_{ijlk} \tag{2.7}$$

按分裂因子，把 σ_{ij} 分作两部分之和：

$$\sigma_{ij}=\beta_{ijkl}\sigma_{kl}+\sigma^*_{ij} \tag{2.8}$$

或

$$\sigma_{ij}=\beta_{ijkl}\,\partial A/\partial e_{kl}+\sigma^*_{ij} \tag{2.9}$$

其中，
$$\sigma^*_{ij}=(\delta_{ik}\delta_{jl}-\beta_{ijkl})\sigma_{kl} \tag{2.10}$$
称σ^*_{ij}为分裂应力．对β_{ijkl}还要作如下限制：
$$\beta_{ijkl}\frac{\partial^2 A}{\partial e_{st}\partial e_{kl}}=\beta_{stkl}\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}} \tag{2.11}$$
且对于任意不为零的二阶张量G_{ij}，
$$\beta_{ijkl}G_{ij}G_{kl}\neq 0 \tag{2.12}$$
此外，β_{ijkl}还应使下面的四阶张量α_{mnij}确定：
$$\alpha_{mnij}=\alpha_{nmij}=\alpha_{mnji} \tag{2.13}$$
$$\left.\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\right|_{\sigma=\alpha\sigma^*}\alpha_{klst}=\left.\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{kl}\partial\sigma_{st}}\right|_{\sigma=\alpha\sigma^*}\alpha_{klij} \tag{2.14}$$
$$\alpha_{mnij}(\delta_{ik}\delta_{jl}-B_{ijkl})=\delta_{mk}\delta_{nl} \tag{2.15}$$
其中，$\sigma=\alpha\sigma^*$是$\sigma_{mn}=\alpha_{mnpq}\sigma^*_{pq}$的缩写。

由（2.10），（2.13），（2.15）有
$$\sigma_{mn}=\alpha_{mnkl}\sigma^*_{kl} \tag{2.16}$$
根据给定的A，B，引入两个新的量，记作A^*，B^*，
$$A^*=\int_0^{e_{ij}}\beta_{mnkl}\frac{\partial A}{\partial e_{kl}}de_{mn}=\int_0^{e_{ij}}\beta_{mnkl}\sigma_{kl}de_{mn} \tag{2.17}$$
$$B^*=\int_0^{\sigma^*_{ij}}\left.\frac{\partial B}{\partial\sigma_{mn}}\right|_{\sigma=\alpha\sigma^*}d\sigma^*_{mn}=\int_0^{\sigma^*_{ij}}e_{mn}(\alpha\sigma^*)d\sigma^*_{mn} \tag{2.18}$$
由（2.9），（2.17），（2.18）及（2.16）有
$$\sigma_{ij}=\frac{\partial A^*}{\partial e_{ij}}+\sigma^*_{ij};\quad e_{ij}=\frac{\partial B^*}{\partial\sigma^*_{ij}} \tag{2.19}$$
（2.11），（2.14）是使A^*，B^*与积分路线无关的条件，故对于给定的A，B和选定的β_{ijkl}，必存在确定的A^*，B^*，所以A^*，B^*具有应变能密度和余能密度函数的性质．还可证明[7]，有等价关系式
$$\left(e_{ij}=\frac{\partial B^*}{\partial\sigma^*_{ij}};\ \sigma_{ij}=\beta_{ijkl}\frac{\partial A}{\partial e_{kl}}+\sigma^*_{ij}\right)\Longleftrightarrow\left(\sigma_{ij}=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\text{或}\ e_{ij}=\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right) \tag{2.20}$$
因此，为表达应力应变关系，我们可从（2.3），（2.4），（2.19）三者中任取一种．本文许多地方使用（2.19）．此外，由$\sigma^*_{ij}=(\delta_{ik}\delta_{jl}-\beta_{ijkl})\sigma_{kl}$，显然有
$$e_{ij}=\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Longleftrightarrow e_{ij}=\frac{\partial B^*}{\partial\sigma^*_{ij}} \tag{2.21}$$

Ⅲ．大位移非线性的广义混合变分原理

把（2.1），（2.2），（2.19），（2.5），（2.6）作为大位移非线性弹性理论的基本方程组，可有四类变量的泛函：
$$\pi_{4p}=\int_V[A^*+(\sigma^*_{ij}-\sigma_{ij})e_{ij}-B^*+D_{ij}\sigma_{ij}-\overline{F}_k u_k]dV-T_p \tag{3.1}$$
$$\pi_{4c}=\int_V\left[(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})e_{ij}-A^*+B^*+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right]dV-T_c \tag{3.2}$$

其中，引入了下列缩写记号：

$$D_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\text{；}\quad L_k \equiv [(\delta_{kj}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k \tag{3.3}$$

$$T_p \equiv \int_{S_p}\bar{P}_i u_i dS + \int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)P_i dS\text{；}\quad T_c \equiv \int_{S_p}(P_i-\bar{P}_i)u_i dS + \int_{S_u}\bar{u}_i P_i dS \tag{3.4}$$

将 u_i，e_{ij}，σ_{ij}，σ^*_{ij} 作为独立函数，则由 $\delta\pi_{4p}=0$ 或 $\delta\pi_{4c}=0$，给出（2.1），（2.2），（2.19），（2.5），（2.6），即与（2.1）—（2.6）完全等价的方程组[7]，称它为广义混合变分原理。

若在 u_i，e_{ij}，σ_{ij}，σ^*_{ij} 之间加上某种限制，则由（3.1），（3.2）可直接导出各种三变量、二变量广义混合变分原理．下面举出几种．

①$\sigma^*_{ij}=(\delta_{ik}\delta_{jl}-\beta_{ijkl})\sigma_{kl}$．即把（2.10）作为约束条件，有

$$B^*=\int_0^{\sigma_{mn}}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\beta_{ijkl})\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{kl} \tag{3.5}$$

由（3.1），（3.2）得三类变量的广义混合变分原理的泛函

$$\pi_{3p}=\int_V(A^*-\beta_{ijmn}e_{ij}\sigma_{mn}-B^*+D_{ij}\sigma_{ij}-\bar{F}_k u_k)dV-T_p \tag{3.6}$$

$$\pi_{3c}=\int_V\left(B^*-A^*+\beta_{ijmn}e_{ij}\sigma_{mn}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)dV-T_c \tag{3.7}$$

把 u_i，e_{ij}，σ_{ij} 作为独立函数，由 $\delta\pi_{3p}=0$ 或 $\delta\pi_{3c}=0$ 给出（2.1），（2.5），（2.6）外，还给出[7]

$$\frac{\partial A^*}{\partial e_{ij}}-\beta_{ijmn}\sigma_{mn}=0 \tag{3.8}$$

$$e_{kl}\beta_{klij}+\frac{\partial B^*}{\partial\sigma^*_{kl}}\cdot\frac{\partial\sigma^*_{kl}}{\partial\sigma_{ij}}-D_{ij}=0 \tag{3.9}$$

注意到（2.17），（2.12），（2.10），（2.21），上两式给出（2.2），（2.3）；故 π_{3p}，π_{3c} 的欧拉方程给出（2.1）—（2.6）．

这里有一点值得特别注意．在四变量的（3.1），（3.2）中，β_{ijkl} 不可等于 $\delta_{ik}\delta_{jl}$，因此时的 α_{ijkl} 无意义（见(2.15)）；但在条件（2.10）下，三变量的（3.6），（3.7）中，β_{ijkl} 仍可等于 $\delta_{ik}\delta_{jl}$，因此时 $B^*=0$，$A^*=A$，不涉及 α_{ijkl}．此外，若 $\beta_{ijkl}=0$，条件（2.12）虽被破坏，但此时 $A^*=0$，$B^*=B$，（3.6），（3.7）仍然适用；不过（3.8）将变为 $0\equiv0$，自动失去一类欧拉方程；而同时（3.9）也变为 $D_{ij}=\partial B/\partial\sigma_{ij}$，并非一般情况的（2.2），这个欧拉方程的性质发生了变化．笔者称这种情况为"退化"．故 π_{3p0}，π_{3c0}（见表 1）为退化情况．

②$\sigma^*_{ij}=(\delta_{ik}\delta_{jl}-\beta_{ijkl})\sigma_{kl}$，$e_{ij}=D_{ij}$．由（3.6），（3.7）直接得

$$\pi_{2p}=\int_V(A^*+e_{ij}\sigma^*_{ij}-B^*-\bar{F}_k u_k)dV-T_p \tag{3.10}$$

$$\pi_{2c}=\int_V\left(B^*-A^*+\beta_{ijmn}e_{ij}\sigma_{mn}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)dV-T_c \tag{3.11}$$

π_{2p} 及 π_{2c} 是两类变量的变分原理之泛函，其欧拉方程将给出所需的方程组[7]．若 $\beta_{ijkl}=$

$\delta_{ik}\delta_{jl}$，则（3.10），（3.11）将失去一类欧拉方程，故 π_{2p1}，π_{2c1}（见表 1）为退化情况。

③分裂因子取某些特殊值，例如 $\beta_{ijkl}=\beta\delta_{ik}\delta_{jl}$，其中 β 为 V 内任意函数．此时，π_{qp},π_{qc}（$q=4,3,2$）变为仅含一个附加函数 β．继而令 $\beta=1$，0，又可得各种特殊形式的变分原理，其中包括已有的诸变分原理（[13]第 8 章）．

以上诸变分原理的泛函的内容都列于表 1，并用框图示于图 1．可清楚地看到各级变分

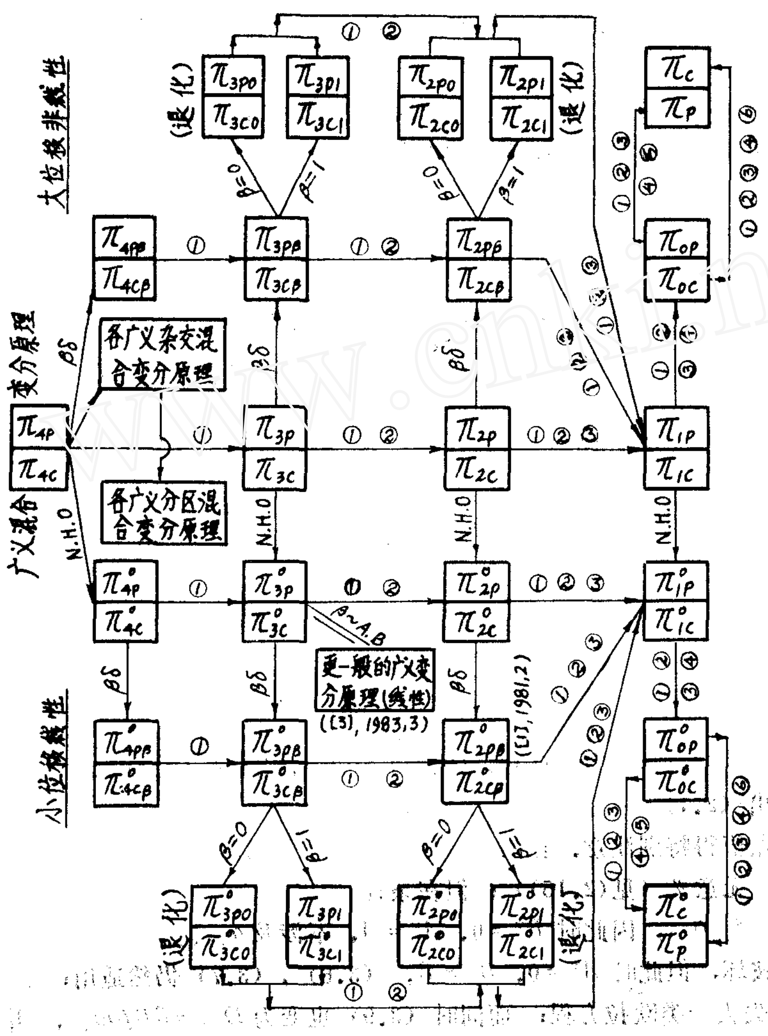

图 1　弹性力学变分原理对偶繁衍图

表 1 及图 1 的注释

1．圆圈中的数字表示约束条件或欧拉方程：

① $a^*_{ij}=(\delta_{ik}\delta_{jl}-\beta_{ijkl})\sigma_{kl}$

② $e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\equiv D_{ij}$

③ $\sigma_{ij}=\dfrac{\partial A}{\partial e_{ij}}$ 或 $e_{ij}=\dfrac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}$ 或 $D_{ij}=\dfrac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}$

④ $[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\overline{F}_k\equiv L_k=0$ 或 $\left[(\delta_{ki}+u_{k,i})\dfrac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right]_{,j}+\overline{F}_k=0$

⑤ $u_i\Big|_{S_u}=\overline{u}_i$　　　　⑥ $P_i\Big|_{S_p}=\overline{P}_i$

（对于小位移线性情况，应略去其中的高阶小量．）

2.
$$T_p=\int_{S_p}\overline{P}_iu_idS+\int_{S_u}(u_i-\overline{u}_i)P_idS$$
$$T_c=\int_{S_p}(P_i-\overline{P}_i)u_idS+\int_{S_u}P_i\overline{u}_idS$$

3. σ^*_{ij} 为分裂应力；β_{ijkl} 为分裂因子；A,B 为应变能密度和余能密度；A^*,B^* 见（2.17），（2.18），在线性情况见（5.4）；π^0_{qp}，$\pi^0_{qc}(q=4,3,2,1,0)$ 等为对应的线性情况；各广义杂交混合及广义分区混合变分原理的泛函见（4.1），（4.2），（5.12），（5.13），（5.15）．

4. 缩写记号：N.H.O 为略去高阶小量；σ^* 为 σ^*_{ij}；σ 为 σ_{ij}；e 为 e_{ij}；u 为 u_i；$u_{(s)}$ 为 $u_i|_s$；$u_{(s_p)}$ 为 $u_i|_{s_p}$；$P_{(s)}$ 为 $P_i|_s$；$P_{(s_u)}$ 为 $P_i|_{s_u}$；$\beta\delta$ 为 $\beta\delta_{ik}\delta_{jl}$；$\beta\sim A,B$ 为 $\beta_{ijmn}=-2A_{ijkl}b_{klmn}$ 或 $\beta_{ijst}=2B_{ijkl}b_{klst}+\delta_{is}\delta_{jt}$；$A_{ijkl}$，$B_{ijkl}$，$b_{klmn}$ 见[3]．

5. “退化”是指不额外施加约束条件，但自动失去一欧拉方程．

原理的“繁衍”过程．在每一级中，都有实质相同但形式不同的两种泛函表达式 π_{qp} 及 π_{qc}，称它们为对偶形式．在表1和图1中，从 π_{4p}，π_{4c} 开始，施以不同约束条件可繁衍出各级泛函，但若各条件的施加次序不同，还可有异于表1和图1的内容和形式，此处不再列举．以上诸结论的详细论证可参看[7]．

Ⅳ．广义杂交混合及广义分区混合变分原理

一些作者提出了分区变分原理[13,17]，这意味着在 V 内有限个不同的区域上使用不同形式的泛函（势能、余能及广义形式）．实际上，前面所建立的广义混合变分原理本身，在整个 V 内的每一点上都可使用不同的泛函（β_{ijkl} 在不同点上取不同值即是）．因此，也可说它们是在不可数的无限多个“域”上的“分区”变分原理．但前面的诸泛函中，位移需在 V 内连续．为便于有限元上的应用，可放松这一要求．设把 V 分作 N 个有限的子域（单元），记作 $V_m(m=1,2,\cdots,N)$，把包围每个子域的闭曲面记作 $S_{(m)}$，其给定 $\overline{u}_i$ 的部分记作 $S_{u(m)}$，给定 $\overline{P}_i$ 的部分为 $S_{p(m)}$；把关联于 $V_{(m)}$ 的诸量用（m）予以区分，与之相邻者为（m'）．记表1中各泛函的体积分部分为 $\hat{\pi}_{qp}$，$\hat{\pi}_{qc}(q=4,3,2,1)$．在 $S_{(m)}$ 上独立地定义位移，记作 $\tilde{u}_i$．利用拉氏乘子法或由上述各变分原理直接推导，可得放松协调条件的变分原理[7]，其泛函记作 H_{qp}，$H_{qc}(q=4,3,2,1)$：

$$H_{qp}=\sum_{m=1}^{N}\left[\hat{\pi}^{(m)}_{qp}-\int_{S_{(m)}}(u^{(m)}_i-\tilde{u}_i)P^{(m)}_idS-\int_{S_{p(m)}}\overline{P}_i\tilde{u}_idS-\int_{S_{u(m)}}(\tilde{u}_i-\overline{u}_i)P^{(m)}_idS\right] \tag{4.1}$$

$$H_{qc}=\sum_{m=1}\left[\hat{\pi}_{qc}^{(m)}-\int_{S_{(m)}}P_i^{(m)}\tilde{u}_i dS+\int_{S_{p(m)}}\overline{P}_i\tilde{u}_i dS\right.$$

$$\left.+\int_{S_{u(m)}}(\tilde{u}_i-\overline{u}_i)P_i^{(m)}dS\right] \tag{4.2}$$

在 H_{qp}，H_{qc} 中，除原有对应的独立变量中，还有 $\tilde{u}_i$，其欧拉方程给出诸子域上的基本方程组外，还给出各子域交界处的协调条件

$$u_i^{(m)}=u_i^{(m')}=\tilde{u}_i \tag{4.3}$$

$$P_i^{(m)}+P_i^{(m')}=0 \tag{4.4}$$

可称它们为广义杂交混合变分原理（大位移非线性）.

π_{qp}，π_{qc} 中的 $\tilde{u}_i$ 是在 $S_{(m)}$ 独立定义的位移；在有限元分析中，可在 $S_{(m)}$ 的各点间独立插值．而其它各量都可在各自的 $V_{(m)}$ 内插值，最后，通过与 $\tilde{u}_i$ 的交叉项把它们凝聚到 $\tilde{u}_i$ 的结点位移上去，从而获得关于 $\tilde{u}_i$ 的刚度矩阵．然而这种凝聚难以用显式表达，因为是非线性的．

若在 $V_{(m)}$ 及 $V_{(m')}$ 的交界面上令

$$\tilde{u}_i=(cu_i^{(m)}+c'u_i^{(m')})/(c+c') \tag{4.5}$$

其中 c，c' 为定义在交界面上的任意函数，但 $c'+c\neq 0$（若 $S_{(m)}$ 的某部分为外边界，应取 $c'=0$），此时当称（4.1），(4.2)为广义分区混合变分原理．列如，取 $c=c'$，则其特例为

$$H_{qp}=\sum_{m=1}^{N}\left[\hat{\pi}_{qp}^{(m)}-\frac{1}{2}\int_{S_0}(u_i^{(m)}-u_i^{(m')})P_i^{(m)}dS-\int_{S_{p(m)}}\overline{P}_i u_i^{(m)}dS\right.$$

$$\left.-\int_{S_{u(m)}}(u_i^{(m)}-\overline{u}_i)P_i^{(m)}dS\right] \tag{4.6}$$

$$H_{qc}=\sum_{m=1}^{N}\left[\hat{\pi}_{qc}^{(m)}-\frac{1}{2}\int_{S_0}u_i^{(m)}(P_i^{(m)}+P_i^{(m')})dS-\int_{S_{p(m)}}(P_i^{(m)}-\overline{P}_i)u_i^{(m)}dS\right.$$

$$\left.-\int_{S_{u(m)}}\overline{u}_i P_i^{(m)}dS\right] \qquad (q=4,3,2,1) \tag{4.7}$$

其中 S_0 是 $V_{(m)}$ 与 $V_{(m')}$ 的交界面．若进而令 $\beta_{ijkl}=\delta_{ijkl}$ 和 $\beta_{ijkl}=0$，则（4.6），（4.7）中的 H_{3p}，H_{3c} 给出特例：

$$H_{3p1}=\sum_{m=1}^{N}\left\{\int_{V_{(m)}}[A-(e_{ij}-D_{ij})\sigma_{ij}-\overline{F}_k u_k]^{(m)}dV-\frac{1}{2}\int_{S_0}(u_i^{(m)}\right.$$

$$\left.-u_i^{(m')})P_i^{(m)}dS-\int_{S_{p(m)}}\overline{P}_i u_i^{(m)}dS-\int_{S_{u(m)}}(u_i^{(m)}-\overline{u}_i)P_i^{(m)}dS\right\} \tag{4.8}$$

$$H_{3c0}=\sum_{m=1}^{N}\left[\int_{V_{(m)}}\left(B+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}+L_k u_k\right)^{(m)}dV-\frac{1}{2}\int_{S_0}u_i^{(m)}(P_i^{(m)}\right.$$

$$\left.+P_i^{(m')})dS-\int_{S_{p(m)}}(P_i^{(m)}-\overline{P}_i)u_i^{(m)}dS-\int_{S_{u(m)}}\overline{u}_i P_i^{(m)}dS\right] \tag{4.9}$$

$\overset{\circ}{H}_{3pl}$，$\overset{\circ}{H}_{3c0}$ 即[13]（524，525页）的 $\pi_{\mathrm{I}F}$，$\pi_{\mathrm{II}F}$．

Ⅴ．小位移线性的广义混合变分原理

在小位移线性情况，方程组（2.1）—（2.6）不含高阶小量，且应变能密度或余能密度可表达为显式，记作 $A_0=(1/2)S_{ijkl}e_{kl}e_{ij}$，$B_0=(1/2)C_{ijkl}\sigma_{kl}\sigma_{ij}$；其中 S_{ijkl}，C_{ijkl} 为弹性常数和柔性常数．应力应变关系也有通用的显式（广义虎克定律）：

$$\sigma_{ij}=S_{ijkl}e_{kl} \quad \text{或} \quad e_{ij}=C_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{5.1}$$

于是，（2.9），（2.11），（2.14），（2.17），（2.18），（2.19）变为

$$\sigma_{ij}=\beta_{ijkl}S_{klmn}e_{mn}+\sigma^*_{ij} \tag{5.2}$$

$$\beta_{ijkl}S_{klst}=\beta_{stkl}S_{klij};\quad C_{ijkl}\alpha_{klst}=C_{stkl}\alpha_{klij} \tag{5.3}$$

$$A^*_0=\frac{1}{2}\beta_{mnkl}S_{klpq}e_{pq}e_{mn};\quad B^*_0=\frac{1}{2}C_{mnkl}\alpha_{klpq}\sigma^*_{pq}\sigma^*_{mn} \tag{5.4}$$

$$\sigma_{ij}=\beta_{ijkl}S_{klmn}e_{mn}+\sigma^*_{ij};\quad e_{ij}=C_{ijkl}\alpha_{klmn}\sigma^*_{mn} \tag{5.5}$$

注意小位移情况的 $P_i=\sigma_{ij}n_j$，把表1中诸泛函里的高阶小量略掉，且用 A_0，B_0，A^*_0，B^*_0 代表对应的量，并注意（3.3），（3.4）也略去高阶小量，就直接获得小位移情况的各广义混合变分原理的泛函表达式，记作 π^0_{4p}，π^0_{4c} 等；也标在图1中了．例如，

$$\pi^0_{4p}=\int_V\left[\frac{1}{2}\beta_{mnkl}S_{klpq}e_{pq}e_{mn}+e_{ij}(\sigma^*_{ij}-\sigma_{ij})-\frac{1}{2}C_{mnkl}\alpha_{klpq}\sigma^*_{pq}\sigma^*_{mn}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\sigma_{ij}-\overline{F}_k u_k\right]dV-T_p \tag{5.6}$$

$$\pi^0_{4c}=\int_V\left[e_{ij}(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})-\frac{1}{2}\beta_{mnkl}S_{klpq}e_{pq}e_{mn}+\frac{1}{2}C_{mnkl}\alpha_{klpq}\sigma^*_{pq}\sigma^*_{mn}\right.$$
$$\left.+(\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i)u_i\right]dV-T_c \tag{5.7}$$

把 u_i，e_{ij}，σ_{ij}，σ^*_{ij} 作为独立函数，π^0_{4p}，π^0_{4c} 的欧拉方程给出小位移线性理论的全部方程组，其中应力应变关系是与（5.1）等价的（5.5）．这是四变量的变分原理．又如，三变量的泛函为

$$\pi^0_{3p}=\int_V\left[\frac{1}{2}\beta_{mnkl}S_{klpq}e_{pq}e_{mn}-e_{ij}\beta_{ijmn}\sigma_{mn}+\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\sigma_{ij}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}C_{mnkl}\alpha_{klpq}\sigma^*_{pq}\sigma^*_{mn}-\overline{F}_i u_i\right]dV-T_p \tag{5.8}$$

$$\pi^0_{3c}=\int_V\left[\frac{1}{2}C_{mnkl}\alpha_{klpq}\sigma^*_{pq}\sigma^*_{mn}-\frac{1}{2}\beta_{mnkl}S_{klpq}e_{pq}e_{mn}+e_{ij}\beta_{ijmn}\sigma_{mn}\right.$$
$$\left.+(\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i)u_i\right]dV-T_c \tag{5.9}$$

其中 $\sigma^*_{ij}=(\delta_{ik}\delta_{jl}-\beta_{ijkl})\sigma_{kl}$ 为约束条件，独立函数是 u_i，e_{ij}，σ_{ij}．若令 $\beta_{ijmn}=-2A_{ijkl}C_{klmn}$ 或 $\beta_{ijmn}=\delta_{im}\delta_{jn}+2B_{ijkl}C_{klmn}$，其中 A_{ijkl}，B_{ijkl} 为[3]中的高次拉氏乘子，则 π^0_{3c}，π^0_{3p} 转变为[3]中的 $\pi_{G\mathrm{I}}$ 和 $\pi_{G\mathrm{II}}$（该文式（5.12），（6.1））．又如，二变量者：

$$\pi^0_{2p\beta}=\int_V[\beta A_0+(1-\beta)D_{ij}\sigma_{ij}-(1-\beta)B_0-\overline{F}_i u_i]dV-T_p \tag{5.10}$$

$$\pi^0_{2c\beta}=\int_V[(1-\beta)B_0-\beta A_0+\beta D_{ij}\sigma_{ij}+L_i u_i]dV-T_c \tag{5.11}$$

这里的$\pi^0_{2p\beta}$就是［1］中曾称作分裂模量变分原理的泛函（该文式(23)）；它虽是本文广义混合变分原理的一个特殊情况（其中只含有一个可任意选择的附加函数β），然而它却是这类新型变分原理的最早开端．若在$\pi^0_{2p\beta}$，即[1]的式（23）中，令$\beta=1/2$，$u_i=\overline{u}_i$于S_u，则它就变为[18]的式（7）．

在（4.1），（4.2）中略去高阶小量，注意到（5.1）—（5.5）就得到小位移线性情况的广义杂交混合变分原理的泛函，记作H^0_{qp}，$H^0_{qc}(q=4,3,2,1)$：

$$H^0_{qp}=\sum_{m=1}^{N}\left[\hat{\mathring{\pi}}^{(m)}_{qp}-\int_{S_{(m)}}(u^{(m)}_i-\widetilde{u}_i)P^{(m)}_i dS-\int_{S_{p(m)}}\overline{P}_i\widetilde{u}_i dS\right.$$
$$\left.-\int_{S_{u(m)}}(\widetilde{u}_i-\overline{u}_i)P^{(m)}_i dS\right] \tag{5.12}$$

$$H^0_{qc}=\sum_{m=1}^{N}\left[\hat{\mathring{\pi}}^{(m)}_{qc}-\int_{S_{(m)}}P^{(m)}_i\widetilde{u}_i dS+\int_{S_{p(m)}}\overline{P}_i\widetilde{u}_i dS\right.$$
$$\left.+\int_{S_{u(m)}}(\widetilde{u}_i-\overline{u}_i)P^{(m)}_i dS\right] \tag{5.13}$$

式中，$\hat{\mathring{\pi}}_{qp}$，$\hat{\mathring{\pi}}_{qc}$为$\hat{\pi}_{pq}$，$\hat{\pi}_{qc}$中略去高阶小量者．把$H^0_{qp}$,$H^0_{qc}$用于有限元分析，就可把诸单元上的量用显式凝聚到$\widetilde{u}_i$的结点位移上去（含有$\beta_{ijkl}$）．

若把（4.5）代入（5.12），（5.13），就得小位移线性的广义分区混合变分原理的泛函．其中β_{ijkl}取某些特殊值后，它们就转为现有的分区变分原理．如在诸子域的交界面上令$c=c'$，则（5.12），（5.13）中的$H^0_{3p1}(\beta_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl})$，$H^0_{3c0}(\beta_{ijkl}=0)$就转为［13］（471，472页）的$\pi_{\mathrm{I}H}$，$\pi_{\mathrm{II}H}$．考虑到，

$$\hat{\mathring{\pi}}^{(m)}_{qp}=\int_{S_{(m)}}u^{(m)}_i P^{(m)}_i dS-\hat{\mathring{\pi}}^{(m)}_{qc}\ (q=4,3,2,1) \tag{5.14}$$

在V内的N个子域中，对其中的N_c个子域，用（5.14）对（5.12）中的$\hat{\mathring{\pi}}^{(m)}_{qp}$进行变换，可得广义杂交混合变分原理的另一形式，其泛函记作$H^0_{qM}(q=4,3,2,1)$：

$$H^0_{qM}=\sum_{m=1}^{N-N_c}\left[\hat{\mathring{\pi}}^{(m)}_{qp}-\int_{S_{(m)}}(u^{(m)}_i-\widetilde{u}_i)P^{(m)}_i dS-\int_{S_{p(m)}}\overline{P}_i\widetilde{u}_i dS\right.$$
$$\left.-\int_{S_{u(m)}}(\widetilde{u}_i-\overline{u}_i)P^{(m)}_i dS\right]-\sum_{m=1}^{N_c}\left[\hat{\mathring{\pi}}^{(m)}_{qc}-\int_{S_{(m)}}\widetilde{u}_i P^{(m)}_i dS\right.$$
$$\left.+\int_{S_{p(m)}}\overline{P}_i\widetilde{u}_i dS+\int_{S_{u(m)}}(\widetilde{u}_i-\overline{u}_i)P^{(m)}_i dS\right] \tag{5.15}$$

若在诸子域的交界面上$\widetilde{u}_i$取（4.5）为表达式，则（5.15）又有不同形式；若进而令（4.5）

中的 $c'=0$，则（5.15）中的 $H^{*}_{3M1}(\beta_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl})$ 就变为［17］中式（36）的泛函 π（本段诸泛函最初发表在［7］中）.

Ⅵ. 弹性薄壳、薄板理论及杆系力学的广义混合变分原理

按前述思路，也可为弹性力学的工程理论，如薄壳、薄板理论及杆系力学，建立一套新型的变分原理. 这里只给出它们的一种特殊形式，也是最实用的形式，最初发表于[2].

关于薄壳，这里直接取用［19］中有关张量的记号，除特别声明者外，不再另加说明. 对于各向同性材料的薄壳，其二类独立变量的广义混合变分原理的泛函，记作 J_{2ps} 如下：

$$
\begin{aligned}
J_{2ps}=&\int_{\Omega}\Big\{\frac{1}{2}\beta_{e}F[(1-\mu)\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\alpha\gamma}+\mu\varepsilon^{2}]+(1-\beta_{e})\varepsilon^{\alpha\gamma}S_{\alpha\gamma}\\
&-\frac{1}{2}\frac{(1-\beta_{e})}{(1-\mu^{2})F}[(1+\mu)S^{\alpha\gamma}S_{\alpha\gamma}-\mu S^{2}]+\frac{1}{2}\beta_{d}D[(1-\mu)\beta^{\alpha\gamma}\beta_{\alpha\gamma}\\
&+\mu\beta^{2}]-(1-\beta_{d})\beta^{\alpha\gamma}H_{\alpha\gamma}-\frac{1}{2}\frac{(1-\beta_{d})}{(1-\mu^{2})D}[(1+\mu)H^{\alpha\gamma}H_{\alpha\gamma}-\mu H^{2}]\\
&-\overline{q}^{\alpha}u_{\alpha}-\overline{q}_{n}w\Big\}d\Omega-\int_{S_{p}}(\overline{Q}_{\nu\nu}u_{\nu}+\overline{Q}_{\nu t}u_{t}+\overline{Q}_{\nu n}w\\
&+\overline{M}_{\nu\nu}\theta_{\nu})dS_{t}-\int_{S_{u}}\Big[(u_{\nu}-\overline{u}_{\nu})Q_{\nu\nu}+(u_{t}-\overline{u}_{t})Q_{\nu t}\\
&+(w-\overline{w})Q_{\nu n}+(\theta_{\nu}-\overline{\theta}_{\nu})M_{\nu\nu}\Big]dS_{t}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

其中，Ω 为壳体的中面域，以曲面之坐标参数 x^{i} 标定各点，其厚度为 h；$\overline{q}^{\alpha}$，$\overline{q}_{n}$ 为给定之切向及法向载荷集度. Ω 的边界为 $S=S_{u}+S_{p}$，在 S_{p} 上给定边界力 $\overline{Q}_{\nu\nu}$，$\overline{Q}_{\nu t}$，$\overline{Q}_{\nu n}$，$\overline{M}_{\nu\nu}$，在 S_{u} 上给定位移 $\overline{u}_{\nu}=\nu^{\alpha}\overline{u}_{\alpha}$，$\overline{u}_{t}=t^{\alpha}\overline{u}_{\alpha}$，$\overline{\theta}_{\nu}=\nu^{\alpha}\overline{\theta}_{\alpha}$ 及 $\overline{w}$；w，u_{α}，θ_{α} 为壳体中面之法向位移、面内位移及角位移；t^{α}，ν^{α} 为 S 上单位切线矢及切法矢（它垂直于中曲面之法线 **n**，而 **t**，**n**，**ν** 构成 S 之正交三棱形）；S_{t} 为弧长. $F=\dfrac{Eh}{1-\mu^{2}}$，$D=\dfrac{Eh^{3}}{12(1-\mu^{2})}$，$E$ 为弹性模量，μ 为波桑系数. 诸角标 i,α,γ 等取 1,2；但 n,t,ν 只表示中面之法向、边界线之切向及切法向，它们在诸项中有重复时并不表示求和. β_{e} 和 β_{d} 是两个分裂因子，可任意选择，以调节面内的和弯曲的两种刚度. $\varepsilon=\varepsilon^{\alpha}_{\alpha}$，$\beta=\beta^{\alpha}_{\alpha}$，$S=S^{\alpha}_{\alpha}$，$H=H^{\alpha}_{\alpha}$. $\varepsilon^{\alpha\gamma}$，$\beta_{\alpha\gamma}$，$S^{\alpha\gamma}$，$H_{\alpha\gamma}$ 分别是[19]第八章所定义的面内应变张量、弯扭应变张量、面内内力张量及弯扭内力张量. $Q_{\nu\nu}$，$Q_{\nu t}$，$Q_{\nu n}$ 和 $M_{\nu\nu}$ 为边界力的缩写记号：

$$
\left.
\begin{aligned}
&Q_{\nu\nu}\equiv(S^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\gamma}H^{\gamma\beta})\nu_{\alpha}\nu_{\beta}+\tau_{t}H^{\alpha\beta}\nu_{\beta}t_{\alpha}\\
&Q_{\nu t}\equiv(S^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\gamma}H^{\gamma\beta}-\sigma_{t}H^{\alpha\beta})\nu_{\beta}t_{\alpha}\\
&Q_{\nu n}\equiv(\nabla_{\beta}H^{\alpha\beta})\nu_{\alpha}+\frac{d}{dS_{t}}(H^{\alpha\beta}\nu_{\beta}t_{\alpha})\\
&M_{\nu\nu}\equiv H^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\nu_{\beta}
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.2}
$$

应变 ε_{ij}，β_{ij} 与位移 u_{i}，w 之间的关系是

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - b_{ij} w \\
\beta_{ij} &= -\frac{1}{2}\left[\nabla_i \theta_j + \nabla_j \theta_i - b^\alpha_i \nabla_j u_\alpha - b^\alpha_j \nabla_i u_\alpha + (b^\alpha_i b_{j\alpha} + b^\alpha_j b_{i\alpha}) w\right] \\
\theta_i &= -\left(\frac{\partial w}{\partial x^i} + b^\alpha_i u_\alpha\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6.3}
$$

其中，∇_i 为曲面上的协变导数，b_{ij} 为曲面之第二基本齐式之系数，σ_t 为曲面之法曲率，τ_t 为测地扭率．薄壳理论的广义混合变分原理表述为：将 u_i，w，S_{ij}，H_{ij} 及 $Q_{\nu\nu}$，$Q_{\nu t}$，$Q_{\nu n}$，$M_{\nu\nu}$ 作为泛函 J_{2ps} 的独立函数，则其欧拉方程给出一套等价的平衡方程、应力应变关系及边界条件；它们与通常之方程组（见［19］第八章）完全等价．其证明方法可参看[2].

关于薄板，可视为曲率为零的壳体，由（6.1）直接获得广义混合变分原理的泛函；其形式与（6.1）同，但（6.2），(6.3) 中须令 $b_{\alpha\beta}=\sigma_t=\tau_t=0$.

关于杆件系统，可由（6.1）向一维问题简化而得其泛函；也可直接建立．平面直杆系的广义混合变分原理的泛函记作 J_{2pb}，表达式为

$$
\begin{aligned}
J_{2pb} = \sum\Bigg\{\int_L\Bigg[&\frac{1}{2}\beta_e EA\varepsilon^2 + (1-\beta_e)\varepsilon N - \frac{(1-\beta_e)}{2EA}N^2 + \frac{1}{2}\beta_d EI x^2 \\
&+ (1-\beta_d)xM - \frac{(1-\beta_d)}{2EI}M^2 - (\overline{P}_s u + \overline{P}_n w)\Bigg]dS\Bigg\} - \{\overline{Q}\}^T\{D\} \\
&- \{Q\}^T(\{D\} - \{\overline{D}\})
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

其中，E 是弹性模量，A 是杆件横截面面积，I 是截面惯矩，L 是杆长，S 是轴线．$\varepsilon=du/dS$，$x=d^2w/dS^2$，N，M 分别是轴向应变、弯曲应变、轴力和弯矩；u，w，$\overline{P}_s$，$\overline{P}_n$ 是轴向、横向位移和载荷集度．$\{Q\}$ 是诸杆端提供的结点力，$\{D\}$ 是结点位移，$\{\overline{Q}\}$，$\{\overline{D}\}$ 是给定的结点力矢和位移矢；都在整体坐标系中．β_e 和 β_d 是两个任意的分裂因子，以调节诸杆之轴向和弯曲刚度．$\sum$ 号遍及诸杆．杆系的广义混合变分原理可表述如下：将 $u, w, N, M, \{Q\}, \{D\}$ 作为泛函 J_{2pb} 的独立函数，其欧拉方程给出与通常形式完全等价的平衡方程、内力变形关系及边界条件．

此原理已在结构矩阵分析中得到应用[5]．

Ⅶ．广义混合变分原理的应用

可以说，变分原理的各广义形式可有无限多种，我们所关心的主要是它们的理论和应用价值．

本文所介绍的广义混合变分原理，在理论上，它可把弹性理论中现有的各种线性、非线性问题的变分原理统一在一个有机的框架中（见表１及图１），进一步显示出它们之间的内在联系．在应用上，以它们为基础建立的有限元新模式，称为有限元广义混合法，有如下特点和优点：①利用分裂因子的选择性，可调节有限元模型的软硬程度，从而提高数值解的精度；②利用分裂因子，可处理通常有限元分析中十分棘手的病态问题．虽然它们的应用数量尚不多，但已有的算例已显示出其巨大潜力．

1981年，［4,5］首次给出应用算例，进行了比较计算．结果表明，新法果然有提高精度

的好处；且特取了两个病态问题，用通常之位移法和新方法同时计算，结果，前者面目全非，后者则令人十分满意。

广义混合法能处理病态问题这一新苗头提示我们，可利用它来计算各种复杂介质的问题，如极不均匀体，极端各向异性体，不可压缩或几乎不可压缩体，板壳及各种组合结构；这些问题在通常有限元法中往往出现病态。

1983 年，[6] 将新法的杂交形式用于薄板分析。

至此，尚有一个问题有待解决：应如何选择分裂因子，以使有限元的数值解答最佳？这是应用中的一个重要问题。为了解决此问题，[7] 提出了合理选择分裂因子的一般准则。这个准则可表达为

$$\delta_\beta \widetilde{K} = 0 \tag{7.1}$$

即弹性理论有限元法中任一待求的量，记作 $\widetilde{K}$（可以是位移、应变、应力或其它量如应力强度因子等），对分裂因子的偏变分等于零。这里，β 是前面所提到的任何一种分裂因子的缩写。

[8，9] 结合这个准则把有限元广义混合法应用于断裂力学，计算了应力强度因子，显示出这个准则的正确性和有效性。图 2 为根据计算结果所绘制的应力强度因子 K_I 与分裂因子 β 的关系曲线。可以看出，当 $\beta=10^{-4}$ 左右时，即可以认为 $\delta_\beta K_I=0$ 已被满足。故对于应力强度因子的计算，单个分裂因子的最优值可取作 $\beta=10^{-4}$。此时，与已有的其它方法比较[20-22]，广义混合法的结果果然最佳（见 [8，9] 的表 1）。

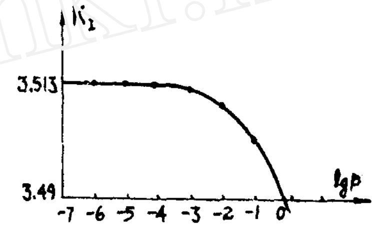

图 2

这里需要说明的是，（7.1）是一个一般性准则，对于各类题目或各种计算目的，可以有多种实现它的具体方法。如，[8，9] 针对应力强度因子问题的特点，所提供的选择分裂因子的方法是实现一般准则（7.1）的方法之一，当然还可有其它途径达到目的。又如，对于弹性体不均匀性产生的病态问题，[4，5] 也曾建议选择分裂因子的具体方法。但不论怎样，它们都应满足一般准则（7.1）。

Ⅷ. 结　语

广义混合变分原理在其最初提出时的 [1] 中，曾称作分裂模量变分原理，而 [3] 称作更一般的广义变分原理。[1] 和 [3] 都是小位移线性情况。[7] 首次对大位移非线性情况建立了广义混合变原理。

新型变分原理的主要特点是，它们的泛函中含有可任意选择的附加函数，其欧拉方程与弹性理论中的边值问题完全等价，但形式不同。这种等价形式可有无限多个，胡海昌[23] 指出四种建立等价形式的方法；同时指出，重要的事情在于考察它是否带来实用的或理论的好处。

广义混合变分原理（3.1），（3.2）能直接给出线性、非线性弹性理论中几乎所有已有的变分原理；它们在有限元分析的应用中，也显示出独特的效果，尤其在病态问上，其效果尤为喜人。

若单纯从提高数值解的精度上着眼，变分原理中的分裂因子是数值方法中的一种参数，而利用附加参数提高数值解之精度的思想是老早就被人们熟悉的，例如，迭代法解方程组时所用的“松弛因子”[24]，里茨法解题时引入的任意常数或函数[25]等．而分裂因子这个参数，则是把它送上了更高一层的理论高度，使它具有明显的物理概念，从而更明确地发挥它的特殊效力．

有限元广义混合法只是有了一些初步的应用，尤其在各种复杂的病态问题、非线性问题中，还有待于广泛实践．读者可以在这些方面进行深入、广泛的研究和应用，发挥出新方法的潜力，使之为工程实际直接服务．

参 考 文 献

1 荣廷玉，弹性力学分裂模量变分原理，西南交通大学学报，1（1981年2月）．

2 ——，弹性薄壳、薄板理论及杆系力学分裂刚度变分原理，西南交通大学校庆科学报告会论文集（上）（1981年10月）；中国土木工程学会计算机应用学会第1次学术交流会，论文资料，昆明（1981年12月）．

3 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，4，2（1983）．

4 荣廷玉，弹性力学有限元分裂模量法，西南交通大学学报，2（1981年5月）．

5 ——，结构矩阵分析分裂刚度法，同[2]．

6 陈万吉，更一般的杂交广义变分原理及有限元模型，大连工学院工程力学研究所科研资料，83-3011（1983年4月）．

7 荣廷玉，弹性力学广义混合变分原理及有限元广义混合法，四川省第1届计算力学学术论文报告会论文集，卷1（1983年11月）．

8 ——，弹性力学有限元广义混合新模式及其在断裂力学中的应用，中国土木工程学会计算机应用学会第2届学术交流会，宁波（1984，5，31—6，4）．

9 Rong Tingyu（荣廷玉），A new generalized mixed FEM model and its application to fracture mechanics, Proc. 2nd Int. Conf. on Computing in Civ. Eng., Hangzou, June 5—9 (1985): 939—946.

10 Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, Mc Graw-Hill (1967).

11 ——, The Finite Element Method, Mc Graw-Hill (1977).

12 Washizu K., Variational Method in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press (1968), (1975).

13 钱伟长，变分法及有限元（上），科学出版社（1980）．

14 胡海昌，弹性力学的变分原理及其应用，科学出版社（1981）．

15 诺沃日洛夫著，朱兆祥译，非线性弹性力学基础，科学出版社（1958）．

16 Green A. E., Zerna W., Theoretical Elasticity (1954).

17 龙驭球，弹性力学中的分区广义变分原理，上海力学，2，3（1981）．

18 Liang Guoping（梁国平），Fu Zizhi（傅子智），A new method for the constrution element, Proc. Int. Conf. on Finite Element Method, Shanghai (2—6, August, 1982): 593—599.

19 Черных К. Ф., Линейная теория оболочек, II, Изд. Ленинградского Университета (1964).

20 钱伟长等，在奇异项上叠加有限元法计算应力强度因子，清华大学学报，2（1980）．

21 Benzley S. E., Representation of singularities with isoparametric finite elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8** (1974): 537—545.

22 Keer L. M., Freedman J. M., Tensile strip with edge cracks, *Int. J. Eng. Sci.*, **11** (1973): 1265—1275.

23 胡海昌，弹性力学变分原理选讲，在吉林大学讲学的讲义（1984）．

24 Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, ФМ (1960).

25 Courant R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, *Bull. Am. Math. Soc.*, **49**, 1 (1943).

GENERALIZED MIXED VARIATIONAL PRINCIPLE AND FEM IN ELASTICITY

Rong Ting-yu

(Southwest Jiaotong University)

Abstract A new type of variational principle in elasticity, called the *generalized mixed variational principle*, has been developed in recent years. Its distinguished feature is that its functional contains some arbitrary additional function, called the *splitting factor*. This new principle unifies all the main existing variational principles in elasticity into one frame and brings to light a more profound relationship among them. In application, it offers us a fresh mathematical means to establish new models for finite element analysis. These models have shown their advantages: by regulating the splitting factor, they give better numerical solutions, and especially, can be used to cope with the thorny ill-conditioned problems in FEM.

This paper gives a summary of the new variational principles in both linear and nonlinear theories of elasticity and presents some discussion on their applications to FEM.

Keywords *elasticity; generalized mixed variational principle; splitting factor; ill-conditioned problem in FEM; generalized mixed FEM*

（上接第 277 页）

25 *A. Franck* und *J. Meissner:* Rheol. Acta im Druck.
26 *A.S. Lodge:* Elastic Liquids, Academic Press, London 1964.
27 *G. Astarita* und *G. Marrucci:* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics, McGraw Hill, London 1974.
28 *H. Janeschitz-Kriegl:* Polymer Melt Rheology and Flow Birefringence, Springer-Verlag, Berlin 1983.
29 *S.M. Freemann* und *K. Weissenberg:* Nature *161*, 324 (1948).
30 *A. Jobling* und *J.E. Roberts* in: Rheology, Vol. II, F.R. Eirich (Herausg.), Academic Press, New York 1958.
31 *T. Kotaka, M. Kurata* und *T. Tamura:* J. Appl. Phys. *30*, 1705 (1959).
32 *E.B. Christiansen* und *W.R. Leppard:* Trans. Soc. Rheol. *18*, 65 (1974).
33 *H.W. Gao, S. Ramachandran* und *E.B. Christiansen:* J. Rheol. *25*, 213 (1981).
34 *W.F.O. Pollett:* Brit. J. Appl. Phys. *6*, 199 (1955).
35 *W.F.O. Pollett* und *A.H. Cross:* J. Sci. Indstr. *27*, 209 (1950).
36 *J. Meissner:* J. Appl. Polymer Sci. *16*, 2877 (1972).
37 *J. Meissner:* Rheol. Acta *14*, 201 (1975).
38 *W. Gleissle:* Dissertation TH Karlsruhe 1978.
39 *H.M. Laun:* Rheol. Acta *17*, 1 (1978).
40 *M.H. Wagner:* Rheol. Acta *15*, 136 (1976).
41 *M.H. Wagner* und *J. Meissner:* Makromol. Chemie *181*, 1533 (1980).
42 *M. Fukuda, K. Osaki* und *M. Kurata:* J. Polymer Sci., Polymer Physics Ed. *13*, 1563 (1975).
43 *K. Osaki, S. Kimara* und *M. Kurata:* J. Rheol. *25*, 549 (1981).
44 *M.H. Wagner* und *S.E. Stephenson:* Rheol. Acta *18*, 463 (1979).
45 *H.C. Booij:* Rheol. Acta *5*, 215 (1966).
46 *T. Kataoka* und *S. Ueda:* J. Polymer Sci. A-2, 7, 475 (1969).
47 *J.M. Simmons:* Rheol. Acta *7*, 184 (1968).
48 *H.M. Laun* und *J. Meissner:* Rheol. Acta *19*, 60 (1980).
49 *H.M. Laun:* Rheol. Acta *21*, 464 (1982).
50 *H. Hürlimann, J. Meissner, L. Berger* und *S. Gernet*, in Vorbereitung.
51 *L. Berger*, unveröffentlicht.

李素琴译自：*Chimia*, **38**, 2 (1984)；35—45. **（刘大有校）**