

# 脆性断裂的微观机理和非平衡统计特性

邢修三\*

(中国原子能科学研究院)

**关键词** 脆性断裂; 非平衡统计; 微裂纹; 演化方程; 位错机理; 分布函数; 断裂几率

## I. 引言

如何才能将断裂的微观机理与宏观特性结合起来, 把断裂理论建立于微裂纹演化的微动力学基础上, 从而统一导出所有重要的宏观力学量并以某些更基本的物理量表示之? 这是人们为实现材料的强度和韧性设计必需解决的一个重要理论课题. 就脆性断裂来说, 尽管现有几个主要代表性的理论如断裂力学理论<sup>[1]</sup>、位错理论<sup>[1]</sup>和统计理论<sup>[2,3]</sup>都各取得一定成就, 但就其理论框架来说, 由于明显的局限性<sup>[4]</sup>, 却难以发展成可供指导设计的理论. 因此, 人们在探索微观与宏观相结合的断裂理论<sup>[4-8]</sup>. 最近的工作表明<sup>[4,9,10]</sup>: 从微裂纹演化的位错机理出发用非平衡统计的概念和方法, 有可能对脆性断裂过程的本质进行微观与宏观相结合的理论概括, 并能统一求得微裂纹的扩展速率、微裂纹分布函数、断裂几率、延伸率、断裂强度、塑性功、裂纹扩展力、断裂韧性等宏观力学量以及它们的统计分布.

为了抓住本质, 我们从最基本的实验事实出发, 将脆性断裂的物理图象概括如下<sup>[4]</sup>:

1. 脆性断裂过程是非平衡的不可逆动力学过程, 而其本质则是在小塑性变形过程中微裂纹成核长大和传播的过程.
2. 整个断裂过程基本上可看成由两个阶段组成, 即大量微裂纹的成核长大阶段和单个主裂纹的传播阶段.
3. 滑移位错及其堆积群为阐明微裂纹的成核长大提供合适的微观模型.
4. 微裂纹的演化过程遵守随机性的而不是确定性的规律, 因而整个脆性断裂的基本规律亦是统计性的. 这种统计性正是固体微观结构与宏观特性联系的桥梁.

本文主要围绕上面这些基本概念进行讨论.

## II. 微裂纹演化方程

在外应力作用下, 固体在断裂前, 其内部有大量不同大小的微裂纹在成核长大甚至合并(如两个小微裂纹合并成一个大微裂纹), 我们将这一阶段叫做微裂纹演化. 由于实际固体内部微观成分、缺陷、显微组织的不均匀性, 各个微裂纹的成核长大及其相互合并条件, 都将随机地变化. 因此我们将微裂纹系统的演化过程看成是非平衡统计过程, 或叫随机过程. 描述这种过程的将是一个微分方程或微分积分方程, 称作微裂纹的演化方程.

\* 现在工作单位: 北京工业学院应用物理系.

为简化起见, 我们只讨论形状相同的一维长度微裂纹, 并假设它们在固体内部的空间取向分布是均匀的, 同时, 鉴于固体内部微裂纹密度较小, 只需考虑两个微裂纹的合并, 略去三个以上的合并. 令  $t$  表示固体受外应力作用的时间,  $C$  表示微裂纹长度,  $\dot{C} \equiv \dot{C}(t, C)$  表示  $t$  时微裂纹  $C$  的平均长大速率, 密度分布函数  $N(t, C)dC$  表示  $t$  时单位体积内在长度  $C$  和  $C+dC$  间形成微裂纹的平均数目,  $q(t)$  表示  $t$  时单位时间单位体积内微裂纹成核的平均数目,  $\omega(C_i, C_j)$  表示微裂纹  $C_i$  和  $C_j$  在单位时间内合并成微裂纹  $C$  的平均有效体积. 由于微裂纹成核长大和合并仅与当时及稍早的外应力和固体的微观结构有关, 而与其更早的历史条件无关, 故微裂纹系统的演化过程可看成是马尔可夫过程. 根据微裂纹数目平衡原理, 密度分布函数  $N(t, C)$  应遵守微分积分方程

$$\frac{\partial N(t, C)}{\partial t} = q(t) \delta(C - C_0) - \frac{\partial}{\partial C} [\dot{C}(t, C) N(t, C)] + \int dC_i \left[ \frac{1}{2} \omega(C_i, C_j) N(t, C_i) N(t, C_j) - \omega(C, C_j) N(t, C) N(t, C_j) \right] \quad (1)$$

其中  $C_0$  为微裂纹核的长度,  $\delta(C - C_0)$  为 Dirac 函数.

式 (1) 正是我们求得的微裂纹演化方程, 它描述系统动力学变量  $C$  的密度分布函数随时间演化的过程. 右边第一项是由于成核而引起微裂纹数目的增多, 第二项是由于长大而引起微裂纹数目的增多, 第三项和第四项各是由于合并而引起微裂纹数目的增减, 即微裂纹数目随时间的变化率来自三部分: 成核、长大和合并.

因两个微裂纹合并成一个, 式 (1) 积分号内的  $C_i, C_j$  和  $C$  间总存在一种关系, 使得  $C_i$  可由  $C_j$  和  $C$  表示, 从而可由方程中消去. 由于  $q(t), \dot{C}(t, C)$  和  $\omega(C_i, C_j)$  都是时间反演不对称的, 故式 (1) 反映了脆性断裂过程的不可逆性.

若已知  $q(t), \dot{C}(t, C)$  和  $\omega(C_i, C_j)$ , 就可由式 (1) 解出  $N(t, C)$ . 怎样才得知这些量? 这就要求从微裂纹演化的微观机理出发来进行理论推算, 本文下节将讨论这些问题.

本文仅讨论只存在成核和长大的情况. 这时可略去合并, 而式 (1) 变为

$$\frac{\partial N(t, C)}{\partial t} = q(t) \delta(C - C_0) - \frac{\partial}{\partial C} [\dot{C}(t, C) N(t, C)] \quad (2)$$

因假设导致断裂的微裂纹是在塑性变形过程中形成的, 未变形时无此种微裂纹, 且因材料未断裂时, 其内部不存在无限大的裂纹, 故式 (1), (2) 的起始条件和边界条件为

$$N(t=0, C) = 0, N(t, C \rightarrow \infty) = 0 \quad (3)$$

### III. 长大成核的位错机理

现在从位错机理出发来讨论微裂纹的长大和成核, 目的有二: 一是了解微裂纹的长大动力学, 另一是从微观机理求出式 (1), (2) 中的平均长大速率  $\dot{C}(t, C)$  和平均成核率  $q(t)$ .

1. 微裂纹长大动力学 根据单堆积位错群形成微裂纹模型 (图 1) [1, 11], 若要形成微裂纹, 堆积群中位错数目  $n$ , 需满足条件

$$n_p = \pi(1 - \nu) L \tau / b \mu \geq n_p^* \quad (4)$$

$n_p^0$  为使微裂纹成核所需的  $n_p$ ,  $b$  为布氏向量,  $\tau$  为作用于堆积位错群上的外加切应力,  $\sigma$  为垂直作用于微裂纹上的外加拉应力,  $L$  为滑移面长度,  $\mu$  为切变模量,  $\nu$  为泊松比,  $n$  为挤入微裂纹内的位错数目。

为求  $n_p^0$ , 我们用下述近似方法。若将微裂纹看成是个大位错, 处于坐标原点, 其布氏向量为  $nb$ , 则它反作用于堆积群中领首位错的应力<sup>[12]</sup>为

$$\tau_p = \frac{nb\mu}{2\pi(1-\nu)} \frac{x_0}{x_0^2 + \xi^2} \approx \frac{2n\mu}{9\pi(1-\nu)} \quad (5)$$

其中  $x_0 = 2b$ ,  $\xi = b/2(1-\nu)$ 。另一方面, 堆积群中所  
有位错作用于领首位错的应力为  $n_p\tau$ 。平衡时, 二者相等, 即

$$n_p\tau = \frac{2n\mu}{9\pi(1-\nu)} \quad \text{或} \quad n_p = \frac{4n\mu}{9\pi(1-\nu)\sigma} \quad (6)$$

其中  $\sigma = 2\tau$ 。当  $n = 2$  时, 看成微裂纹成核, 即微裂纹的成核条件为

$$n_p^0\tau_0 = 0.2\mu \quad (7)$$

$\tau_0$  为微裂纹成核所需的作用于堆积群上的外加切应力,  $\sigma_0 = 2\tau_0$ 。鉴于脆性断裂时外应力  $\sigma$  稍大于  $\sigma_0$  金属即将断裂, 故从式 (6) 可得近似式

$$n_p \approx \frac{4n\mu}{9\pi(1-\nu)\sigma_0} \quad (8)$$

$n = 2$  时式 (8) 与式 (6) 相等。

微裂纹的静态能为<sup>[13,14]</sup>

$$U = 2\gamma C - \frac{\pi(1-\nu)\sigma^2 C^2}{4\mu} - \frac{nb\sigma C}{2} - \frac{(nb)^2\mu}{4\pi(1-\nu)} \quad (9)$$

动能为<sup>[11]</sup>

$$T = k\rho\sigma^2 C^2/E^2 \quad (10)$$

$\gamma$  为表面能,  $E$  为杨氏模量,  $\rho$  为金属密度,  $k = 5.45$ 。不难证明<sup>[14]</sup>

$$C = C_k = \frac{2\gamma\mu}{\pi(1-\nu)\sigma^2} = \frac{\mu}{\pi(1-\nu)\sigma} nb \quad (11)$$

为  $U$  的极大值。将  $C_k$  时的外应力看成断裂强度  $\sigma_f$ , 则

$$\sigma_f = \left[ \frac{\gamma E}{\pi(1-\nu^2)C_k} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

若考虑到微裂纹扩展时需要消耗塑性功, 则式 (9) 中的  $\gamma$  应由  $G_{1c} + r \approx G_{1c}$  代替, 故

$$\sigma_f = \left[ \frac{G_{1c} E}{\pi(1-\nu)^2 C_f} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$G_{1c}$  正是裂纹扩展力, 其物理意义和数学表达式将于下节讨论。 $C_f$  就是式 (12) 中相应的  $C_k$ , 只因  $G_{1c}$  不同于  $\gamma$ , 故将两者以不同的下角标记之。根据能量守恒原理, 有

$$d(T+U)/dt = 0 \quad (14)$$

将式 (9), (10) 代入式 (14), 并求  $\sigma$ ,  $nb$ ,  $C$  及  $\dot{C}$  对  $t$  的微商, 即得

$$C\ddot{C} + \dot{C}^3 + \frac{\dot{\sigma}C\dot{C}^2}{\sigma} + \frac{E^2}{2k\rho\sigma^2C} \left| 2\gamma - \frac{nb\sigma}{2} - \frac{\pi(1-\nu)\sigma C^2}{2\mu} \right| - \frac{E^2}{2k\rho\sigma^2C} \left| \left( \frac{\sigma C}{2} + \frac{nb\mu}{2\pi(1-\nu)} \right) \frac{d(nb)}{dt} + \left( \frac{nbC}{2} + \frac{\pi(1-\nu)\sigma C^2}{2\mu} \right) \dot{\sigma} \right| = 0 \quad (15)$$

式中  $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$  为外应力的增加率,  $\ddot{C} = d\dot{C}/dt$  为微裂纹的长大加速度. 式 (15) 就是微裂纹的长大动力学方程, 它给出微裂纹的长度  $C$ , 长大速率  $\dot{C}$ , 长大加速度  $\ddot{C}$  与外应力  $\sigma$  及其它有关物理量之间的函数关系. 由于难以从式 (15) 解出  $\dot{C}$  的整个表示, 我们分  $C \ll C_k$  和  $C > C_k$  及  $C = C_k$  三个阶段求其近似解.

①  $C \ll C_k$  及小  $\dot{C}$  阶段. 由式 (15) 可得<sup>[4]</sup>

$$\dot{C} \approx \left( \frac{\sigma C}{4\gamma} + \frac{nb\mu}{4\pi(1-\nu)\gamma} \right) \frac{d(nb)}{dt} + \left( \frac{nbC}{4\gamma} + \frac{\pi(1-\nu)\sigma C^2}{4\gamma\mu} \right) \dot{\sigma} \quad (16)$$

由式 (4), (6), (8), 求得

$$nb = \frac{3\pi(1-\nu)}{2\mu} (bL)^{\frac{1}{2}} \sigma \quad (17)$$

$$\frac{d(nb)}{dt} = \frac{3\pi(1-\nu)}{2\mu} (bL)^{\frac{1}{2}} \dot{\sigma} \quad (18)$$

将式 (17), (18) 代入式 (16), 得

$$\dot{C} \approx \frac{\pi(1-\nu)}{4\gamma\mu} \left[ 3(bL)^{\frac{1}{2}} C + C^2 + \frac{4}{9} bL \right] \dot{\sigma} \quad (19)$$

这就是低速率时微裂纹长大速率的表达式. 若考虑到微裂纹扩展时需要消耗塑性功, 式 (19) 中的  $\gamma$  应由  $G_1$  代替. 由此可见, 根据本文长大动力学的结论, 尽管  $C < C_k$  时微裂纹在热力学上是稳定的, 但却能够慢速长大, 其重要条件之一就是  $\dot{\sigma} > 0$ . 若  $\dot{\sigma} = 0$ , 则  $\dot{C} = 0$ , 微裂纹永远保持其原始长度. 这就是为什么结构材料在低于其强度的走向常值静载荷下长期不会破坏的原因.

②  $C > C_k$  及大  $\dot{C}$  阶段. 裂纹在热力学上已不稳定, 由式 (15) 得<sup>[4]</sup>

$$C\ddot{C} + \dot{C}^2 - \dot{C}_m^2 \left( 1 - \frac{C_k}{C} \right) = 0 \quad (20)$$

$$\dot{C} = \dot{C}_m \left( 1 - \frac{2C_k}{C} + \frac{C_k^2}{C^2} + \frac{\dot{C}_k^2 C_k^2}{\dot{C}_m^2 C^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

$$\ddot{C} = \frac{\dot{C}_m^2 C_k}{C^2} \left( 1 - \frac{C_k}{C} - \frac{\dot{C}_k^2 C_k}{\dot{C}_m^2 C} \right) \quad (22)$$

其中  $\dot{C}_m = \left[ \frac{\pi(1-\nu^2)}{4k} \left( \frac{E}{\rho} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $\left( \frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$  为应力波在固体中的传播速率. 当  $C \rightarrow \infty$  时,  $\dot{C} \rightarrow \dot{C}_m$ , 即裂纹的极限传播速率接近于应力波在固体中的传播速率. 这结果已有很多论证<sup>[11]</sup>.

③  $C = C_k$ . 裂纹在热力学上处于临界不稳定,即将开始高速传播. 将此结果及由式(22)求得的  $\ddot{C}_k \approx 0$  代入式(15), 则式(15)变为  $\dot{C}_k^3 + p\dot{C}_k + l = 0$  形式<sup>[4]</sup>, 考虑  $\dot{C}_k$  应是正实数及三次方程解的性质, 得

$$\dot{C}_k = 2C_k \dot{\sigma} / 3\sigma \quad (23)$$

代入式(11), 得

$$\dot{C}_k = 2\mu\sigma nb / 3\pi(1-\nu)\sigma^2 \quad (23a)$$

2. 平均长大速率 现在来求实际金属内微裂纹长大速率的平均值. 上面分三阶段求  $\dot{C}$ , 那末式(1), (2)中的  $\dot{C}(t, C)$  该用哪个  $\dot{C}$  的平均值? 考虑到今后讨论强度和韧性时关心的是每个微裂纹开始传播的几率, 故我们要求的  $\dot{C}(t, C)$  应是传播时的平均长大速率. 由式(23a), 得

$$\dot{C}(t, C) = 2\mu\bar{n}b\dot{\sigma} / 3\pi(1-\nu)\sigma^2 \quad (24)$$

$\bar{n}$  为  $t$  时每个微裂纹中平均挤入的位错数目. 因一个微裂纹中挤入  $n$  个位错引起的变形  $nb/L$  由式(17)表示, 故单位体积内平均  $N$  个活动位错源都形成微裂纹且每个平均挤入  $\bar{n}$  个位错时, 其变形应为  $NL^2\bar{n}b$ , 代入式(17)得

$$NL^2\bar{n}b = \frac{3\pi(1-\nu)}{2} \left(\frac{b}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma}{\mu} \quad (25)$$

将式(25)代入式(24), 则

$$\dot{C}(t, C) = \left(\frac{b}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\dot{\sigma}}{NL^2\sigma} \quad (26)$$

若将塑性变形  $\epsilon$  代替式(26)中的时间  $t$ , 则得  $\epsilon$  时微裂纹  $C$  随  $\epsilon$  的平均长大速率

$$\frac{dC(\epsilon, C)}{d\epsilon} = \left(\frac{b}{L}\right) \frac{d\sigma/d\epsilon}{NL^2\sigma} \quad (27)$$

在金属中, 外应力  $\sigma$  和塑性变形  $\epsilon$  之间存在着普遍经验公式<sup>[15]</sup>

$$\sigma = A\epsilon^m, \quad d\sigma/d\epsilon = mA\epsilon^{m-1} \quad (28)$$

$A$  为强度系数,  $m$  为硬化指数. 由式(28), (27)得

$$\frac{dC(\epsilon, C)}{d\epsilon} = \left(\frac{b}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{m}{NL^2\epsilon} \quad (29)$$

即  $\dot{C}(t, C)$  和  $dC(\epsilon, C)/d\epsilon$  与  $C$  无关, 这实质上相当于各种不同大小的临界微裂纹都以相同的速率在长大. 显然, 这只是客观实际的一种近似.

3. 平均成核率 我们仍由单堆积位错群模型来求微裂纹的平均成核率  $q(\epsilon)$ . 设  $M$  为单位体积内形成微裂纹所需障碍(如第二相粒子)的平均数目,  $a$  为每个障碍的平均截面,  $a^{3/2}MN$  为单位体积内活动位错源与障碍相遇而形成微裂纹的潜在核的平均数目,  $N(\epsilon)$  为塑性变形  $\epsilon$  时单位体积内形成的微裂纹的总平均数, 则可求得<sup>[4]</sup>

$$dN(\epsilon) = \alpha [a^{3/2} MN - N(\epsilon)] d\sigma \quad (30)$$

$$N(\epsilon) = a^{3/2} MN (1 - e^{-\alpha A \epsilon^m}) \quad (31)$$

其中  $\alpha$  为单位外应力作用下每个潜在核形成微裂纹的几率。为求  $\alpha$ ，我们作如下的近似考虑：因  $dC/(C d\sigma)$  为微裂纹在每单位应力作用下的长大率，而成核与长大都是位错滑移的结果，潜在核长大到  $C_0$  时就是真正的核，故可取

$$\alpha = \left( \frac{1}{C} \frac{dC}{d\sigma} \right)_{C_0} \approx \frac{\pi(1-\nu)L\sigma_0}{36\gamma\mu} \quad (32)$$

在得到式 (32) 时，利用了式 (19) 且略去了其括号内前面较小的两项，并取  $C_0 = 4b$ 。

塑性变形  $\epsilon$  时微裂纹的平均成核率

$$q(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = \alpha a^{3/2} MNmA \epsilon^{m-1} e^{-\alpha A \epsilon^m} \quad (33)$$

在式 (31)，(33) 中都假定活动位错源密度  $N(\epsilon)$  与  $\epsilon$  无关。实际上， $N$  是随  $\epsilon$  变化的，故上式结果只是一种近似。

#### IV. 断裂韧性的微观物理基础

现在从微裂纹长大的位错机理出发来讨论裂纹扩展力  $G_{1c}$  和断裂韧性  $K_{1c}$ 。如上节所述，要使微裂纹扩展，堆积群中位错就需进一步滑移以将领首位错不断挤入微裂纹中，为此，外应力就需做塑性功。当外应力由  $\sigma$  提高到  $\sigma + d\sigma$  时，微裂纹的长度由  $C$  扩展到  $C + dC$ ，为使堆积位错群滑移以增加挤入微裂纹中的位错数目而于单位长度上增做的塑性功为<sup>[10]</sup>

$$dW_p = d\left(\frac{3}{8} n_p b L \sigma\right) = \frac{3}{8} n_p b L d\sigma$$

在得到此式时，注意到  $n_p$  个位错在滑移长度  $L$  上形成堆积群所产生的总滑移与布氏向量为  $n_p b$  的大位错移动  $(3/4)L$  所产生的滑移等价。微裂纹扩展单位面积所消耗的塑性功为

$$G = \frac{dW_p}{dC} = \frac{3}{8} n_p b L \frac{d\sigma}{dC} = \frac{3}{8} \frac{n_p b L}{dC/d\sigma} \quad (34)$$

$dC/d\sigma$  为微裂纹  $C$  对外应力  $\sigma$  的扩展速率。考虑到微裂纹长大到长度  $C_k$  时已处于临界不稳定，故一个金属试样的裂纹扩展力可定义为  $C_k$  时微裂纹扩展单位面积平均消耗的塑性功

$$G_{1c} = \frac{3}{8} \frac{\bar{n}_p b L}{(dC/d\sigma)_{C_k}} \quad (35)$$

由式 (27) 得

$$\left( \frac{dC}{d\sigma} \right)_{C_k} = \left( \frac{b}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{NL^2\sigma} \quad (36)$$

将  $\epsilon = NL^2 \bar{n}_p b$  及式 (36) 代入式 (35)，得

$$G_{1c} = \frac{3}{8} \left( \frac{L}{b} \right)^{\frac{1}{2}} L \sigma_f \epsilon_f \quad (37)$$

式 (37) 中的  $\sigma_f$  和  $\epsilon_f$  实际上就是  $C_k$  时的外应力和塑性变形  $\epsilon$ ，故按通常的观点可分别称之为断裂强度和延伸率。根据断裂力学，断裂韧性  $K_{1c}$  可定义为裂纹扩展力  $G_{1c}$  和杨氏模量

$E$  的几何平均值, 代入式 (37), 即得一个金属试样的断裂韧性

$$K_{1c} = \left( \frac{G_{1c} E}{1 - \nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{3}{8(1 - \nu^2)} \left( \frac{L}{b} \right)^{\frac{1}{2}} L E \sigma_f \epsilon_f \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

这就是我们从微裂纹长大的位错机理出发直接求得的基本结果. 它说明: 断裂韧性  $K_{1c}$  跟强度  $\sigma_f$ , 塑性  $\epsilon_f$  和弹性  $E$  三者乘积的平方根值成正比, 是三者的综合表现. 如果说  $\sigma_f$ ,  $\epsilon_f$  和  $E$  是金属的基本宏观力学量, 则  $L$  显然是一个微观物理量, 可见  $K_{1c}$  不能全部由几个宏观力学量来描述, 它必须同时至少由一个微观物理量参与来共同描述.

关于  $G_{1c}$  和  $K_{1c}$  的统计特性及其进一步的微观表示将于本文后面几节中讨论.

### V. 微裂纹分布函数

现在来求解  $N(\epsilon, C)$ . 考虑到微裂纹是在塑性变形过程中成核长大的, 我们用  $\epsilon$  代替式 (2) 中的  $t$ , 并将式 (29) 的  $dC(\epsilon, C)/d\epsilon$  和式 (32) 的  $q(\epsilon)$  代入式 (2), 且为简化计算, 令  $C_0 = 0$ , 则式 (2) 变为

$$\frac{\partial N(\epsilon, C)}{\partial \epsilon} = - \left( \frac{b}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{m}{NL^2 \epsilon} \frac{\partial N(\epsilon, C)}{\partial C} + \alpha a^{3/2} M N m A \epsilon^{m-1} e^{-\alpha A \epsilon^m} \delta(C) \quad (39)$$

利用条件 (3), 即可求得此方程的解为

$$N(\epsilon, C) = \left( \frac{L}{b} \right)^{\frac{1}{2}} a^{3/2} M N^2 L^2 \alpha A \epsilon^m \exp \left[ - \left( \frac{L}{b} \right)^{\frac{1}{2}} N L^2 C \right] \times \exp \left\{ - \alpha A \epsilon^m \exp \left[ - \left( \frac{L}{b} \right)^{\frac{1}{2}} N L^2 C \right] \right\} \quad (40)$$

这就是我们解得的微裂纹密度分布函数. 根据式 (40), 我们对高强度时效马氏体钢计算的结果如图 2 和图 3 所示. 图 2 给出当  $C$  确定时, 其  $N(\epsilon, C)$  随变形  $\epsilon$  增大而变化的情形; 图 3 给出当  $\epsilon$  确定时,  $N(\epsilon, C)$  随  $C$  增大而变化的情形, 其中当  $\epsilon \leq (1/\alpha A)^{1/m} = 8.9 \times 10^{-6}$  时  $N(\epsilon, C)$  无极大值. 在计算时, 各参数取值如下:  $m = 0.1$ ,  $A = 160 \text{ kg/mm}^2$ ,  $N = 5.4 \times 10^6 \text{ mm}^{-3}$ ,  $L = 10^{-2} \text{ mm}$ ,  $b = 3 \times 10^{-7} \text{ mm}$ ,  $a^{3/2} M = 3 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha \approx 1/50 \text{ mm}^2/\text{kg}$  (由式 (31) 估算出). 类似图 3 这样微裂纹分布形式, 已在某些金属试验中有所肯定<sup>[7,16]</sup>.

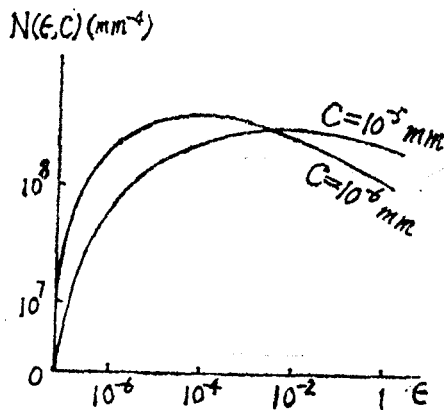


图 2

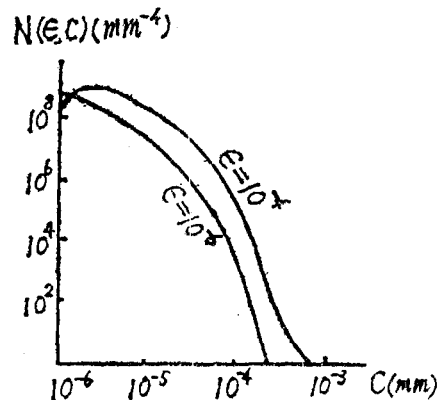


图 3

塑性变形  $\epsilon$  时金属单位体积内形成的微裂纹的总数

$$N(\epsilon) = \int_0^{\infty} N(\epsilon, C) dC = a^{3/2} MN(1 - e^{-aA\epsilon^m})$$

即式 (31) 给出的结果。

由式 (40) 求出微裂纹长度的几率分布函数

$$P(\epsilon, C) dC = \left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{NL^2 a A \epsilon^m}{(1 - e^{-aA\epsilon^m})} \exp\left[-\left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} NL^2 C\right] \\ \times \exp\left\{-aA\epsilon^m \exp\left[-\left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} NL^2 C\right]\right\} dC \quad (41)$$

$P(\epsilon, C) dC$  的意义为：塑性变形  $\epsilon$  时在单位体积内所有各种长度的微裂纹中找到长度在  $C$  和  $C + dC$  间的微裂纹的几率。显然， $P(\epsilon, C) dC$  满足归一化条件

$$\int_0^{\infty} P(\epsilon, C) dC = 1$$

## VI. 断裂几率与可靠性

前面讨论的都是微裂纹系统的演化问题，现在来讨论单个主裂纹的传播而导致固体的断裂。如何从前者过渡到后者？这需要利用最小强度的裂纹导致断裂的思想。由于裂纹是以接近声速的高速传播的，只要有一个裂纹传播，材料立即断裂，故人们把裂纹开始传播的应力叫做断裂强度或简称强度。若裂纹的演化是确定性的，当它满足式 (11) 时，就会开始传播而导致材料断裂。因而式 (11) 可看成是断裂的充要条件。但当断裂前期由于固体微观结构的不均匀性而使得其内部有很多微裂纹在随机演化时，则式 (11) 只是断裂的必要条件，并非充分条件。换言之，满足式 (11) 的微裂纹只有一定的传播几率，未必就能传播。若微裂纹长度在  $C$  和  $C + dC$  间的几率为  $P(\epsilon, C) dC$ ，则其对应的强度在  $\sigma$  和  $\sigma + d\sigma$  间的几率为  $P(\epsilon, \sigma) d\sigma$ ，根据概率论，应有  $P(\epsilon, \sigma) d\sigma = P(\epsilon, C) |dC|$ ，代入式 (11) 和 (41)，得微裂纹强度的几率分布函数

$$P(\epsilon, \sigma) d\sigma = \frac{4}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{NL^2 \gamma \mu a A \epsilon^m}{(1 - e^{-aA\epsilon^m}) \sigma^3} \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{NL^2 \gamma \mu}{\sigma^2}\right] \\ \times \exp\left\{-aA\epsilon^m \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{NL^2 \gamma \mu}{\sigma^2}\right]\right\} d\sigma \quad (42)$$

$P(\epsilon, \sigma) d\sigma$  的意义为：塑性变形  $\epsilon$  时在单位体积内所有各种强度的微裂纹中找到强度在  $\sigma$  和  $\sigma + d\sigma$  间的微裂纹的几率。显然，

$$\int_0^{\infty} P(\epsilon, \sigma) d\sigma = 1$$

设所研究的金属体积为  $V$ ，塑性变形  $\epsilon$  时共有  $N_1 = N(\epsilon)V$  个微裂纹。根据最小强度的裂纹导致断裂的思想， $N_1$  个独立的裂纹中任意一个裂纹的强度在 0 和  $\sigma$  间而其余  $N_1 - 1$  个裂纹的强度都大于  $\sigma$  的几率为

$$P_f(\sigma) = 1 - \left[1 - \int_0^{\sigma} P(\epsilon, \sigma) d\sigma\right]^{N_1} = 1 - \left[\int_0^{\infty} P(\epsilon, \sigma) d\sigma\right]^{N_1} \quad (43)$$

$P_f(\sigma)$  可直接理解为金属在强度 0 和  $\sigma$  间发生断裂的几率，或简称金属的断裂几率。显然，

$P_f(\sigma \rightarrow \infty) = 1$ ,  $P_f(\sigma = 0) = 0$ , 其物理意义为: 任何固体在 $\infty$ 的应力作用下都一定立即发生断裂, 而在无应力作用时总不会发生断裂. 换言之, 固体强度总是小于 $\infty$ 而大于 $0$ .

通常, 由于 $\int_0^\sigma P(\epsilon, \sigma) \ll 1$  和  $N_1 \gg 1$ , 故断裂几率 (43) 可变为近似式

$$P_f(\sigma) \approx 1 - \exp \left[ -N_1 \int_0^\sigma P(\epsilon, \sigma) d\sigma \right] \quad (44)$$

将式 (42) 代入式 (44) 并利用式 (28), (31), 得断裂几率的具体表示为

$$P_f(\sigma) \approx 1 - \exp \left\{ -a^{3/2} M N V \left[ 1 - \exp \left\{ -a \sigma \exp \left( -\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{N L^2 \gamma \mu}{\sigma^2} \right) \right\} \right] \right\} \quad (45)$$

由式 (45), 我们即可求得金属在外应力 $\sigma$ 作用下仍能安全承载而不发生断裂的几率, 即所谓的金属在外应力作用下的可靠性或安全性, 其数学表式为

$$R(\sigma) = 1 - P_f(\sigma) = \left[ \int_0^\infty P(\epsilon, \sigma) d\sigma \right]^{N_1} \approx \exp \left[ -N_1 \int_0^\sigma P(\epsilon, \sigma) d\sigma \right] \quad (46)$$

将式 (45) 代入式 (46), 得可靠性具体表示为

$$R(\sigma) \approx \exp \left\{ -a^{3/2} M N V \left[ 1 - \exp \left\{ -a \sigma \exp \left( -\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{N L^2 \gamma \mu}{\sigma^2} \right) \right\} \right] \right\} \quad (47)$$

显然,  $R(\sigma = 0) = 1$ ,  $R(\sigma \rightarrow \infty) = 0$ , 其物理意义为: 固体未受外应力作用时总是安全可靠的, 而当外应力增大到某个极值时就一定会发生断裂, 绝不安全可靠.

根据式 (45), (47) 对高强度时效马氏体钢算出的  $P_f(\sigma)$  和  $R(\sigma)$  随  $\sigma$  的变化如图 4 所示, 即随着应力的增大, 断裂几率从 0 上升而趋于 1, 可靠性从 1 下降而趋于 0, 这正是前面讨论的物理结果. 计算时,  $V = 10^3 \text{ mm}^3$ ,  $\gamma$  和  $\mu$  取铁的标准数据, 其他各参数与图 2 相同.

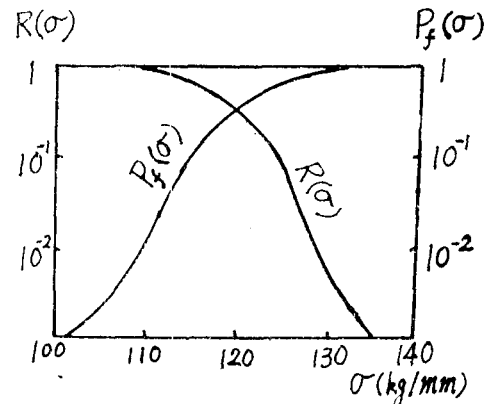


图 4

### Ⅶ. 宏观力学量的统计分布函数

如所周知, 对于宏观成分、工艺条件 (如冷加工和热处理等) 及外形尺寸相同的固体, 由于其内部微观成分、缺陷及显微组织的不均匀性, 各个试样的断裂强度和断裂韧性等与断裂有关的力学量是互不相同的, 有规律分散的, 充分显示其固有的统计特性. 为了描述这种统计规律, 我们引入统计分布函数 (或叫几率密度函数)  $W_f(F)dF$ , 它表示与断裂有关的某个力学量  $F$  在  $F$  和  $F+dF$  间的几率. 根据上面讨论结果, 立即可算出各个  $W_f(F)dF$  的具体表示.

先来计算强度  $\sigma$  的统计分布函数  $W_f(\sigma)d\sigma$ , 它表示金属强度在  $\sigma$  和  $\sigma+d\sigma$  间的几率. 由式 (43), (44), 应有

$$\begin{aligned} W_f(\sigma)d\sigma &= \frac{\partial P_f(\sigma)}{\partial \sigma} d\sigma = N_1 \left[ 1 - \int_0^\sigma P(\epsilon, \sigma) d\sigma \right]^{N_1-1} P(\epsilon, \sigma) d\sigma \\ &\approx N_1 \exp \left[ -N_1 \int_0^\sigma P(\epsilon, \sigma) d\sigma \right] P(\epsilon, \sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (48)$$

显然,  $W_f(\sigma)d\sigma$  是满归一化条件  $\int_0^{\infty} W_f(\sigma)d\sigma = 1$ , 这正是式 (43), (44) 中  $P_f(\sigma \rightarrow \infty) = 1$  的结果, 其物理意义为: 任何金属的强度总小于  $\infty$ . 将式 (28), (42) 代入式 (48), 得  $W_f(\sigma)d\sigma$  的具体表示

$$\begin{aligned}
 W_f(\sigma)d\sigma &= \frac{A}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a^{3/2}MN^2L^2\gamma\mu\alpha V}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{NL^2\gamma\mu}{\sigma^2}\right] \\
 &\times \exp\left\{-\alpha\sigma \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{NL^2\gamma\mu}{\sigma^2}\right]\right\} \\
 &\times \exp\left\{-a^{3/2}MNV \left[1 - \exp\left[-\alpha\sigma \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{NL^2\gamma\mu}{\sigma^2}\right]\right]\right]\right\} d\sigma \quad (49)
 \end{aligned}$$

为了寻找式(49)进一步可能的近似, 注意到当  $\sigma$  从  $100 \text{ kg/mm}^2$  逐渐减小时, 特别是当  $\sigma \rightarrow 0$  时,  $1 - \exp[-\alpha\sigma \exp(-\sigma_0^2/\sigma^2)]$  趋于零远比  $(A\sigma/\sigma_0)^{2\beta}$  快, 尽管如此, 当  $10 \text{ kg/mm}^2 \leq \sigma \leq 200 \text{ kg/mm}^2$  时, 更精确地说, 当  $0.023 \leq \sigma/\sigma_0 \leq 0.45$  时, 我们仍可认为近似式

$$1 - \exp\left[-\alpha\sigma \exp\left(-\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)\right] \approx \left(\frac{A\sigma}{\sigma_0}\right)^{2\beta}$$

粗糙地成立. 这儿  $\sigma_0^2 = \frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{\frac{1}{2}} NL^2\gamma\mu$ ,  $A = 1.72$ ,  $2\beta = 14$ . 在这种情况下, 式 (49) 变为

$$\begin{aligned}
 W_f(\sigma)d\sigma &\approx 2\beta \left[\frac{A(a^{3/2}MNV)^{1/2\beta}}{\sigma_0}\right]^{2\beta} \sigma^{(2\beta-1)} \\
 &\times \exp\left\{-\left[\frac{A(a^{3/2}MNV)^{1/2\beta}\sigma}{\sigma_0}\right]^{2\beta}\right\} d\sigma \quad (49a)
 \end{aligned}$$

这正是熟知的 Weibull 分布. 可见, 强度的 Weibull 分布只是较精确的分布函数式 (49) 的一种更为粗糙的近似.

现在来计算断裂韧性  $K$  的统计分布函数  $W_f(K)dK$ , 它表示金属的断裂韧性在  $K$  和  $K+dK$  间的几率, 定义为

$$\begin{aligned}
 W_f(K)dK &= N_1 \left[1 - \int_0^K P(\epsilon, K)dK\right]^{N_1-1} P(\epsilon, K)dK \\
 &\approx N_1 \exp\left[-N_1 \int_0^K P(\epsilon, K)dK\right] P(\epsilon, K)dK \quad (50)
 \end{aligned}$$

由式 (28), (38), 得

$$\sigma = \left[\frac{8(1-\nu^2)^2}{3LE} \left(\frac{b}{L}\right)^{1/2} A^{1/m}\right]^{m/(1+m)} K^{2m/(1+m)} = \theta K^{2m/(1+m)} \quad (51)$$

再利用  $P(\epsilon, K)dK = P(\epsilon, \sigma)|d\sigma|$ , 代入式 (51), (42), 得

$$\begin{aligned}
 P(\epsilon, K)dK &= \frac{3m}{\pi(1-\nu)(1+m)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu\alpha A\epsilon^m}{(1-e^{-\alpha A\epsilon^m})\theta^2 K^{(5m+1)/(1+m)}} \\
 &\times \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\theta^2 K^{4m/(1+m)}}\right]
 \end{aligned}$$

$$\times \exp\left\{-\alpha A \epsilon^m \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)}\left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\theta^2 K^{4m/(1+m)}}\right]\right\} dK \quad (52)$$

注意：由式 (50)，(52) 定义的  $W_f(K)dK$  满足条件

$$\int_0^\infty KW_f(K)dK = \int_0^\infty K(\sigma)W(\sigma)d\sigma = \bar{K}_{1c} \quad (53)$$

即由  $W_f(K)dK$  和由  $W_f(\sigma)d\sigma$  算出的断裂韧性的平均值  $\bar{K}_{1c}$  是相等的。式 (53) 的  $K(\sigma)$  可由式 (51) 的反函数求得。显然， $W_f(K)dK$  满足归一化条件  $\int_0^\infty W_f(K)dK = 1$ ，其物理意义为：任何金属的断裂韧性总小于  $\infty$ 。将式 (51)，(52) 代入式 (50)，得  $W_f(K)dK$  的具体表示

$$\begin{aligned} W_f(K)dK = & \frac{8m}{\pi(1-\nu)(1+m)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{a^{3.2}MN^2L^2\gamma\mu\alpha V}{\theta K^{(3m+1)/(1+m)}} \exp\left\{-\frac{2}{\pi(1-\nu)}\left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\theta^2 K^{4m/(1+m)}}\right\} \\ & \times \exp\left\{-\alpha\theta K^{2m/(1+m)} \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)}\left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\theta^2 K^{4m/(1+m)}}\right]\right\} \\ & \times \exp\left\{-a^{3.2}MNV\left[1 - \exp\left[-\alpha\theta K^{2m/(1+m)} \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)}\left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\theta^2 K^{4m/(1+m)}}\right]\right]\right]\right\} dK \end{aligned} \quad (54)$$

用类似式 (49a) 的方法，断裂韧性的统计分布函数 (54) 同样可变为更为粗糙的近似——Weibull 分布，这儿不再赘述。

再来计算裂纹扩展力  $G$  的统计分布函数  $W_f(G)dG$ ，它表示金属的裂纹扩展力在  $G$  和  $G+dG$  间的几率。与式 (50)，(51)，(52) 类似，应有

$$\begin{aligned} W_f(G)dG = & N_1 \left[1 - \int_0^G P(\epsilon, G)dG\right]^{N_1-1} P(\epsilon, G)dG \\ & \approx N_1 \exp\left[-N_1 \int_0^G P(\epsilon, G)dG\right] P(\epsilon, G)dG \end{aligned} \quad (55)$$

$$\sigma = \left[\frac{8}{3}\left(\frac{b}{L}\right)^{1.2} \frac{A^{1.2}}{L}\right]^{m/(1+m)} G^{m/(1+m)} = \theta_1 G^{m/(1+m)} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} P(\epsilon, G)dG = & \frac{4m}{\pi(1-\nu)(1+m)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu\alpha A \epsilon^m}{(1 - e^{-\alpha A \epsilon^m}) \theta_1^2 G^{(3m+1)/(1+m)}} \\ & \times \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)}\left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\theta_1^2 G^{2m/(1+m)}}\right] \\ & \times \exp\left\{-\alpha A \epsilon^m \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)}\left(\frac{L}{b}\right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\theta_1^2 G^{2m/(1+m)}}\right]\right\} dG \end{aligned} \quad (57)$$

同样， $W_f(G)dG$  满足归一化条件  $\int_0^\infty W_f(G)dG = 1$ ，其物理意义为：任何金属的裂纹扩展力总小于  $\infty$ 。将式 (56)，(57) 代入式 (55)，得  $W_f(G)dG$  的具体表示

$$\begin{aligned}
 W_f(G)dG &= \frac{4m}{\pi(1-\nu)(1+m)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{a^{3.2} MN^2 L^2 \gamma \mu \alpha V}{\theta_1^2 G^{(2m+1)/(1+m)}} \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{NL^2 \gamma \mu}{\theta_1^2 G^{2m/(1+m)}}\right] \\
 &\times \exp\left\{-\alpha \theta_1 G^{m/(1+m)} \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{NL^2 \gamma \mu}{\theta_1^2 G^{2m/(1+m)}}\right]\right\} \\
 &\times \exp\left\{-a^{3/2} MNV \left[1 - \exp\left[-\alpha \theta_1 G^{m/(1+m)} \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{NL^2 \gamma \mu}{\theta_1^2 G^{2m/(1+m)}}\right]\right]\right]\right\} dG
 \end{aligned} \tag{58}$$

与得到式 (54)，(58) 的方法类似，可得金属延伸率  $\epsilon$  在  $\epsilon$  和  $\epsilon+d\epsilon$  间的几率的统计分布函数  $W_f(\epsilon)d\epsilon$  的具体表示

$$\begin{aligned}
 W_f(\epsilon)d\epsilon &= \frac{4}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{a^{3.2} MN^2 L^2 \gamma \mu \alpha V}{A \epsilon^m} \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{NL^2 \gamma \mu}{A^2 \epsilon^{2m}}\right] \\
 &\times \exp\left\{-\alpha A \epsilon^m \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{NL^2 \gamma \mu}{A^2 \epsilon^{2m}}\right]\right\} \\
 &\times \exp\left\{-a^{3/2} MNV \left[1 - \exp\left[-\alpha A \epsilon^m \exp\left[-\frac{2}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{L}{b}\right)^{1.2} \frac{NL^2 \gamma \mu}{A^2 \epsilon^{2m}}\right]\right]\right]\right\} d\epsilon
 \end{aligned} \tag{59}$$

从式 (49)，(54)，(58)，(59) 可见，断裂强度、断裂韧性、裂纹扩展力及延伸率的统计分布函数都是由同一组物理量  $N, L, m, A, a, M, \gamma, \mu$  等及体积  $V$  决定的。固体的结构、成分组织及体积不同，其统计分布函数亦有所不同。根据式 (49)，(54)，(58)，(59) 对高强度时效马氏体钢算出的  $W_f(\sigma)$ ， $W_f(K)$ ， $W_f(G)$  及  $W_f(\epsilon)$  如图 5，图 6，图 7 及图 8 所示，其中各参量取值与图 2，图 3 及图 4 中的相同。

断裂强度的统计分布早为实验证实，断裂韧性的统计分布最近亦为实验证实<sup>[17]</sup>。至于裂纹扩展力和延伸率，是否遵守式 (58)，(59) 预言的统计分布规律，有待今后实验的检验。

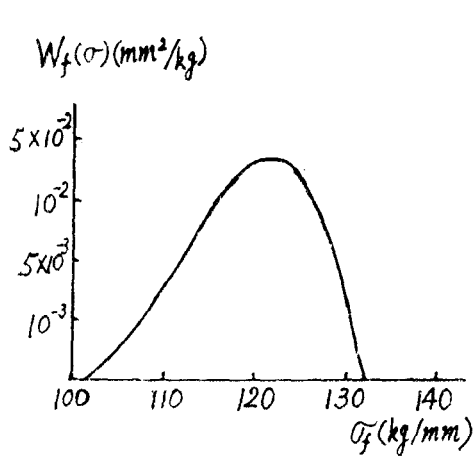


图 5

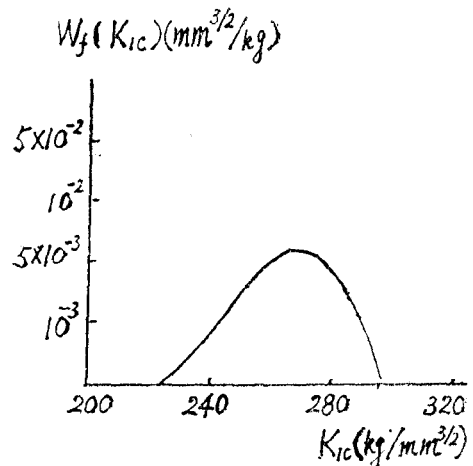


图 6

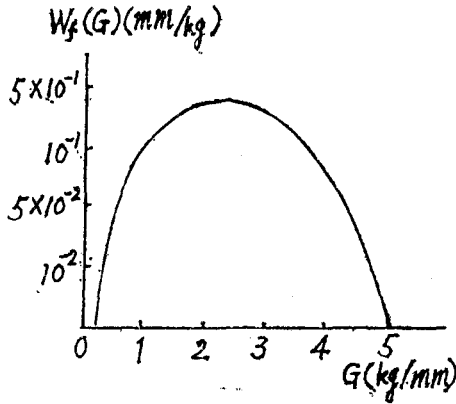


图 7

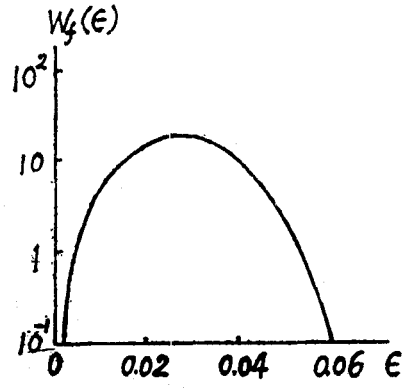


图 8

### Ⅷ. 统计平均值与统计偏差

由于实际固体内部微观成分、缺陷及显微组织的不均匀性，各个试样的宏观力学量都遵守固有的统计分布规律。为了准确地判断固体的断裂特性，需要去求各个试样的统计平均值。因此，我们可以认为：反映固体断裂特性的宏观力学量就是对宏观成分、工艺条件及外形尺寸相同的大量试样系综的相应的力学量的统计平均值。设  $F(\sigma)$  是某个与断裂有关的力学量，则其统计平均值为

$$\bar{F}(\sigma) = \int_0^{\infty} F(\sigma) W_f(\sigma) d\sigma \quad (60)$$

其中断裂几率密度（即强度的统计分布函数）由式（49）表示。下面就根据式（49），（60）来计算各个宏观力学量的统计平均值。由于式（49）很复杂，所得的近似结果如下<sup>[4,10]</sup>：

$$\bar{\epsilon}_f = \frac{1}{A^{1/m}} \left[ \frac{2}{\pi(1-\nu)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{1/2m} \quad (61)$$

$$\bar{\sigma}_f = \sigma_i + \left[ \frac{2}{\pi(1-\nu)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{1/2} \quad (62)$$

$$\bar{\omega}_f = \frac{1}{(1+m)A^{1/m}} \left[ \frac{2}{\pi(1-\nu)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{(1+m)/2m} \quad (63)$$

为计算裂纹扩展力  $\bar{G}_{1c}$ ，由式（37），（28），应有  $G = \frac{3}{8} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{L}{A^{1/m}} \sigma^{(1+m)/m}$ ，代

入式（60），得

$$\bar{G}_{1c} = \frac{3}{8} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{L}{A^{1/m}} \left[ \frac{2}{\pi(1-\nu)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{(1+m)/2m} \quad (64)$$

断裂韧性

$$\begin{aligned} \bar{K}_{1c} &= \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)^{1/2} \bar{G}_{1c}^{-1/2} \\ &= \left[ \frac{3}{8(1-\nu^2)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{LE}{A^{1/m}} \right]^{1/2} \left[ \frac{2}{\pi(1-\nu)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{(1+m)/4m} \end{aligned} \quad (65)$$

临界裂纹长度

$$\begin{aligned}\bar{C}_f &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{1c}}{\sigma_f} \right)^2 \\ &= \frac{3}{8\pi(1-\nu^2)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{LE}{A^{1/m}} \left[ \frac{2}{\pi(1-\nu)} \left( \frac{L}{b} \right)^{1/2} \frac{NL^2\gamma\mu}{\ln(VN(\epsilon_f))} \right]^{(1-m)/2m}\end{aligned}\quad (66)$$

式(61)–(66)正是我们求得的与脆性断裂有关的各个重要宏观力学量的表达式,它们都由一组共同的物理参量  $A, m, N, L, \gamma, \mu, V$  等表示。若已知金属的这些物理量,则可由上列各式算出  $\bar{\epsilon}_f, \bar{\sigma}_f, \bar{\omega}_f, \bar{G}_{1c}, \bar{K}_{1c}, \bar{C}_f$  等量。尽管这种计算不太精确(这是目前金属物理理论不成熟的一种表现),但就其变化趋向来看,却与好多实验相符<sup>[4]</sup>。

表1的理论值就是根据式(61)–(66)对高强度时效马氏体钢所作的计算,并和实验值作了对比。计算时,  $\sigma_i = 20 \text{ kg/mm}^2$ , 其他各参量取值与前面的相同。

表 1

	$\bar{\epsilon}_f$ (%)	$\bar{\sigma}_f$ ( $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ )	$\bar{\omega}_f$ ( $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ )	$\bar{G}_{1c}$ ( $\frac{\text{kg}}{\text{mm}}$ )	$\bar{K}_{1c}$ ( $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^{3/2}}$ )	$\bar{C}_f$ (mm)
理论值	4	136	4.2	3.2	273	1.28
实验值	4	160		3	245	

由式(65), (66), 即可求得

$$\bar{\sigma}_f = \left[ \frac{E\bar{G}_{1c}}{\pi(1-\nu^2)\bar{C}_f} \right]^{1/2}\quad (67)$$

这正是式(13)的形式,差别仅在于这儿的  $\bar{\sigma}_f, \bar{G}_{1c}, \bar{C}_f$  都是平均值。

为了计算遵守统计规律的各宏观力学量的分散性,现在用熟知的统计偏差公式。力学量  $F(\sigma)$  的平均平方偏差公式为

$$D(F) = \overline{[F(\sigma)]^2} - [\overline{F(\sigma)}]^2\quad (68)$$

其中 
$$[\overline{F(\sigma)}]^2 = \int_0^\infty [F(\sigma)]^2 W_f(\sigma) d\sigma\quad (69)$$

$F(\sigma)$  的相对偏差公式为

$$\frac{\sqrt{D(F)}}{\overline{F(\sigma)}} = \frac{\sqrt{\overline{[F(\sigma)]^2} - [\overline{F(\sigma)}]^2}}{\overline{F(\sigma)}}\quad (70)$$

由式(49), (60), (68), (69), (70)就可算得各宏观力学量的统计偏差,其近似结果如下。

对于延伸率,其平均平方偏差和相对偏差分别为

$$D(\epsilon_f) = \frac{(1-m)(\bar{\epsilon}_f)^2}{4m^2[\ln(VN(\epsilon_f))]^2}\quad (71)$$

$$\frac{\sqrt{D(\epsilon_f)}}{\bar{\epsilon}_f} = \frac{\sqrt{1-m}}{2m[\ln(VN(\epsilon_f))]} \quad (72)$$

对于强度，其平均平方偏差和相对偏差分别为

$$D(\sigma_f) = \frac{(\bar{\sigma}_f)^2}{4[\ln(VN(\epsilon_f))]^2} \quad (73)$$

$$\frac{\sqrt{D(\sigma_f)}}{\bar{\sigma}_f} = \frac{1}{2[\ln(VN(\epsilon_f))]} \quad (74)$$

对于塑性功，其平均平方偏差和相对偏差分别为

$$D(\omega_f) = \frac{(m+1)^2(\bar{\omega}_f)^2}{4m^2[\ln(VN(\epsilon_f))]^2} \quad (75)$$

$$\frac{\sqrt{D(\omega_f)}}{\bar{\omega}_f} = \frac{m+1}{2m[\ln(VN(\epsilon_f))]} \quad (76)$$

对于裂纹扩展力，其平均平方偏差和相对偏差分别为

$$D(G_{1c}) = \frac{(m+1)^2(\bar{G}_{1c})^2}{4m^2[\ln(VN(\epsilon_f))]^2} \quad (77)$$

$$\frac{\sqrt{D(G_{1c})}}{\bar{G}_{1c}} = \frac{m+1}{2m[\ln(VN(\epsilon_f))]} \quad (78)$$

对于断裂韧性，其平均平方偏差和相对偏差分别为

$$D(K_{1c}) = \frac{(m+1)^2(\bar{K}_{1c})^2}{16m^2[\ln(VN(\epsilon_f))]^2} \quad (79)$$

$$\frac{\sqrt{D(K_{1c})}}{\bar{K}_{1c}} = \frac{m+1}{4m[\ln(VN(\epsilon_f))]} \quad (80)$$

以小尺寸的时效马氏体高强度钢为例，各力学量的相对偏差值如下：

$\frac{\sqrt{D(\sigma_f)}}{\bar{\sigma}_f}$	$\frac{\sqrt{D(K_{1c})}}{\bar{K}_{1c}}$	$\frac{\sqrt{D(\epsilon_f)}}{\bar{\epsilon}_f}$	$\frac{\sqrt{D(G_{1c})}}{\bar{G}_{1c}}$	$\frac{\sqrt{D(\omega_f)}}{\bar{\omega}_f}$
3%	16.5%	28.6%	33%	33%

若是测量断裂韧性的标准大试样，则 $\sqrt{D(K_{1c})}/\bar{K}_{1c} = 10.9\%$ ，结果大致与实验相符。

## IX. 结束语

本文从微裂纹在很小塑性变形过程中按位错机理随机演化而导致固体脆性断裂这一基本思路出发，从理论上统一求得了微裂纹的长大速率、分布函数、脆性断裂几率与可靠性以及强度、塑性和韧性等宏观力学量的统计分布函数、统计平均值与统计偏差，所有这些结果，都由同一组物理参量表示。与现有其他脆性断裂理论相比，本工作有两个显著特点：

1. 从理论框架来说，突出了微裂纹动力学过程、塑性变形、统计性以及微观机理与宏观特性相结合这四者的有机联系，因而比较符合断裂的客观实际，理论上具有进一步发展的可能性。而现有其他理论，特别是目前广为重视的断裂力学理论，由于其立足点是连续弹性体内静态微裂纹的失稳性，不考虑固体的微观结构与断裂的动力学过程，在这样的理论框架内，要想建立起一套较为完满的断裂理论，看来是困难的。

2. 从具体结果来说，本文所导出的各种表达式，观点统一，物理意义清楚，概括了断裂

过程的多方面特性, 不仅能较广泛地解释已有的实验, 而且提出了一些预言. 这也是现有其他理论难以做到的.

当然, 由于断裂过程复杂, 影响因素很多, 作为新的探索, 本理论只是初步的, 其中不少近似都有待改进. 特别是如何使物理参量尽可能减少, 更是今后工作中有待解决的一个重要课题.

### 参 考 文 献

- 1 Liebowitz H. (ed.), *Fracture I—III*, New York, Academic Press (1968).
- 2 Болотин В. В., *Статистический метод в строительной механике*, М., Строиздат (1965).
- 3 Johnston G. O., *Reliability Eng.*, 5 (1983): 83.
- 4 邢修三, *物理学报*, 29 (1980): 718.
- 5 —, 同上, 22 (1966): 487.
- 6 横堀武夫, *断裂力学(四)* (中译文) (1980): 34.
- 7 Curran D. R., Serman L., Shockey D. A., *Phys. Today* (Jan. 1977): 46.
- 8 Vladimirov V. I., *Int. J. Fracture*, 11 (1975): 869.
- 9 邢修三, *物理学报*, 30 (1981): 1615.
- 10 —, 同上, 32 (1983): 1255.
- 11 Stroh A. H., *Adv. Phys.*, 6 (1957): 418.
- 12 Hirth J. P., Lothe J., *Theory of Dislocations*, New York, McGraw-Hill (1968).
- 13 Smith E., *Proc. Roy. Soc.*, A292 (1966): 134.
- 14 Head P. T., Aklinson C., *Acta Metall.*, 15 (1967): 1617.
- 15 Cottrell A. H., *The Mechanical Properties of Matter*, New York, Wiley (1964).
- 16 Rickerby D. G., *J. Mater. Sci.*, 15 (1980): 2466.
- 17 Smith R. A. (ed.), *Fracture Mechanics—Current Status, Future Prospects*, Cambridge Univ. (1979).

## THE MICROSCOPIC MECHANISM AND NONEQUILIBRIUM STATISTICAL NATURE OF BRITTLE FRACTURE

Xing Xiu-san

(Institute of Atomic Energy)

### Abstract

A nonequilibrium statistical theory of the brittle fracture of metals, connecting macroscopic process with a microscopic mechanism has been constructed. The microcrack evolution equation is given. The growth speed of cracks, the distribution function and the fracture probability are obtained in connection with the dislocation mechanism. Mechanical properties such as elongation, fracture strength, plastic work, crack-extension force, fracture toughness and their statistical distribution functions have been derived in a unified theory.

**Keywords** *brittle fracture; nonequilibrium statistics; microcrack evolution equation; dislocation mechanism; distribution function; fracture probability*